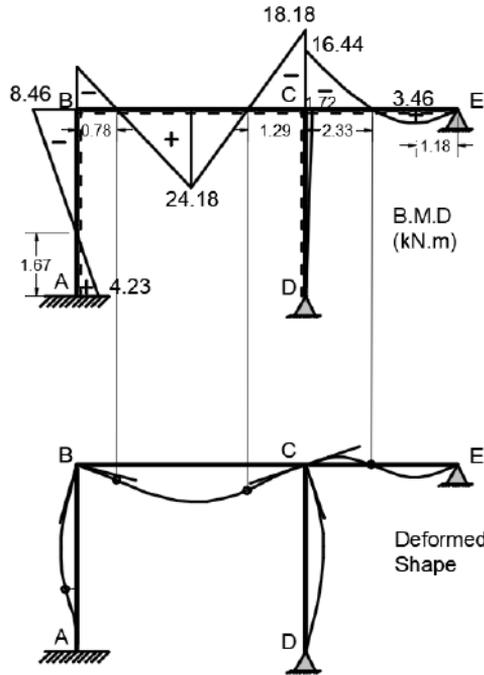




منشورات جامعة الفرات  
كلية الهندسة المدنية بالفرقة

## ميكانيك الإنشاءات (1)



تأليف:

د.م. ريم خريش

أستاذ مساعد في قسم الهندسة الإنشائية

السنة الثالثة

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية

1443هـ - 2022م



## ميكانيك الإنشاءات (1)





منشورات جامعة الفرات  
كلية الهندسة المدنية بالرقعة

## ميكانيك الإنشاءات (1)

تأليف:

د.م. ريم خريش

أستاذ مساعد في قسم الهندسة الإنشائية

السنة الثالثة

مديرية الكتب والمطبوعات الجامعية

1443هـ - 2022م



## الفهرس

الصفحة	الموضوع
9	مقدمة
11	الفصل الأول: عدم التقرير الستاتيكي والحركي
	<b>Static and Kinematic Indeterminacy</b>
11	1-1 مقدمة
11	2-1 أنواع الاستادات في المستوي
12	3-1 مبدأ تتصد الأثار
13	4-1 عدم التقرير الستاتيكي والحركي
22	5-1 درجة عدم التقرير الحركي
24	6-1 درجة عدم التقرير الستاتيكي والحركي في الجمل الفراغية
25	7-1 أمثلة محلولة
29	الفصل الثاني: نظريات العمل <b>Work Theories</b>
29	1-2 مقدمة
29	2-2 العمل الافتراضي
33	3-2 نظرية العمل المتبادل
35	4-2 نظرية ماكسويل التبادلية
35	5-2 طريقة القوة الواحدية
61	6-2 جداء مور
71	7-2 نظريتا كاستليانو
93	الفصل الثالث: طريقة العزوم الثلاثة <b>Three Moments Method</b>
93	1-3 مقدمة
93	2-3 مبدأ طريقة العزوم الثلاثة
94	3-3 استنتاج معادلة العزوم الثلاثة
94	4-3 أمثلة تطبيقية
107	5-3 حالات خاصة

## 127 **Slope Deflection Method** الفصل الرابع: طريقة الانتقال والدوران

127	مقدمة	1-4
127	اشتقاق معادلات الانتقال والدوران	2-4
131	عزوم الوتق	3-4
136	تطبيق طريقة الانتقال والدوران على الجوائز المستمرة	4-4
140	أمثلة محلولة على تطبيق طريقة الانتقال والدوران على الجوائز	5-4
154	تحليل الإطارات التي لا تخضع إلى حركة جانبية	6-4
156	أمثلة محلولة على تطبيق طريقة الانتقال والدوران على الإطارات بدون حركة جانبية	7-4
170	تحليل الإطارات ذات الحركة الجانبية	8-4
174	أمثلة محلولة على تطبيق طريقة الانتقال والدوران على الإطارات ذات حركة جانبية	9-4
182	تطبيق طريقة الانتقال والدوران من أجل أكثر من انتقال جانبي واحد	10-4
187	أمثلة محلولة على تطبيق طريقة الانتقال والدوران على الإطارات الطابقية	11-4
196	تحليل الإطارات ذات الأعمدة المائلة	12-4

## 205 **Moment Distribution Method** الفصل الخامس: طريقة توزيع العزوم

205	مقدمة	1-5
205	مبدأ الطريقة	2-5
210	تطبيق طريقة توزيع العزوم في الجوائز المستمرة	3-5
211	أمثلة على تطبيق طريقة توزيع العزوم على الجوائز المستمرة	4-5
222	طريقة توزيع العزوم في الإطارات	5-5
240	أمثلة على تحليل الإطارات ذات الأعمدة المائلة بطريقة توزيع العزوم	6-5

## 249 **Column Analogy** الفصل السادس: التشبيه العمودي

249	مقدمة	1-6
249	مبدأ الطريقة	2-6
251	حساب عزوم الوتق بطريقة التشبيه العمودي	3-6
252	حساب عوامل النقل وعوامل الصلابة	4-6

259

ملحق (1):

261

المراجع

263

دليل المصطلحات العلمية في علم ميكانيك الإنشاءات: عربي-انكليزي





## مقدمة

يهدف هذا الكتاب إلى بناء أساس قوي لدى الطالب في علم ميكانيك الإنشاءات، ويعدّ بداية سلسلة حساب الإنشاءات في المنشآت غير المقررة ستاتيكيًا. حيث يمثل لبنة أساسية لفهم سلوك المنشآت على اختلاف مواد إنشائها وذلك تحت تأثير الأحمال المختلفة ليُصار إلى تصميمها ضمن مقررات التصميم، مثل مقررات الخرسانة المسلحة والمنشآت الفولاذية والمنشآت المركبة، تمّ الحرص على ترسيخ مفاهيم علم ميكانيك الإنشاءات بشكل مفصل، وتمّ إدراج عدد كافٍ من المسائل المحلولة حتى يتسنى للطالب التدريب الكافي على هذه المفاهيم.

تم الاهتمام بشكل خاص بعدد من الطرائق المهمة في تحليل المنشآت غير المقررة ستاتيكيًا مثل طريقة كاستليانو الثانية وطريقة العزوم الثلاث وطريقة الانتقال والدوران وطريقة توزيع العزوم، حيث تناسب كل طريقة من هذه الطرائق بعض أنواع المنشآت أكثر من غيرها مع إمكانية حلّ معظم المنشآت من خلالها. تمّ الاهتمام برسم مخططات الجهود من عزم انعطاف (انحناء) وقوى قص وقوى ناظمية بالإضافة إلى الشكل المتشوه بُغية فهم سلوك هذه العناصر تحت تأثير الأحمال المختلفة وأشكال ارتباط هذه المخططات ببعضها رياضياً.

يحتوي هذا الكتاب على ستة فصول، يبيّن الفصل الأول منها عدم التقرير الستاتيكي والحركي في مختلف أنواع المنشآت، بينما يتضمّن الفصل الثاني نظريات العمل وتطبيقاتها مثل نظرية العمل الافتراضي والقوة الواحدية ونظريتا كاستليانو. أمّا الفصل الثالث فيحتوي على طريقة العزوم الثلاثة (كلايرون) وحالات تطبيقها المختلفة، وأمّا الفصل الرابع من الكتاب فيتضمن طريقة الانتقال والدوران (الميل والانحراف) في الجوائز والإطارات الممنوعة من الحركة الجانبية وأيضاً في الإطارات ذات الحركة الجانبية والإطارات الطابقية وذات الأعمدة المائلة، ويشرح الفصل الخامس طريقة توزيع العزوم بشكل مفصل في كل من الجوائز والإطارات. ويحتوي الفصل السادس والأخير على عرض سريع لاستخدام طريقة التشبيه العمودي في حساب عزوم الوثق وعوامل التوزيع.

وأخيراً أعبّر عن شكري وامتناني العميق لوالدي ووالدتي الحبيبتين وأخواتي وأخي الذين ساندوني جميعاً في مشواري العلمي والعملية، أتقدم بالشكر الجزيل لكل من أسهم في وصولي إلى هذه النقطة، ولا سيّما الكادر التدريسي في كلية الهندسة المدنية بجامعة حلب والدكتور عمار كعدان والمهندسة لمة وفائي اللذين تعلمت منهم كيف يكون العمل الجاد والحقيقي الذي يؤتي أكله، ويترك بصمته في الأجيال القادمة. أتمنى لطلابنا الأعزاء دوام التوفيق والنجاح وأن يكون هذا الكتاب مرجعاً مفيداً لهم في علم ميكانيك

الإتشاءات باللغة العربية. وآمل أن يكون هذا العمل المتواضع خطوة على طريق بناء مستقبل مشرق لبلدنا الحبيب.

والله ولي التوفيق

د. ريم فيصل خرتش



## الفصل الأول

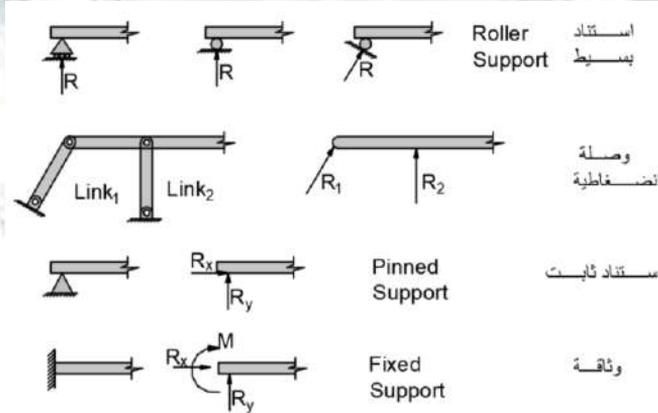
### عدم التقرير الستاتيكي والحركي Static and Kinematic Indeterminacy

#### 1-1 مقدمة:

تتم دراسة المواد في علم حساب الإنشاءات بافتراض كونها مرنة متجانسة متماثلة الخواص، حيث تعرف المرونة Elasticity بأنها قابلية المادة لاستعادة أبعادها الأولية بعد إزالة الحمل، بينما يعرف التجانس Homogeneity بكون المادة ذات كثافة واحدة. في حين يعني كون المادة متماثلة الخواص Isotropic material أنها ذات صفات واحدة متماثلة في الاتجاهات الثلاثة  $X, Y, Z$  مثل معامل المرونة الطولي  $E$  ومعامل المرونة على القص  $G$ . عندما تتساوى خواص المادة في المستوي  $XY$  وتختلف عنها في الاتجاه المعامد  $Z$  فيطلق عليها اسم Orthotropic Material، بينما تسمى المادة ذات الخواص المختلفة في الاتجاهات الثلاثة  $E_x, E_y, E_z, G_x, G_y, G_z$  Anisotropic material.

#### 1-2 أنواع الاستنادات في المستوي:

تتنوع الاستنادات في المستوي بحسب القيود التي تفرضها على حركة المنشأ عند نقطة الاستناد حيث تسمى هذه القيود ردود الأفعال (كما مرّ في علم مقاومة المواد) وتسمى إمكانيات الحركة المسموحة في هذه النقطة درجة الحرية Degree of Freedom. يتم فيما يلي استعراض أنواع الاستنادات كما هي موضحة في الشكل (1-1).



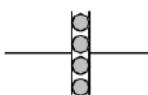
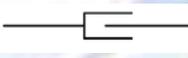
الشكل (1-1) أنواع الاستنادات في المستوي

- **الاستناد البسيط Roller Support:** له مجهول واحد وبالتالي رد فعل واحد معامد لسطح الاستناد، مما يعني أنّ له درجتين حرة Two Degrees of Freedom هما الانتقال الأفقي والدوران في المستوي.

- **وصلة أو شكل انضغاطي Link or Strut:** ويكون له مجهول واحد وبالتالي تكون له درجتا حرية .Two Degrees of Freedom.
- **المسند الثابت Pinned Support:** وله مجهولان يمثلان ردي فعل متعامدين أحدهما معامد لسطح الاستناد والثاني موازٍ لسطح الاستناد، وبالتالي يبقى له درجة حرية واحدة هي الدوران في المستوي.
- **الوثاقة Fixed Support:** ولها ثلاثة مجاهيل تمثل ردي فعل متعامدين أحدهما عمودي على سطح الاستناد، والثاني موازٍ لسطح الاستناد، والمجهول الثالث يمثل العزم الذي يمنع الدوران، وفي هذه الحال لا يبقى لهذه النوع من الاستناد أي درجة حرية Zero Degree of Freedom.
- **المفصل Hinge:**

تتعدم عند المفصل إحدى القوى الداخلية (عزم M أو قوة قاطعة T أو قوة ناظمية N) وبذلك تصنف المفاصل حسب أنواعها كما في الجدول (1-1).

الجدول (1-1) أنواع المفاصل في المستوي

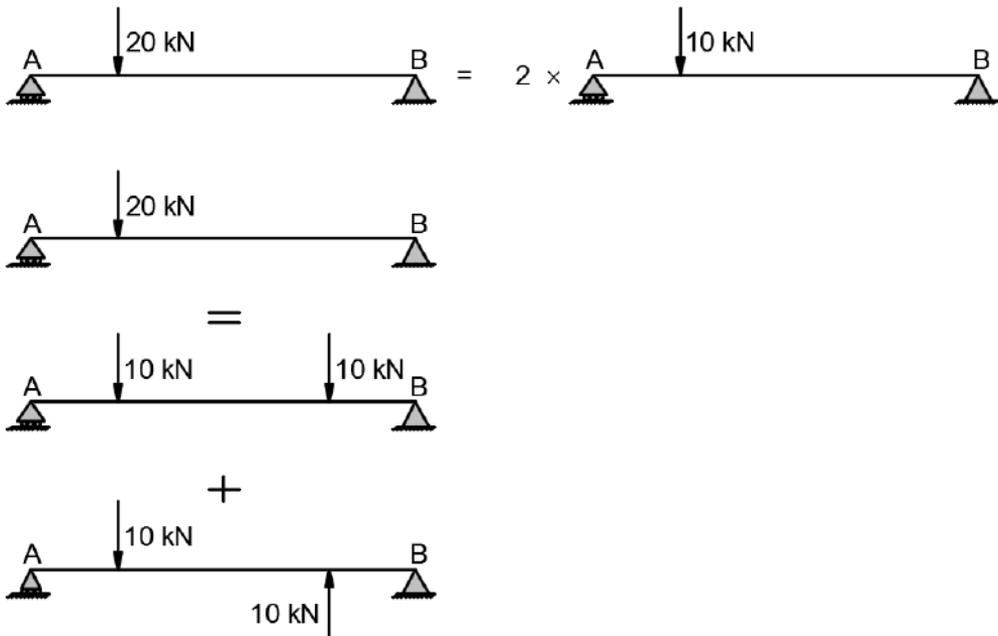
الميزة	القيمة المعدومة	الرمز	نوع المفصل
يسمح بالدوران حول محور معامد للعنصر	عزم الانعطاف M		مفصل انحنائي
يسمح بالانتقال الشاقولي	القوة القاطعة (القاصة) T		مفصل قص
يسمح بالانتقال الأفقي	القوة المحورية (الناظمية) N		مفصل ناظمي
يسمح بالدوران حول محور العنصر	عزم القتل Q		مفصل فتلي

### 3-1 مبدأ تنضد الأثار Principle of Superposition

يُعد مبدأ تنضد الأثار أحد أهم المبادئ في التحليل الإنشائي ويشترط لتطبيقه كون العلاقة خطية بين الأحمال والتشوهات، وبالتالي بين الإجهاد والانفعال أي أنّ المادة ما تزال ضمن السلوك المرن/ وتخضع لقانون هوك  $\sigma = E\varepsilon$ ، أيضاً يُشترط كون التشوهات ضمن المنشأ صغيرة. وينص على أنّ الأثر الناتج عن مجموعة من الأحمال يساوي إلى مجموعة الأثار الناتجة عن كل حمل على حدة.

يبين الشكل (1-2أ) أمثلة تتضمن جائزاً بسيطاً تم تطبيق مبدأ تتضد الأثار عليه وفق أشكال عدة وتكون الحصيلة واحدة. إنَّ الجهود الداخلية الناتجة عن تحميل الجائز الأصلي بكامل الأحمال، من عزوم انعطاف وقوى قاطعة وقوى ناظرية تساوي إلى مجموع الجهود المماثلة الناتجة عن كل حمل على حدة.

بينما يبين الشكل (1-2ب) تطبيق مبدأ تتضد الأثار على جائز ظفري خاضع إلى أحمال متنوعة من عزم مركز وقوى موزعة بانتظام وقوة مركزة حيث تكون الجهود الداخلية الناتجة عن المجموع في أية نقطة مساوية للجهود الداخلية الكلية.



الشكل (1-2) تطبيق مبدأ تتضد الأثار على جائز بسيط

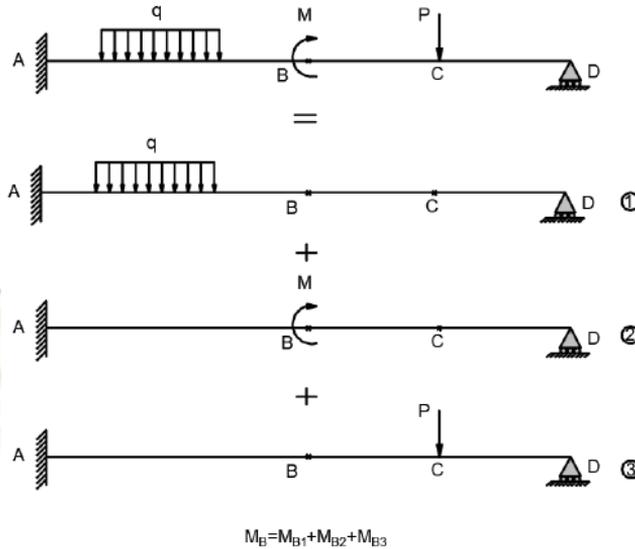
#### 4-1 عدم التقرير الستاتيكي والحركي Static and Kinematic Indeterminacy

يوجد نوعان من عدم التقرير في التحليل الإنشائي هما عدم التقرير الستاتيكي وعدم التقرير الحركي، حيث يتم التعبير عن عدم التقرير الستاتيكي باعتبار المجاهيل هي ردود الأفعال ويتم التعبير عن عدم التقرير الحركي باعتبار المجاهيل هي الانتقالات والدورانات.

##### 1-4-1 عدم التقرير الستاتيكي:

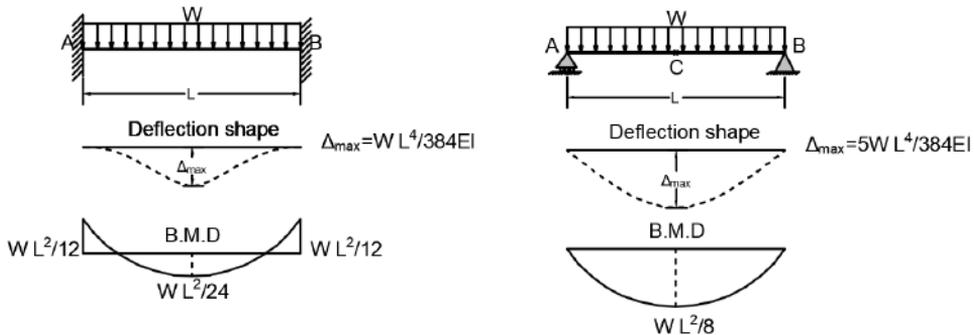
عندما تكون معادلات التوازن كافية لإيجاد المجاهيل -ويكون عددها ثلاثة في المستوي وستة في الفراغ- يكون المنشأ مقررأً Determinate، ولكن عندما يزيد عدد المجاهيل على عدد معادلات التوازن

يكون المنشأ غير مقررٍ وتسمى المجاهيل أو ردود الزائدة Static Redundants. إن عدد المجاهيل الزائدة يدعى بدرجة عدم التقرير Degree of Indeterminacy.



الشكل (1-2) تطبيق مبدأ تتضد الآثار على جائز ظفري متعدد الأحمال

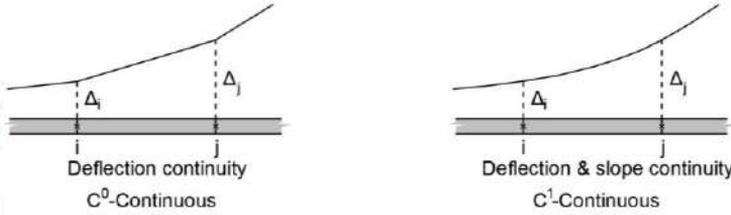
من مميزات المنشآت غير المقررة ستاتيكيًا كونها ذات صلابة أكبر وتخضع إلى إجهادات أقل، أيضاً وجود ردود الأفعال الزائدة يؤدي إلى انخفاض احتمال الانهيار، الشكل (1-3). بينما يُلاحظ وجود مساوئ لها مثل احتمال وجود الإجهادات الناتجة عن هبوط المساند، والإجهادات الناتجة عن التغيرات الحرارية. في حال وجود عدم تقرير ستاتيكي هناك حاجة إلى معادلات إضافية لحل المنشأ وإيجاد ردود الأفعال (المجاهيل) الزائدة ويتم الحصول على هذه المعادلات إما من علاقة التوافقية وإما المعادلات الأساسية.



الشكل (1-3) مقارنة بين منشأ مقرر ستاتيكيًا ومنشأ غير مقرر

## • علاقة التوافقية Compatibility Relationship

وتعني استمرارية الانتقالات عبر المنشأ، أي أنّ الانتقال يمين المقطع المدروس يساوي الانتقال يسار المقطع المدروس. تمّ تصنيف التوافقية إلى مراتب حسب درجة الاستمرارية حيث تكون التوافقية من الدرجة صفر  $C^0$ -Continuous عندما يكون الانتقال مستمراً عبر العنصر، الشكل (1-4). بينما تكون التوافقية من الدرجة الأولى  $C^1$ -Continuous عندما يكون كل من الانتقال ومشتقّه من الدرجة الأولى (أي الدوران) مستمرين عبر العنصر، الشكل (1-4).



الشكل (1-4) مراتب التوافقية

## • المعادلات الأساسية Constitutive Equations

تمثّل علاقة الإجهادات بالانفعالات حيث تتم مكاملة هذه المعادلات عبر المقطع العرضي (قانون هوك).

## • مفهوم الاستقرار

ليكون المنشأ مستقراً يجب أن يكون عدد العناصر والمساند كافياً، كما يجب أن يكون الترتيب الهندسي لها محققاً من أجل منع المنشأ من الحركة أيضاً. فيما يلي يتم دراسة استقرار كل من الجوائز والمنشآت الشبكية والإطارات وتقريرها.

## – استقرار وتقرير الجوائز Stability and Determinacy of Beams

كي يكون الجائز مقررًا ومستقرًا يجب أن يكون عدد معادلات التوازن مساوياً لعدد المجاهيل، تمثّل المجاهيل ردود الأفعال وعدد المعادلات يساوي ثلاث معادلات توازن في المستوي بالإضافة إلى معادلة إضافية من أجل كل مفصل. عندها يكون الجائز غير مستقر وفقاً للمعادلة (1-1) ويكون مقررًا ومستقرًا وفقاً للمعادلة (2-1).

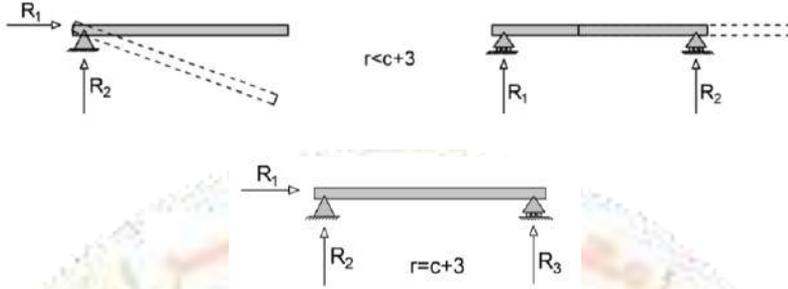
$$r < c + 3 \quad (1-1)$$

$$r = c + 3 \quad (2-1)$$

r: تمثّل عدد المجاهيل، وهي ردود الأفعال Reactions.

C: عدد المعادلات الناتجة عن وجود المفاصل.

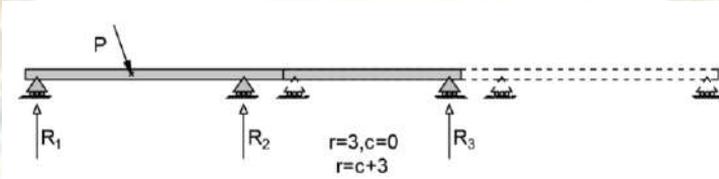
$c+3$ : العدد الكلي لمعادلات التوازن.



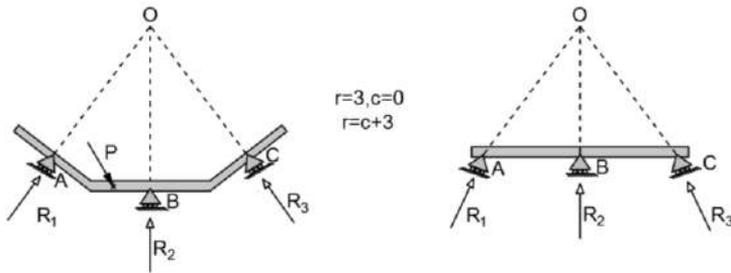
الشكل (5-1) استقرار وعدم استقرار الجوائز

### • المنشآت المتحركة Mobile Structures

كما ورد سابقاً فإنّ للاستقرار شرطاً إضافياً بالإضافة إلى المعادلة (1-1) وهو كون الترتيب الهندسي لردود الأفعال Geometrical Arrangement يمنع المنشأ من الحركة عند التحميل بالحمولات. كما في الشكل (6-1) والشكل (7-1) والشكل (8-1).

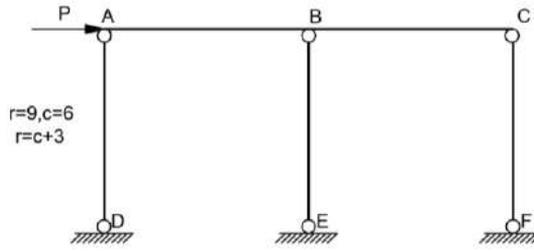


الشكل (6-1 أ) أمثلة على الجوائز المتحركة



الشكل (6-1 ب) أمثلة على الجوائز المتحركة

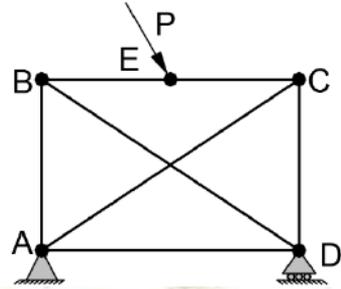
يُلاحظ من الشكل (6-1) أنّ الجائزين السفليين قابلان للحركة تحت تأثير أية حمولة P لا يمر حاملها من النقطة O.



الشكل (7-1) مثال على إطار متحرك

بينما الإطار الموضح في الشكل (7-1) فهو غير قادر على مقاومة الحركة الأفقية وفقاً للترتيب الموجود.

إنّ المنشأ الشبكي الموضح في الشكل (8-1) قابل للحركة عند النقطة E بسبب وجود مفصل عند هذه النقطة، وعدم وجود عنصر ثالث فيها، وبالتالي يكون المنشأ قابلاً للحركة تحت تأثير الحمولة P.



الشكل (8-1) منشأ شبكي متحرك

### • عدم تقرير الجوائز Indeterminacy of Beams

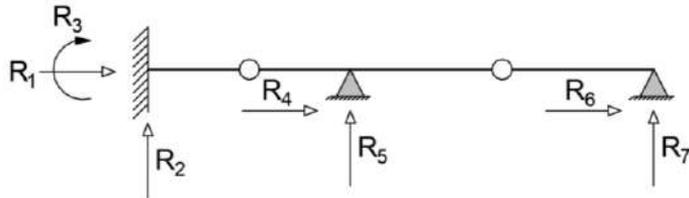
يعدّ الجائز غير مقررٍ في حال تحقق المعادلة (3-1)

أي أنّ عدد المجاهيل أكبر من عدد المعادلات. في حين يتم تسمية الفرق بينهما بدرجة عدم التقرير m، المعادلة (4-1) ويمثل عدد المجاهيل الزائدة Degree of Indeterminacy.

يبين الشكل (9-1) جائزاً غير مقررٍ من الدرجة الثانية، إنّ عدد ردود الأفعال يساوي 7 بينما عدد المعادلات فيساوي 5.

$$r > c + 3 \quad (3-1)$$

$$m = r - (c + 3) \quad (4-1)$$



$$\begin{aligned} r &= 7, c = 2 \\ 7 &> c + 3 = 5 \\ m &= 7 - (2 + 3) = 2 \end{aligned}$$

الشكل (9-1) جائز غير مقرر من الدرجة الثانية

## ب- استقرار المنشآت الشبكية وتقريرها Stability and Determinacy of Trusses

كي يكون المنشأ الشبكي مقرراً ومستقراً يجب أن يكون عدد معادلات التوازن مساوياً لعدد المجاهيل. تمثل المجاهيل ردود الأفعال بالإضافة إلى القوى المحورية في العناصر بينما عدد المعادلات فيساوي ضعف عدد العقد،  $2j$ . عندها يكون المنشأ الشبكي غير مستقر وفقاً للمعادلة (10-1) ويكون مقرراً ومستقراً وفقاً للمعادلة (11-1).

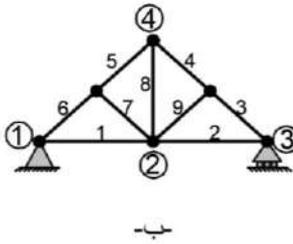
$$b + r < 2j \quad (10-1)$$

$$b + r = 2j \quad (11-1)$$

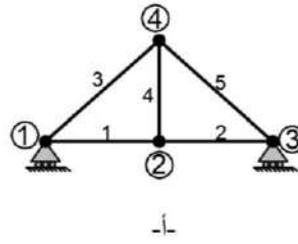
$r$ : تمثل ردود الأفعال Reactions.

$b$ : عدد العناصر.

$2j$ : العدد الكلي لمعادلات التوازن ويساوي إلى ضعف عدد العقد.



$$r=3, b=9, j=6 \\ b+r=12=2j=2 \times 6$$



$$r=2, b=5, j=4 \\ b+r=7 < 2j=8$$

الشكل (10-1) أ- جاذب شبكي غير مستقر. ب- جاذب شبكي مستقر ومقرر

## • عدم تقرير المنشآت الشبكية Indeterminacy of Trusses

يُعدّ المنشأ الشبكي غير مقرر في حال تحقق المعادلة (12-1) أي أن عدد المجاهيل أكبر من عدد المعادلات. في حين يتم تسمية الفرق بينهما بدرجة عدم التقرير  $m$ ، المعادلة (13-1) ويمثل عدد المجاهيل الزائدة Degree of Indeterminacy. يبين الشكل (11-1) منشأ غير مقرر من الدرجة الثالثة، إن عدد المجاهيل يساوي 17 بينما يساوي عدد المعادلات 14.

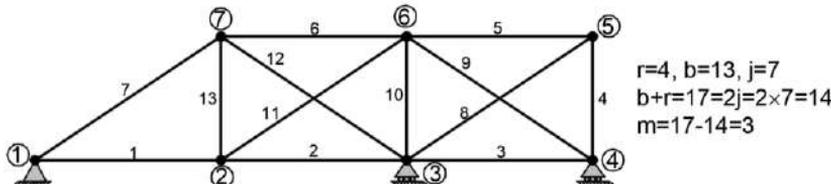
$$b + r > 2j \quad (12-1)$$

$$m = (b + r) - 2j \quad (13-1)$$

## • عدم التقرير الخارجي وعدم التقرير الداخلي في المنشآت الشبكية

يمكن التمييز بين عدم التقرير الخارجي وعدم التقرير الداخلي في المنشآت الشبكية، إن عدم التقرير الخارجي External Indeterminacy يتعلق بحساب ردود الأفعال الخارجية في المنشأ ويكون

المنشأ غير مقررٍ عندما يتجاوز عدد ردود الأفعال الخارجية عدد معادلات التوازن وهي من أجل المنشآت الشبكية معادلتان في المستوي وثلاث في الفراغ، ويعبر عن درجة عدم التقرير الخارجي بالمعادلة (1-14). بينما يتعلق عدم التقرير الداخلي Internal Indeterminacy بحساب محصلات الإجهاد ضمن المنشأ ويعبر عن درجة عدم التقرير الداخلي بالمعادلة (1-15).



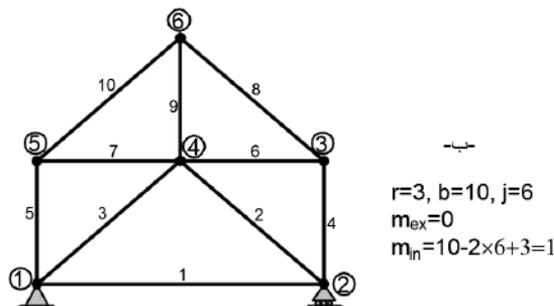
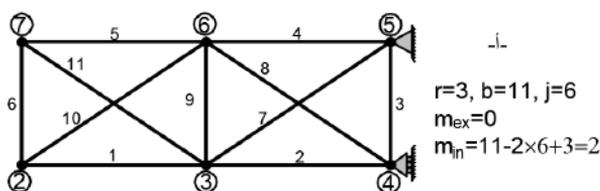
الشكل (1-11) منشأ شبكي غير مقرر من الدرجة الثالثة

إنّ درجة عدم التقرير الكلية هي عبارة عن مجموع درجتي عدم التقرير الخارجي والداخلي.

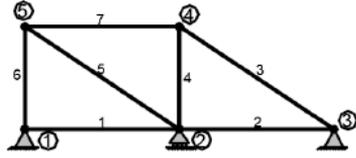
$$m_{ex} > r - 3 \quad (14-1)$$

$$m_{in} = b - 2j + 3 \quad (15-1)$$

إن النموذج رقم أ- في الشكل (1-12) هو غير مقرر داخلياً من الدرجة الثانية ومقرر خارجياً، والنموذج ب- فهو غير مقرر داخلياً من الدرجة الأولى ومقرر خارجياً. بينما النموذج ج- غير مستقر، والنموذج د- مقرر داخلياً وغير مقرر خارجياً من الدرجة الثانية.



الشكل (1-12) أمثلة على درجتي عدم التقرير الداخلي والخارجي

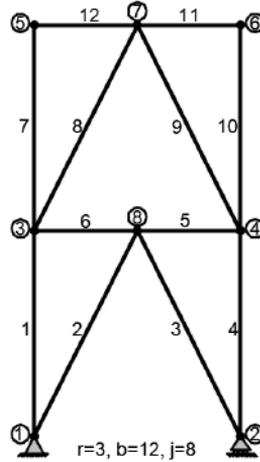


$$r=5, b=7, j=5$$

$$m_{ex}=2$$

$$m_{in}=7-2 \times 5+3=0$$

-د-



$$r=3, b=12, j=8$$

$$m_{ex}=0$$

$$m_{in}=12-2 \times 8+3=-1$$

-ج-

تابع الشكل (12-1) أمثلة على درجتي عدم التقرير الداخلي والخارجي

### ج- استقرار وتقرير الإطارات Stability and Determinacy of Frames

يُعدّ المنشأ الإطاري غير مستقر في حال تحقق المعادلة (16-1) أي أنّ عدد المجاهيل أقل من عدد المعادلات. بينما يُعدّ المنشأ الإطاري مقررًا في حال تحقق المعادلة رقم (17-1). في حين يعرف المنشأ الإطاري غير المقرر بالمعادلة (18-1) ويتم تسمية الفرق بين المعادلات المتوفرة والمجاهيل بدرجة عدم التقرير  $m$ ، المعادلة (19-1) Degree of Indeterminacy.

يبين الشكل (13-1) منشأ غير مستقر على الرغم من كون المعادلة (18-1) محققة، وذلك بسبب الترتيب الهندسي القابل للحركة. بينما الأمثلة في الشكل (14-1) فهي مستقرة وغير مقررة.

$$3b + r < 3j + c \quad (16-1)$$

$$3b + r = 3j + c \quad (17-1)$$

$$3b + r > 3j + c \quad (18-1)$$

$$m = (3b + r) - (3j + c) \quad (19-1)$$

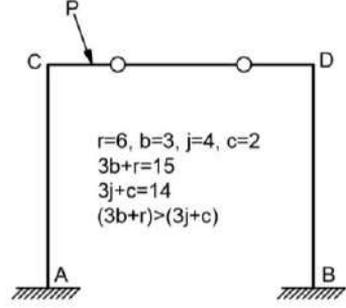
$r$ : تمثّل ردود الأفعال Reactions.

$b$ : عدد العناصر.

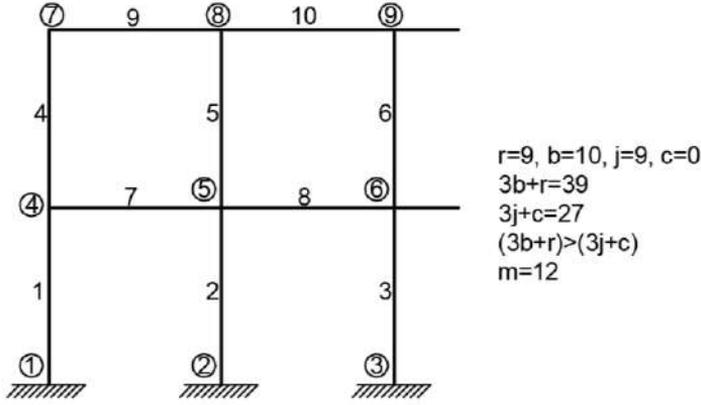
$j$ : عدد العقد.

**ملاحظة:**

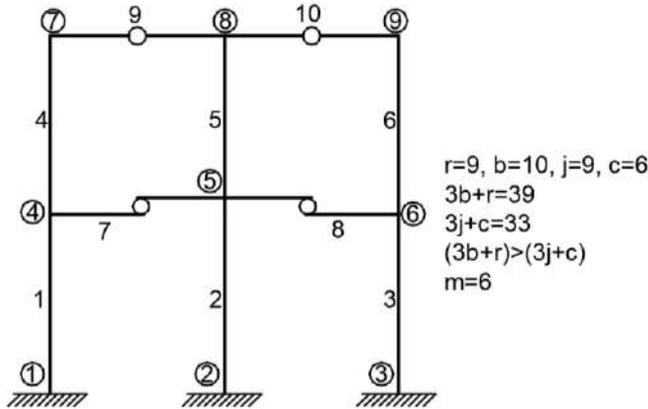
إنّ كلّ مضلعٍ مغلقٍ في الإطارات يعطي ثلاثة مجاهيل وبالتالي فإنّ درجة عدم التقرير الداخلية تساوي  $3N$  حيث  $N$  هو عدد المقاطع الممكن إجراؤها داخلياً؛ بحيث يمكن حذف القوى الداخلية الفائضة مع الحفاظ على المنشأ مستقراً. الشكل (15-1) يبين مثالاً على إطار بمضلعين مغلقين وبالتالي تكون درجة عدم التقرير مساوية  $2 \times 3$  وتساوي 6.



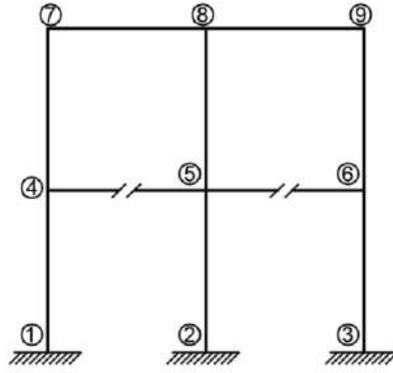
الشكل (13-1) إطار غير مستقر رغم أنه يحقق شرط التقرير



الشكل (14-1 أ) أمثلة على إطارات مستقرة وغير مقررة

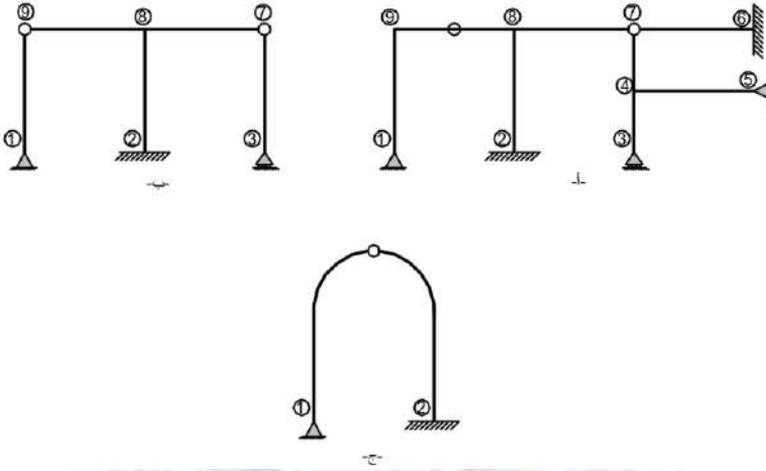


الشكل (14-1 ب) أمثلة على إطارات مستقرة وغير مقررة



الشكل (15-1) إطار بمضلعات مغلقة

- أمثلة غير محلولة على استقرار وتقدير الإطارات:



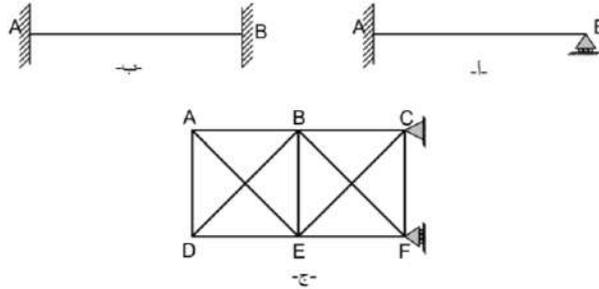
الشكل (16-1) أمثلة غير محلولة

### 5-1 درجة عدم التقدير الحركي Kinematic Indeterminacy

يتم أولاً تحديد مكان العقد Joints، وهي نقطة تقاطع عنصرين أو أكثر، المساند، النهايات الحرة. تخضع كل عقدة إلى انتقالين ودوران ما عدا عقد المساند والوثاقات، فتختصر بعضاً من هذه القيم بحسب طبيعة المسند. إن عدد الانتقالات والدورانات المجهولة في عُقد المنشأ يسمى بدرجة عدم التقدير الحركي أو درجة الحرية Degree of Freedom مع التنويه إلى أن المجاهيل في المنشآت الشبكية هي الانتقالات الأفقية والشاقولية فقط لأن التحميل يكون على العقد.

مثلاً بدراسة المثال -أ- من الشكل (17-1) يُلاحظ أن العقدة A لا تخضع إلى أية انتقالات أو دورانات، بينما العقدة B فتخضع إلى انتقال أفقي ودوران. أي أن الجائر غير مقرر حركياً من الدرجة

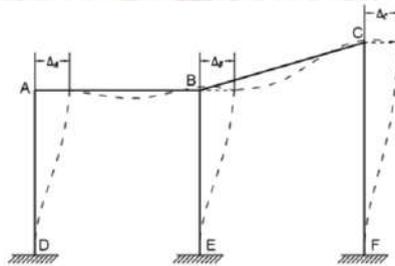
الثانية أو أنه ذو درجتي حرية. في بعض الحالات العملية تُهمل التشوهات المحورية، عندها يصبح الجائز غير مقرر حركياً من الدرجة الأولى أو ذا درجة حرية واحدة.



الشكل (17-1) أمثلة على درجات الحرية

بينما لا تخضع العقدتان A, B في المثال ب- لأي انتقالات أو دورانات وبالتالي يكون الجائز مقررًا حركياً أو ليس له درجة حرية للحركة. إنَّ المنشأ الشبكي في المثال ج- من الشكل (17-1) غير مقرر ستاتيكيًا من الدرجة الثانية. بينما هو غير مقرر حركياً من الدرجة التاسعة، إذ تخضع العقد لأي انتقالات ويكون لدينا بالمحصلة 9 انتقالات أفقية وشاقولي بينما تخضع العقدة F إلى انتقال شاقولي فقط والعقدة C لا تخضع لأي انتقالات ويكون لدينا بالمحصلة 9 انتقالات أفقية وشاقولية وتكون درجة عدم التقرير الحركي هي 9 أي أنَّ للمنشأ تسع درجات حرية.

بدراسة المنشأ الإطاري في الشكل (18-1) يُلاحظ أنَّ كل من العقد الثلاث A, B, C تخضع إلى ثلاث درجات حرية (انتقالين ودوران) بينما العقد D, E, F فلا تخضع إلى أي درجات حرية، بالمحصلة يكون للجملة 9 درجات حرية. إذا تمَّ إهمال التشوهات المحورية في الأعمدة فإنَّ ذلك سوف يختصر الانتقال الشاقولي في العقد A, B, C وبالتالي يبقى في الجملة ست درجات حرية فقط، أيضاً بإهمال التشوهات المحورية في العناصر AB, BC يصبح الانتقال الأفقي في B مساوياً للانتقال الأفقي في A وكذلك الأمر هناك علاقة تربط الانتقال الأفقي في C مع الانتقال الأفقي في B؛ وبالتالي يتم اختصار عدد درجات الحرية الكلي في الجملة إلى 4 درجات هي ثلاثة دورانات وانتقال أفقي.



الشكل (18-1) مثال إطاري على حساب درجة الحرية الحركية

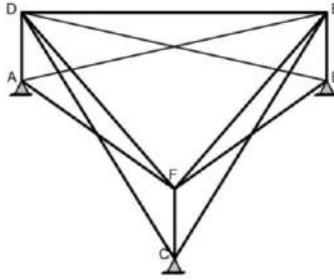
## 6-1 درجة عدم التقرير الستاتيكي والحركي في الجمل الفراغية

### Static and Kinematic Indeterminacy of Space Structures

#### 1-6-1 الجمل الشبكية الفراغية

فيما يخص درجة عدم التقرير الستاتيكي للجمل الشبكية فإنه يمكن الحصول على ثلاث معادلات توازن لكل عقدة في الفراغ، وبالتالي يصبح عدد المعادلات الكلي  $3j$ ، ويكون عدد المجاهيل مساوياً إلى عدد العناصر (لكل عنصر قوة مجهولة) مضافاً إليه ردود الأفعال  $b+r$  وبالتالي تكون درجة عدم التقرير الستاتيكي مساوية  $(b+r-3j)$ . بالفصل بين درجتي عدم التقرير الستاتيكي الداخلي والخارجي يمكن الحصول على  $m_{ex}=r-6$  درجة عدم التقرير الستاتيكي الخارجي،  $m_{in}=b-3j+6$ .

أما فيما يخص درجة عدم التقرير الحركي فإن كل عقدة تخضع إلى ثلاثة انتقالات وفق الاتجاهات الثلاث بينما تخفّض حرية الحركة في المساند بحسب طبيعتها.



الشكل (19-1) مثال فراغي شبكي على درجة عدم التقرير

فمثلاً بدراسة المثال في الشكل (19-1)؛ وهو عبارة عن منشأ شبكي مسنود على ثلاثة مساند ثابتة في A, B, C يُلاحظ أنه غير مقرر ستاتيكيًا من الدرجة الثالثة. لأن كل مسند ثابت له 3 ردود أفعال في الفراغ بالاتجاهات الثلاث x, y, z؛ وبالتالي عدد ردود الأفعال  $r=9$ ، وهناك 6 عقد أي  $j=6$  و 12 عناصر أي  $b=12$  وتكون درجة عدم التقرير الستاتيكي الكلية مساوية إلى ثلاث. وبدراسة عدم التقرير الحركي لهذا المثال يُلاحظ أنه لا توجد أي درجات حرية في العقد A, B, C بينما يوجد في كل من العقد D, E, F ثلاث درجات لحرية الحركة وهي الانتقالات في كل من الاتجاهات x, y, z؛ وبالتالي تصبح درجة عدم التقرير الحركي الكلية مساوية 9.

#### 2-6-1 الجمل الإطارية الفراغية

في الجمل الإطارية الفراغية يكون لكل مسند موثوق (Fixed) 6 ردود أفعال ثلاثة عزوم وثلاثة قوى  $R_x, R_y, R_z - M_x, M_y, M_z$  بينما لكل مسند ثابت (Pinned) ثلاث ردود أفعال عبارة عن ثلاثة

قوى في الاتجاهات الثلاث  $R_x, R_y, R_z$ ، وبما أنه توجد في الفراغ 6 معادلات توازن تصبح معادلة درجة عدم التقرير الستاتيكي كما في المعادلة (20-1) ويمكن الحصول على معادلتين درجة عدم التقرير الستاتيكي الداخلية والخارجي (21-1) و(22-1).

$$m = (6b + r) - (6j + c) \quad (20-1)$$

$$m_{ex} = r - (c + 6) \quad (21-1)$$

$$m_{in} = 6(b - j + 1) \quad (22-1)$$

يمثل  $c$  عدد المعادلات الشرطية الناتجة عن المفاصل الداخلية وذلك بحسب نوع المفصل:

• انعطافي  $M_y, M_z$ ، فتلي  $M_x$

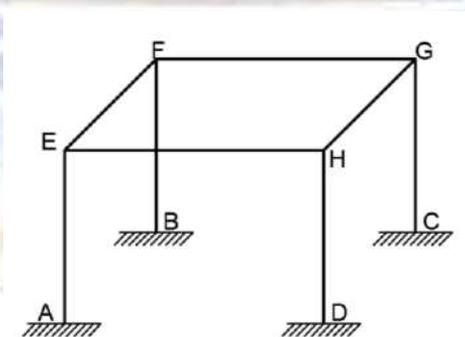
فيما يخص درجة عدم التقرير الحركية فإن كل عقدة تخضع إلى 6 درجات حرية تمثل ثلاثة دورانات وثلاثة انتقالات، بينما المساند الثابتة لها ثلاث درجات حرية هي ثلاثة دورانات والمساند الموثوقة لا توجد لها أية درجات حرية.

7-1 أمثلة محلولة:

مثال محلول (1-1):

أوجد درجة عدم التقرير الستاتيكي والحركي في المنشأ الإطاري الفراغي المبين بالشكل (20-1)

(1).



الشكل (20-1) مثال إطار فراغي على درجة عدم التقرير

أ- درجة عدم التقرير الستاتيكي:

يُلاحظ أن العقد A, B, C, D موثوقة وبالتالي لكل منها ستة ردود أفعال أي:

$$r = 6 \times 4 = 24$$

عدد العقد  $j = 8$

عدد العناصر  $b = 8$

ولا توجد معادلات شرطية ناتجة عن مفاصل  $c = 0$

فتكون درجة عدم التقرير الخارجي  $m_{ex} = 24 - (0 + 6) = 18$

ودرجة عدم التقرير الداخلي  $m_{in} = 6(8 - 8 + 1) = 6$

ودرجة عدم التقرير الستاتيكي الكلية  $m = (6 \times 8 + 24) - (6 \times 8 + 0) = 24$

وبالتالي هناك 24 مجهولاً يجب تحديدهم.

**ب- درجة عدم التقرير الحركي:**

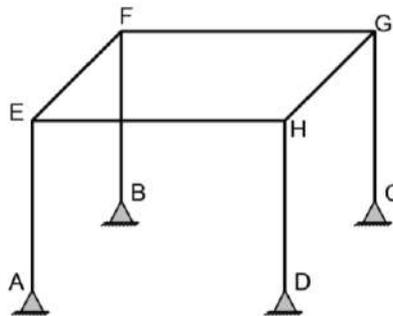
إنّ العقد الأربعة A,B,C,D موثوقة، وبالتالي ليس لها أي حرية حركة، بينما العقد الأربعة E,F,G,H فلكل منها 6 درجات حرية في الفراغ ثلاثة انتقالات وثلاثة دورانات وبالتالي تكون درجة عدم التقرير الحركي الكلي مساوية 24.

• مناقشة:

في حال إهمال التشوهات المحورية لا تتأثر درجة عدم التقرير الستاتيكي، بينما تتأثر درجة عدم التقرير الحركي؛ إذ يتم اختصار أربعة انتقالات محورية من العقد E,F,G,H بالإضافة إلى أنّ العناصر الأفقية الأربعة EF, EH, FG, HG لا تتغير أطوالها وبالتالي يتم اختصار أربعة انتقالات من العقد E,F,G,H وتبقى  $24 - 8 = 16$  درجة حرية في الجملة في حال إهمال التشوهات المحورية.

**مثال محلول (2-1):**

اعتبر أنّ العقد A,B,C,D في المثال السابق مساند ثابتة وأوجد درجة عدم التقرير الستاتيكي والحركي في المنشأ الإطاري الفراغي المبين بالشكل (21-1).



الشكل (21-1) مثال إطار فراغي على درجة عدم التقرير

### أ- درجة عدم التقرير الستاتيكي:

يُلاحظ أنّ العقد A,B,C,D مساند ثابتة وبالتالي لكل منها ست ردود أفعال أي:

$$r = 3 \times 4 = 12$$

عدد العقد  $j = 8$  ، عدد العناصر  $b = 8$

ولا توجد معادلات شرطية ناتجة عن مفاصل  $c = 0$

فتكون درجة عدم التقرير الخارجي  $m_{ex} = 12 - (0 + 6) = 6$

ودرجة عدم التقرير الداخلي  $m_{in} = 6(8 - 8 + 1) = 6$

ودرجة عدم التقرير الستاتيكي الكلية  $m = (6 \times 8 + 12) - (6 \times 8 + 0) = 12$

وبالتالي هناك 12 مجهول يجب تحديدها.

### ب- درجة عدم التقرير الحركي:

إنّ العقد الأربعة A,B,C,D مساند ثابتة وبالتالي لكل عقدة ثلاث درجات حرية هي ثلاث دورانات، بينما العقد الأربعة E,F,G,H فكل منها 6 درجات حرية في الفراغ ثلاثة انتقالات وثلاثة دورانات، وبالتالي تكون درجة عدم التقرير الحركي الكلي مساوية 36. يُلاحظ أنّ درجة عدم التقرير الحركي ازدادت بالمقدار /12/ بتحويل الوثاقات إلى مساند ثابتة، حيث أضاف كل مسند ثلاث درجات حرية، بينما نقصت درجة عدم التقرير الستاتيكي بالمقدار ذاته /12/.



## الفصل الثاني

### نظريات العمل Work Theories

#### 1-2 مقدمة:

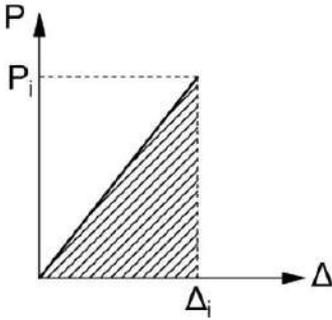
تُستخدم نظريات العمل للحصول على حلول لمسائل المرونة وإيجاد الانتقالات والدورانات في المنشآت، وبما أن العمل هو عنصر جبري فإن طرائق العمل هي طرائق جبرية. في هذا الفصل سوف تُستعمل طرائق العمل للحصول على الانتقالات والدورانات في المنشآت المقررة ستاتيكيًا، وعلى ردود الأفعال الزائدة في المنشآت غير المقررة ستاتيكيًا. إن تطبيق طرائق العمل في هذا الكتاب يقتصر على مواد ذات سلوك مرن خطياً ومنشآت ذات تشوهات (انتقالات ودورانات) صغيرة. سيتم استعراض كل من طريقة العمل الافتراضي، طريقة القوة الواحدية وجداء مور وأيضاً نظريتي كاستليانو.

#### 2-2 العمل الافتراضي Virtual Work:

في هذه الطريقة يتم افتراض وجود عمل افتراضي يُحسب من أجل كل من القوى الخارجية والداخلية، ولا بد أن تكون هاتان القيمتان متساويتين وبالتالي يمكن الحصول على الانتقال أو الدوران المجهول كونه يُسهم في عمل القوى الخارجية.

##### • العمل الناتج عن القوى الخارجية الستاتيكية:

بما أن القوة المطبقة ستاتيكية فهذا يعني أن تطبيق القوة يتم بشكل تدريجي من  $P_i \leftarrow 0$  وهي تمثل قوة ستاتيكية وبالتالي يكون الانتقال متزايداً من  $0 \leftarrow \Delta_i$ ، الشكل (1-2). إن العمل الناتج عن هذه القوة  $P$  يساوي إلى المساحة المحصورة تحت تابع القوة، أي مساحة المثلث المهشر.



الشكل (1-2)

$$W_s = \frac{1}{2} P_i \Delta_i$$

##### • العمل الناتج عن القوى

(1-2)

##### الخارجية الديناميكية:

يتم تطبيق القوة ديناميكياً بشكل مفاجئ، وليس بشكل متزايد من  $P_i \leftarrow 0$  كما في حالة التحميل الستاتيكي، وبالتالي تكون معادلة العمل الناتج (2-2).

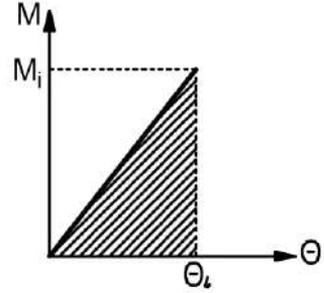
$$W_D = P_d \Delta_i \quad (2-2)$$

• العمل الناتج عن القوى الداخلية:

يدور المقطع تحت تأثير العزم وفقاً للزاوية  $\theta$  وتكون علاقة العزم بالزاوية خطية كما في الشكل (2-2).

وتكون قيمة العمل التفاضلي:

$$dW = \frac{1}{2} M \times d\theta \quad (3-2)$$



الشكل (2-2)

بأخذ الجداء والقسمة على المقدار  $dx$  يكون:

$$dW = \frac{1}{2} M \times \frac{d\theta}{dx} dx \quad (4-2)$$

ولكن:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI} \quad (5-2)$$

حيث  $E$ : معامل المرونة الطولي،  $I$ : عزم العطالة.

بتعويض (5-2) في (4-2):

$$dW = \frac{1}{2} M \times \frac{M}{EI} dx = \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dx \quad (6-2)$$

بإجراء التكامل على طول المحور  $x$ :

$$W_m = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dx \quad (7-2)$$

بنفس الطريقة يتم الحصول على العمل الناتج عن القوة القاطعة:

$$W_v = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{V^2}{GA} dx \quad (7-2)$$

العمل الناتج عن القوة المحورية:

$$W_N = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} dx \quad (8-2)$$

العمل الناتج عن عزم الفتل:

$$W_{m_t} = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{M_t^2}{GI_p} dx \quad (9-2)$$

إل: عزم العطالة الفتلي.

إن عمل القوى الداخلية هو مجموع كل ما سبق.

$$W_{In} = W_m + W_v + W_N + W_{m_t} \quad (10-2)$$

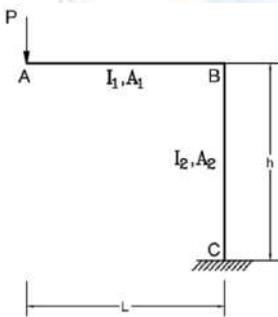
ولكن في أغلب الأحوال يكون عزم الفتل معدوماً ويتم إهمال كل من عمل القوة القاطعة والمحورية بسبب صغرهما بالنسبة إلى عمل عزم الانعطاف في العناصر الجائزية والإطارية فيكون:

$$W_{In} = \sum \int_0^L \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI} dx \quad (11-2)$$

بينما تُسيطر القوى المحورية في المنشآت الشبكية فيكون:

$$W_{In} = \sum \int_0^L \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} dx \quad (12-2)$$

**مثال (1-2):**



الشكل (3-2)

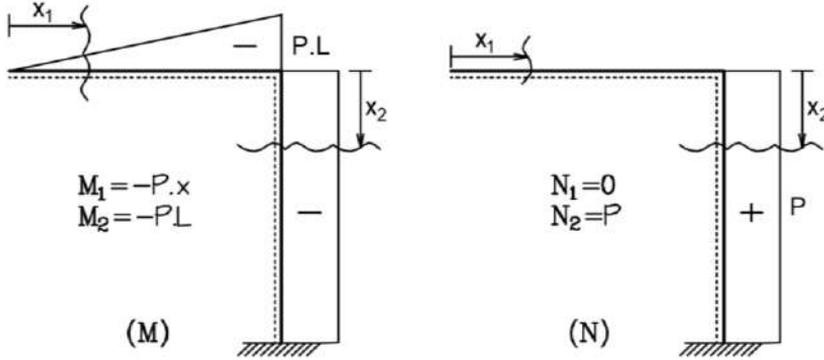
المطلوب إيجاد الانتقال الشاقولي في النقطة A من الإطار المبين بالشكل (3-2) بالاعتماد على مبدأ العمل الافتراضي وذلك بأخذ القوى المحورية بالحسبان.

الحل:

برسم كل من مخطط القوى المحورية وعزم الانعطاف في الإطار يتم الحصول على المخططات المبينة بالشكل (4-2).

ثم يتم حساب العمل الناتج عن تكامل كل من القوى المحورية وعزم الانعطاف وفق المعادلات التالية.

$$W_N = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{N_i^2}{E_i A_i} dx$$



الشكل (4-2)

$$W_N = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{N_i^2}{E_i A_i} dx = \frac{P^2}{2EA_2} \int_0^h dx = \frac{P^2 h}{2EA_2}$$

$$W_M = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{M_i^2}{E_i I_i} dx = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{P^2 x^2}{EI_1} dx + \int_0^h \frac{1}{2} \frac{P^2 L^2}{EI_2} dx$$

$$W_M = \left[ \frac{P^2 x^3}{6EI_1} \right]_0^L + \left[ \frac{P^2 L^2}{2EI_2} x \right]_0^h$$

$$W_M = \frac{P^2 L^3}{6EI_1} + \frac{P^2 L^2 h}{2EI_2}$$

عمل القوى الداخلية:

$$W_{In} = W_N + W_M = \frac{P^2 h}{2EA_2} + \frac{P^2 L^3}{6EI_1} + \frac{P^2 L^2 h}{2EI_2}$$

وعمل القوى الخارجية:

$$W_{Ex} = \frac{1}{2} P \Delta$$

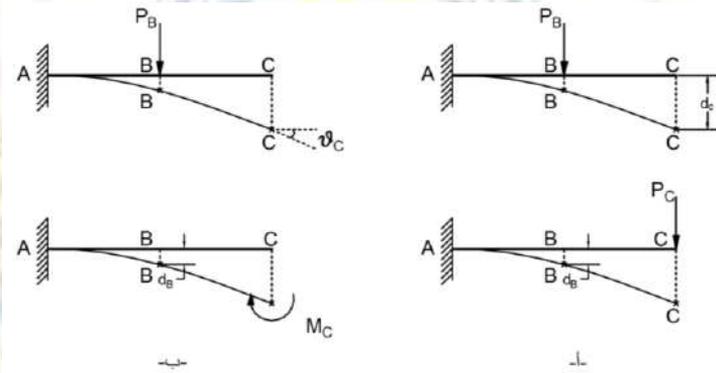
$$W_{Ex} = W_{In}$$

$$\frac{1}{2} P\Delta = \frac{P^2 h}{2EA_2} + \frac{P^2 L^3}{6EI_1} + \frac{P^2 L^2 h}{2EI_2}$$

$$\Delta = \frac{Ph}{EA_2} + \frac{PL^3}{3EI_1} + \frac{PL^2 h}{EI_2}$$

### 3-2 نظرية العمل المتبادل Reciprocal Theorem

تسمى أيضاً نظرية بيتي Betti's Theorem نسبة إلى العالم الإيطالي بيتي. لتوضيح هذه النظرية تتم دراسة الجملة -أ- المبينة بالشكل (5-2) حيث تم تطبيق القوة المركزة  $P_B$  في النقطة B من الجائز الظفري في الحالة الأولى وتم تطبيق القوة المركزة  $P_C$  في النقطة C من الجائز الظفري في الحالة الثانية. إنَّ العمل الناتج عن القوة  $P_B$  وفق الانتقال  $d_B$  يساوي إلى العمل الناتج عن القوة  $P_C$  وفق الانتقال  $d_C$ .



الشكل (5-2) نظرية العمل المتبادل

$$P_B \cdot d_B = P_C \cdot d_C \quad (13-2)$$

أي إنَّ العمل الذي تبذله القوى الخارجية (أو الداخلية) في حالة التحميل الأولى وفق انتقالات حالة التحميل الثانية يساوي إلى العمل الذي تبذله القوى في حالة التحميل الثانية وفق انتقالات حالة التحميل الأولى. يمكن تطبيق نفس المبدأ على العزوم وزوايا الدوران الموافقة لها، الجملة -ب- من الشكل (5-2). عند تطبيق الحمولة  $P_B$  في النقطة B يحصل دوران في C قدره  $\theta_C$ ، وعند تطبيق العزم  $M_C$  في النقطة C يحصل انتقال في B قدره  $d_B$ . إنَّ العمل الناتج عن القوة  $P_B$  وفق الانتقال  $d_B$  يساوي إلى العمل الناتج عن العزم  $M_C$  وفق الدوران  $\theta_C$ .

$$P_B \cdot d_B = M_C \cdot \theta_C \quad (14-2)$$

بالتعميم:

$$M_B \cdot \theta_B = M_C \cdot \theta_C \quad (15-2)$$

برهان النظرية:

للبرهان على هذه النظرية تتم دراسة الجائز البسيط المبين بالشكل (6-2)، وهو محمل في الحالة الأولى بحمولة مركزة  $P_i$  في النقطة  $i$ ، ومحمل في الحالة الثانية بحمولة مركزة  $P_j$  في النقطة  $j$  حيث:

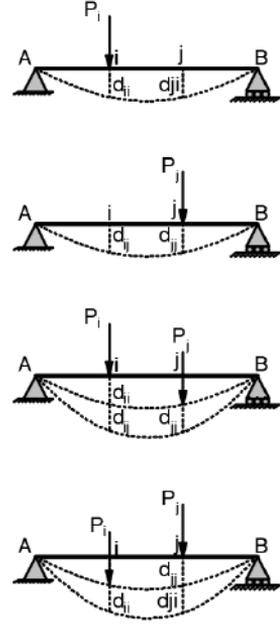
$d_{ii}$ : الانتقال الناتج عن القوة  $P_i$  في النقطة  $i$

$d_{ji}$ : الانتقال الناتج عن القوة  $P_i$  في النقطة  $j$

$d_{ij}$ : الانتقال الناتج عن القوة  $P_j$  في النقطة  $i$

$d_{jj}$ : الانتقال الناتج عن القوة  $P_j$  في النقطة  $j$

تسمى  $d_{ii}$ ،  $d_{jj}$  الانتقالات الرئيسية وتسمى  $d_{ji}$ ،  $d_{ij}$  الانتقالات الثانوية.



الشكل (6-2)

1- يتم تطبيق القوة  $P_i$  إلى أن يتشوه الجائز ثم يتم تطبيق

القوة  $P_j$ ، وبالتالي يكون العمل الذي تقوم به القوى الخارجية:

$$W_i = W_{ii} + W_{jj} + W_{ij} \quad (16-2)$$

إنّ عمل القوة  $P_i$  في انتقالها الخاص  $d_{ii}$  يساوي  $W_{ii} = P_i \cdot \frac{d_{ii}}{2}$

وعمل القوة  $P_j$  في انتقالها الخاص  $d_{jj}$  يساوي  $W_{jj} = P_j \cdot \frac{d_{jj}}{2}$

وعمل القوة  $P_i$  في الانتقال  $d_{ij}$  الناتج عن القوة  $P_j$  يساوي  $W_{ij} = P_i \cdot d_{ij}$

يختفي المقدار  $\frac{1}{2}$  عند حساب  $W_{ij}$  لأنّ القوة  $P_i$  في هذه الحالة لم تطبق من الصفر؛ وإنما كانت موجودة سلفاً، أي إنها بقيت ثابتة.

ويكون العمل الكلي الذي تبذله القوى الخارجية في طريقة التحميل الأولى:

$$W_i = P_i \cdot \frac{d_{ii}}{2} + P_j \cdot \frac{d_{jj}}{2} + P_i \cdot d_{ij} \quad (17-2)$$

2- بتحميل الجائز بالقوى ذاتها ولكن بتتابع معاكس، أي بتطبيق القوة  $P_j$  ثم القوة  $P_i$ :

يكون العمل الذي تبذله القوة  $P_j$  في انتقالها الخاص  $d_{jj}$  مساوياً  $W_{jj} = P_j \cdot \frac{d_{jj}}{2}$ .

والعمل الذي تبذله القوة  $P_j$  في الانتقال  $d_{ji}$  مساوياً  $W_{ji} = P_j \cdot d_{ji}$

فيكون العمل الكلي:

$$W_i = W_{ii} + W_{jj} + W_{ji} \quad (18-2)$$

$$W_j = P_i \cdot \frac{d_{ii}}{2} + P_j \cdot \frac{d_{jj}}{2} + P_j \cdot d_{ji} \quad (19-2)$$

في الحقيقة لا يوجد فرق بين طريقتي التحميل لذلك يجب ألا يكون هناك فرق بين العملين  $W_i$ ،  $W_j$  أي:

$$W_i = W_j \quad (20-2)$$

$$P_i \cdot \frac{d_{ii}}{2} + P_j \cdot \frac{d_{jj}}{2} + P_i \cdot d_{ij} = P_i \cdot \frac{d_{ii}}{2} + P_j \cdot \frac{d_{jj}}{2} + P_j \cdot d_{ji}$$

$$P_i \cdot d_{ij} = P_j \cdot d_{ji} \quad (21-2)$$

وهذا يعني أن الانتقال الحاصل في المقطع أ والناتج عن تطبيق قوة في المقطع ز يساوي إلى الانتقال الحاصل في المقطع ز والناتج عن تطبيق قوة في المقطع أ.

## 4-2 نظرية ماكسويل التبادلية

### Maxwell's Theorem of Reciprocal Displacement

إن قانون ماكسويل ما هو إلا نتيجة من نتائج نظرية بيتي. فبافتراض كون القوى في الحالة الأولى والثانية مساوية للواحد  $P_i = P_j = 1$  تصبح العلاقة (21-2) كما يلي:

$$d_{ij} = d_{ji} \quad (22-2)$$

• **وُصاغ نظرية ماكسويل كما يلي:**

إن الانتقال الذي ينتج في نقطة ما أ من المنشأ بسبب تطبيق قوة واحدة في أية نقطة أخرى ز من المنشأ يساوي إلى الانتقال الذي ينتج في النقطة أ بسبب تطبيق قوة واحدة في النقطة ز.

## 5-2 طريقة القوة الواحدة Unit Load Method

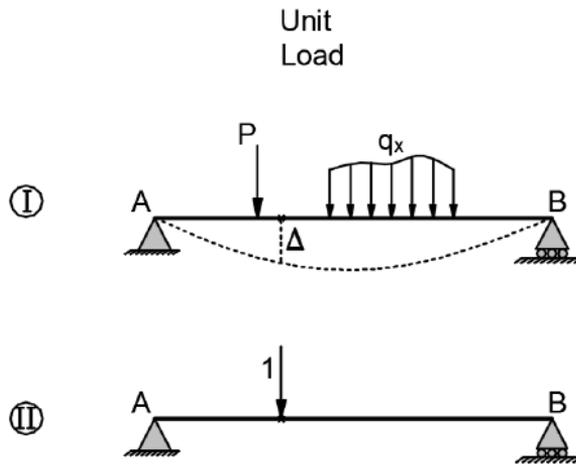
إن طريقة القوة الواحدة عبارة عن تقنية واسعة الانتشار من أجل حساب الانتقالات في الجمل الإنشائية. يمكن تطبيق هذه الطريقة نظرياً على الجمل المقررة وغير المقررة ستاتيكيًا؛ لأن استخدامها يتطلب كون

محصلة الإجهاد معلومة ضمن الجملة الإنشائية. تعرف أيضاً بطريقة العمل الافتراضي Virtual Work أو طريقة مور Mohr.

يُفترض كون مادة المنشأ مرنة خطياً Linearly Elastic وكون الانتقالات الناشئة صغيرة جداً من أجل صحة تطبيق هذه الطريقة. يمكن تطبيق هذه الطريقة على الجمل الإنشائية الجائزية والشبكية والإطارية على حدٍ سواء.

عند تطبيق طريقة القوة الواحدة يفترض وجود جملة مساعدة للجملة الإنشائية الأصلية، وهي عبارة عن هيكل الجملة الأصلية محملاً بحمولة واحدة وموافقة للإزاحة المطلوب حسابها في المنشأ. إنَّ هذه القوة الافتراضية وجدت لأغراض الحساب فقط.

إنَّ الإزاحة المفروض حسابها قد تكون عبارة عن انتقالٍ أفقيٍّ أو شاقوليٍّ أو دورانٍ أو الانتقال والدوران معاً. إذا كانت الإزاحة دورانياً، فإنَّ الجملة المساعدة تحمّل بعزمٍ واحدٍ اتجاهه الموجب هو نفس اتجاه الدوران الموجب.



الشكل (7-2) نظرية القوة الواحدة

## 1-5-2 العمل الداخلي والخارجي:

يُعطى العمل الخارجي بالمعادلة (23-2) وذلك بتطبيق نظرية بيتي حيث تؤخذ القوة من الجملة (II) المساعدة، بينما يؤخذ الانتقال الموافق من الجملة (I) الأساسية، الشكل (7-2).

$$W_{Ex} = \frac{1}{2}(1 \times \Delta) \quad (23-2)$$

بينما يُعطى العمل الداخلي بالمعادلة (24-2):

$$W_{in} = \frac{1}{2} \int n d\Delta + \int m d\theta + \int v d\chi + \int m_t d\phi \quad (24-2)$$

$n, m, v, m_t$ : القوى الداخلية الناتجة عن الحمولة الواحدية في الجملة المساعدة.  
 $d\Delta, d\theta, d\chi, d\phi$ : الانفعالات الحقيقية (محورية، انعطاف، قص، فتل) تحت تأثير الأحمال الحقيقية في الجملة الأساسية.

بمساواة العمل الخارجي مع العمل الداخلي:

$$\Delta = \int n d\Delta + \int m d\theta + \int v d\chi + \int m_t d\phi \quad (25-2)$$

من المعلوم من علم مقاومة المواد أن:

$$d\Delta = \frac{N}{EA} dx$$

$$d\theta = \frac{M}{EI} dx$$

$$d\chi = \frac{V}{GA} dx$$

$$d\phi = \frac{M_t}{GJ} dx$$

(26-2)

$N, M, V, M_t$ : القوى الداخلية الناتجة عن الأحمال الحقيقية في الجملة الأساسية.

$G$ : معامل المرونة العرضاني.

$J$ : عزم العطالة القطبي.

بتعويض المعادلات (26-2) في المعادلات (25-2) يتم الحصول على المعادلة العامة لطريقة القوة الواحدية:

$$\Delta = \int n \frac{N}{EA} dx + \int m \frac{M}{EI} dx + \int v \frac{V}{GA} dx + \int m_t \frac{M_t}{GI_p} dx \quad (27-2)$$

وتكون خطوات العمل بطريقة القوة الواحدية:

- إيجاد القوى الداخلية في الجائز الحقيقي تحت تأثير الأحمال الحقيقية.
- تطبيق قوة واحدية مكان الانتقال المفروض وفق الاتجاه الموجب له (أو عزم واحدي في حال الدوران).
- إيجاد القوى الداخلية في الجملة المساعدة تحت تأثير القوة الواحدية أو العزم الواحدي.

- تطبيق المعادلة (27-2) وحساب الانتقال.

### ملاحظة:

إنّ الحدود المتعلقة بالقوة المحورية والقاطعة وعزم الفتل لا تؤخذ بالحسبان في الجمل الانعطافية، ذلك لأنّ عزم الانعطاف يسيطر وعزم الفتل وجوده أقل في الواقع. بينما في الجمل الشبكية فيكتفى بالقوة المحورية وبالتالي يكفي حساب حد واحد في كل مسألة.

من أجل جمل انعطافية:

$$\Delta = \sum \int_0^{L_i} \frac{M.m}{EI} dx \quad (28-2)$$

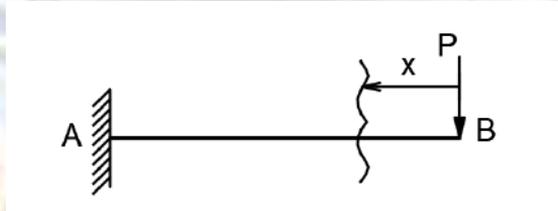
من أجل جمل شبكية:

$$\Delta = \sum \int_0^{L_i} \frac{N.n}{EA} dx = \sum \frac{N.n}{EA} L \quad (29-2)$$

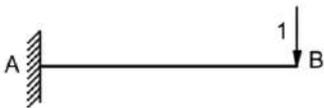
يكون حاصل جداء الجهود  $M.m$  و  $N.n$  موجباً إذا كان المقداران متماثلين بالإشارة (موجباً أو سالباً) ويكون سالباً إذا كانا مختلفين بالإشارة.

### مثال (2-2):

أوجد الانتقال الشاقولي والدوران في الظفر المبين بالشكل (8-2) بطريقة القوة الواحدية:



الشكل (8-2)



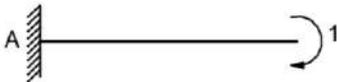
- معادلة عزم الانعطاف تحت تأثير الحمولة الحقيقية:

$$M = -P.x$$

- معادلة عزم الانعطاف تحت تأثير القوة الواحدية:

$$M = -x$$

- الانتقال في النقطة B:



$$\Delta_B = \int_0^L \frac{(-Px)(-x)}{EI} dx = \frac{PL^3}{3EI}$$

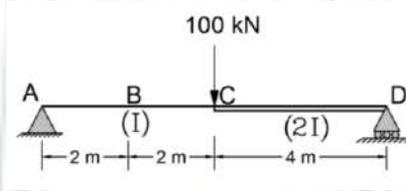
• معادلة عزم الانعطاف تحت تأثير العزم الواحد:

$$M = -1$$

$$\theta_B = \int_0^L \frac{(-Px)(-1)}{EI} dx = \frac{PL^2}{2EI} \quad \bullet \text{ الدوران في النقطة B:}$$

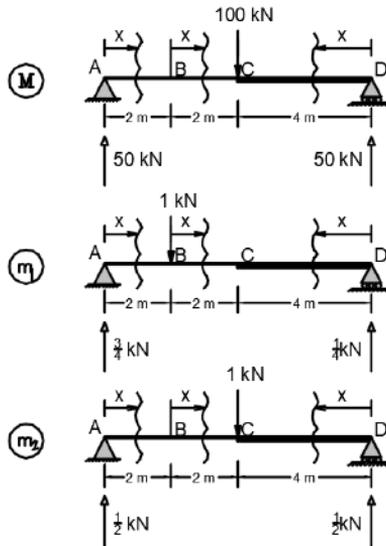
**مثال (2-3):**

أوجد الانتقال الشاقولي في النقطة B وفي النقطة C من الجائر المبين بالشكل (2-9).



الشكل (2-9)

لإيجاد الانتقال في B يتم تطبيق قوة واحدة في B بعد رفع الأحمال الموجودة، كما في الجملة  $m_1$ ، ولإيجاد الانتقال في C يتم تطبيق قوة واحدة في C، كما في الجملة  $m_2$ . وتكون معادلات العزم الخاصة بالجملة الثلاث موضحة في الجدول (2-1).



الشكل (2-10)

الجدول (1-2)

$m_2$	$m_1$	M	EI	حدود x	المجال
$M = \frac{1}{2}x$	$M = \frac{3}{4}x$	$M = 50x$	EI	$0 \rightarrow 2$	من AB اليسار
$M = \frac{1}{2}(x+2)$	$M = \frac{3}{4}(x+2) - x$	$M = 50(x+2)$	EI	$0 \rightarrow 2$	من BC اليسار
$M = \frac{1}{2}x$	$M = \frac{1}{4}x$	$M = 50x$	2EI	$0 \rightarrow 4$	من CD اليمين

بتعويض معادلات العزم في معادلة القوة الواحدية (2-28):

• الانتقال الشاقولي في B:

$$\Delta_B = \int_0^2 \frac{37.5}{EI} x^2 dx + \int_0^2 \frac{(150 + 50x - 12.5x^2)}{EI} dx + \int_0^4 \frac{6.25}{EI} x^2 dx$$

$$\Delta_B = \frac{1}{EI} \left\{ \left[ \frac{37.5x^3}{3} \right]_0^2 + \left[ \left( 150x + 25x^2 - 12.5 \frac{x^3}{3} \right) \right]_0^2 + \left[ \frac{6.25x^3}{3} \right]_0^4 \right\}$$

$$\Delta_B = \frac{600}{EI}$$

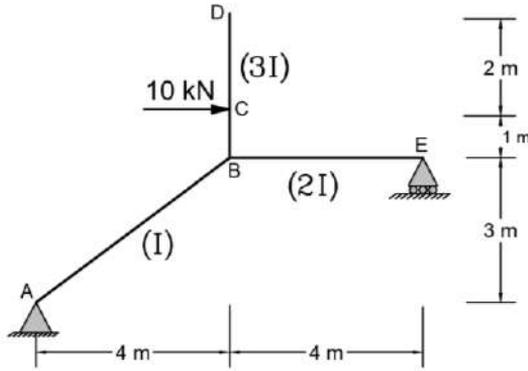
$$\Delta_C = \int_0^2 \frac{25}{EI} x^2 dx + \int_0^2 \frac{(100 + 100x - 25x^2)}{EI} dx + \int_0^4 \frac{12.5}{EI} x^2 dx$$

$$\Delta_C = \frac{1}{EI} \left\{ \left[ \frac{100x^3}{3} \right]_0^2 + \left[ \left( 100x + 50x^2 - 25 \frac{x^3}{3} \right) \right]_0^2 + \left[ \frac{12.5x^3}{3} \right]_0^4 \right\}$$

$$\Delta_C = \frac{800}{EI}$$

مثال (2-4):

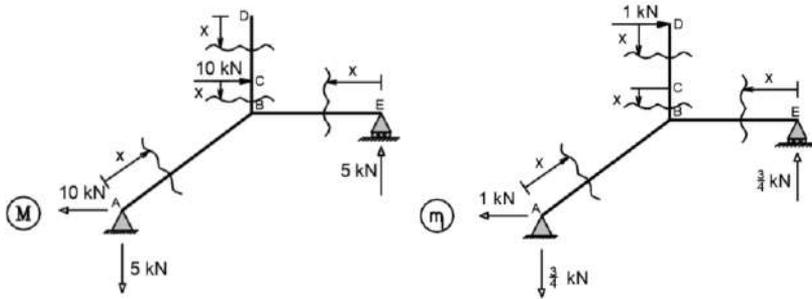
أوجد الانتقال الأفقي في النقطة D والانتقال الشاقولي والدوران في النقطة B، من المنشأ المبين بالشكل (2-11).



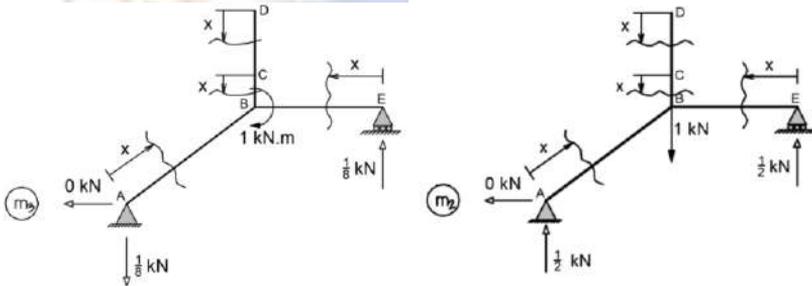
الشكل (11-2)

لإيجاد الانتقالات المطلوبة يتم الاستعانة بثلاث جمل مساعدة:

- جملة تطبق فيها قوة واحدة أفقية في D.
- جملة تطبق فيها قوة واحدة شاقولية في B.
- عزم واحد في النقطة B.



الشكل (12-2)

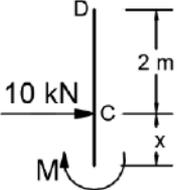
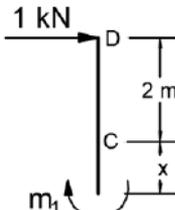
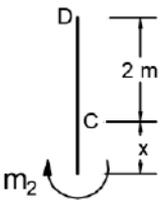
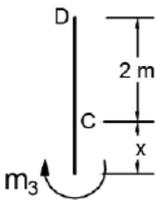
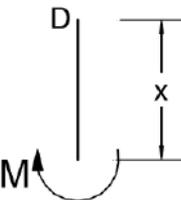


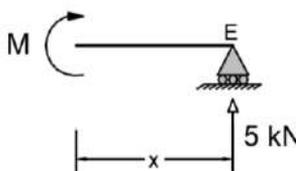
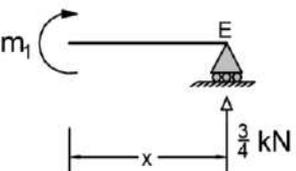
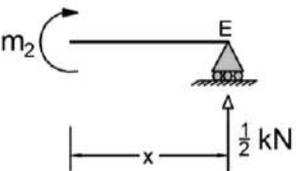
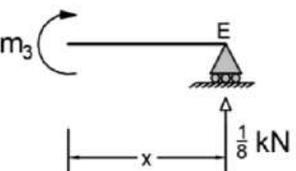
الشكل (13-2)

وتكون معادلات العزوم كما في الجدول (2-2):

الجدول (2-2)

المجال AB		
	$M = 10x \sin \theta - 5x \cos \theta$ $= 10x \frac{3}{5} - 5x \frac{4}{5} = 2x$	M
	$m_1 = 1 \cdot x \frac{3}{5} - \frac{3}{4} x \frac{4}{5} = 0$	$m_1$
	$m_2 = \frac{1}{2} x \frac{4}{5} = 0.4x$	$m_2$
	$m_3 = -\frac{1}{8} x \frac{4}{5} = -0.1x$	$m_3$

المجال BC		
	$M = -10x$	M
	$m_1 = -(2 + x)$	$m_1$
	$m_2 = 0$	$m_2$
	$m_3 = 0$	$m_3$
المجال CD		
	$M = 0$ وبالتالي لا داع لحساب بقية المعادلات	M

المجال BE		
	$M = 5x$	M
	$m_1 = \frac{3}{4}x$	$m_1$
	$m_2 = \frac{1}{2}x$	$m_2$
	$m_3 = \frac{1}{8}x$	$m_3$

ويكون الانتقال الأفقي في النقطة D:

$$\Delta_{D_h} = \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^1 \frac{(-10x)(-2-x)}{3} dx + 0 + \int_0^4 \frac{\left(5x \frac{3}{4}x\right)}{2} dx \right\} = \frac{44.4}{EI}$$

والانتقال الشاقولي في النقطة B:

$$\Delta_{B_v} = \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^5 \frac{(2x)\left(\frac{2}{5}x\right)}{1} dx + 0 + 0 + \int_0^4 \frac{\left(5x \frac{x}{2}\right)}{2} dx \right\} = \frac{60}{EI}$$

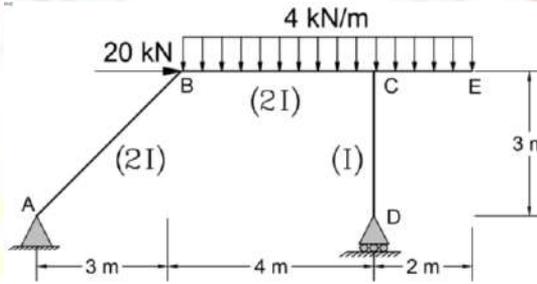
والدوران في النقطة B:

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^5 \frac{(2x) \left( -\frac{x}{10} \right)}{1} dx + 0 + 0 + \int_0^4 \frac{\left( 5x \frac{x}{8} \right)}{2} dx \right\} = -\frac{1.67}{EI}$$

تعني الإشارة السالبة أن اتجاه زاوية دوران  $\theta$  يعاكس اتجاه دوران العزم الواحدي المفروض.

### مثال (2-5):

أوجد الدوران في النقطة A من المنشأ المبين بالشكل (14-2) بالاعتماد على طريقة القوة الواحدة.

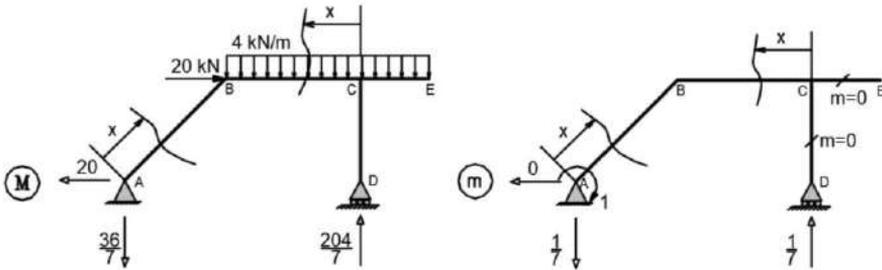


الشكل (14-2)

ردود الأفعال في الجملة الأساسية:

$$+\uparrow: \sum F_y = 0 \Rightarrow R_A = \frac{-36}{7} \downarrow \quad +\curvearrowleft: \sum M_A = 0 \Rightarrow R_D = \frac{204}{7} \uparrow$$

$$+\rightarrow: \sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = -20 \leftarrow$$



الشكل (15-2)

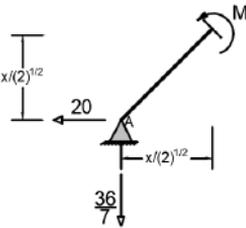
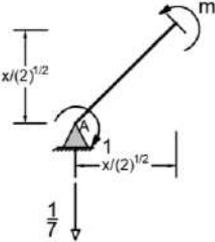
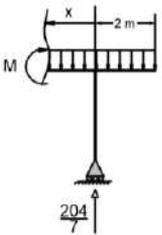
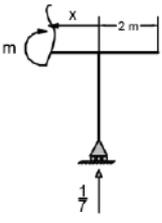
ردود الأفعال في الجملة المساعدة:

$$+\uparrow: \sum F_y = 0 \Rightarrow R_A = \frac{1}{7} \downarrow \quad +\curvearrowleft: \sum M_A = 0 \Rightarrow R_D = \frac{1}{7} \uparrow$$

$$+\rightarrow: \sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

وتكون معادلات العزوم كما في الجدول (3-2):

الجدول (3-2)

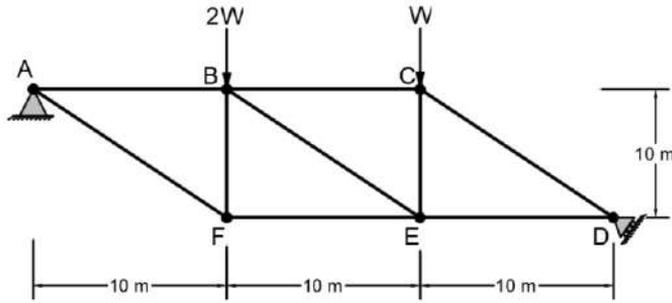
المجال AB : $0 \rightarrow 3\sqrt{2}$ : $3EI$		
	$M = 20 \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{36}{7\sqrt{2}} x$ $= \frac{104}{7\sqrt{2}} x$	M
	$m = 1 - \frac{x}{7\sqrt{2}}$	m
المجال BC : $0 \rightarrow 4$ : $2EI$		
	$M = -2(x+2)^2 + \frac{204}{7} x$	M
	$m = \frac{x}{7}$	m

$$\theta_A = \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^{3\sqrt{2}} \frac{\left(\frac{104}{7\sqrt{2}}x\right)\left(1 - \frac{x}{7\sqrt{2}}\right)}{3} dx + 0 + 0 + \int_0^4 \frac{\left(-2(x+2)^2 + \frac{204}{7}x\right)\frac{x}{7}}{2} dx \right\}$$

$$\theta_A = \frac{41.053}{EI}$$

مثال (2-6):

أوجد الانتقال في النقطة D من المنشأ المبين بالشكل (2-16) علماً بأن  $A = 2700\text{mm}^2$  و معامل المرونة الطولاني  $E = 200\text{kN/mm}^2$  ، إذا كان الانتقال في D هو 50mm أوجد W.



الشكل (2-16)

إنّ الانتقال في D يحدث في اتجاه السطح الذي يتحرك عليه المسند البسيط Roller. الجملة الأساسية:

$$+\circlearrowleft: \sum M_A = 0 \Rightarrow R_D = 2\sqrt{2}W$$

$$+\uparrow: \sum F_y = 0 \Rightarrow R_A = W \uparrow$$

$$+\rightarrow: \sum F_x = 0 \Rightarrow H_A = 2W \rightarrow$$

حساب القوى المحورية في العناصر بطريقة العقد:

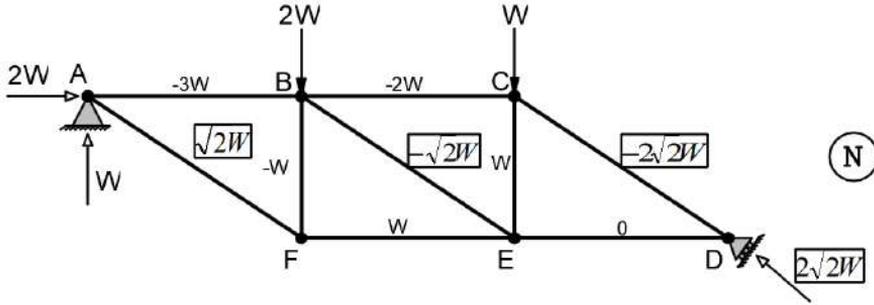
العقدة A:

$$+\rightarrow: \sum F_x = 0 \Rightarrow AB = -3W \quad +\uparrow: \sum F_y = 0 \Rightarrow AF = \sqrt{2}W$$

العقدة B:

$$+\rightarrow: \sum F_x = 0 \Rightarrow FE = W \quad +\uparrow: \sum F_y = 0 \Rightarrow FB = -W$$

وهكذا يتم الحساب لبقية العقد الشكل (17-2).



الشكل (17-2)

الجملة المساعدة:

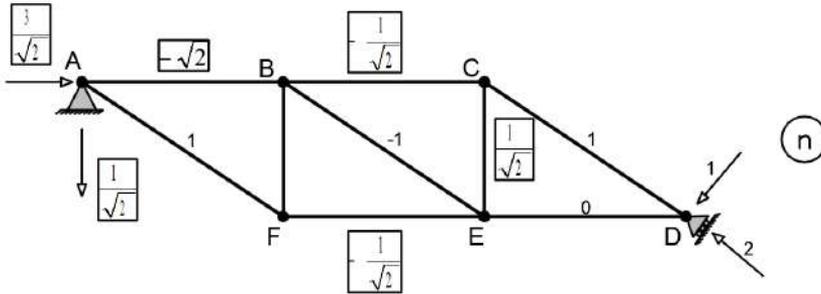
$$+\circlearrowleft: \sum M_D = 0 \Rightarrow 10H_A - \frac{1}{\sqrt{2}} 30 \Rightarrow H_A = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

من أجل القوى الداخلية في العناصر، تلخص النتائج في الجدول (4-2).

$$\Delta = \sum \int_0^L \frac{N.n}{EA} dx = \sum \frac{N.n}{EA} L = \frac{89.497(W)}{2700 \times 200} = 1.657 \times 10^{-4} W$$

من أجل انتقال يساوي 50mm:

$$50 \times 10^{-3} = 1.657 \times 10^{-4} W \Rightarrow W = 301.75 \text{ kN}$$



الشكل (18-2)

الجدول (4-2)

N.n.L	n(kN)	N(kN)	L(m)	العنصر
$30\sqrt{2}W$	$-\sqrt{2}$	$-3W$	10	AB

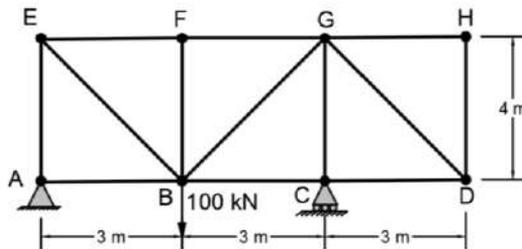
$20W / \sqrt{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-2W$	10	BC
$40W$	-1	$-2\sqrt{2}W$	$10\sqrt{2}$	CD
$10W / \sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$W$	10	CE
$20W$	-1	$-\sqrt{2}W$	$10\sqrt{2}$	BE
$-10W / \sqrt{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$W$	10	FE
$-10W / \sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-W$	10	BF
$-20W$	-1	$\sqrt{2}W$	$10\sqrt{2}$	AF
-	-	-	-	DE
$\sum = 89.497kN$				

مثال (7-2):

أوجد الانتقال الشاقولي في B والانتقال الشاقولي في D من المنشأ المبين بالشكل (19-2)، علماً بأن معامل المرونة الطولاني لجميع العناصر  $E = 2 \times 10^4 kN / cm^2$  ومساحات العناصر معطية بالجدول.

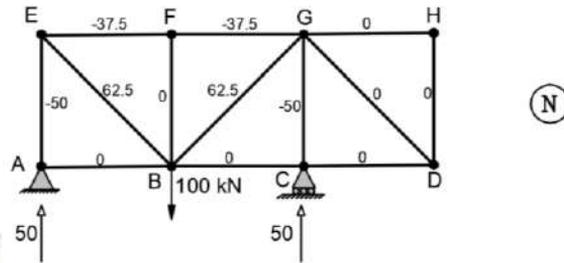
الجدول (5-2)

العنصر	المساحة $cm^2$
أفقي Horizontal	6
شاقولي Vertical	4
قطري Diagonal	10



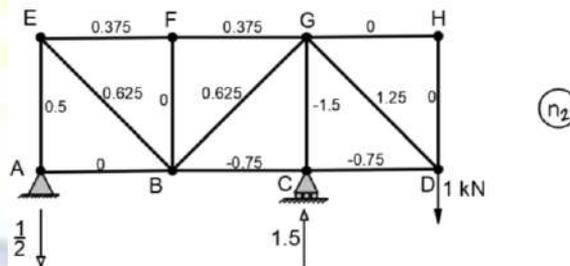
الشكل (19-2)

بحساب ردود الأفعال والقوى في العناصر في الجملة الأساسية يتم الحصول على النتائج في الشكل (20-2)  
:(2)



الشكل (20-2)

في المنشأ الأصلي توجد قوة واحدة في النقطة B وبالتالي لإيجاد الانتقال الشاقولي في B يتم الحصول على قيم الجملة المساعدة  $n_1$  بقسمة قيم الجملة N على قيمة القوة. بينما نتائج الجملة  $n_2$  من أجل الانتقال الشاقولي في D فهي موضحة في الشكل (21-2) وتلخص نتائجها في الجدول (7-2).



الشكل (21-2)

الجدول (6-2)

N.n <sub>1</sub> .L	n <sub>1</sub> (kN)	N(kN)	A (cm <sup>2</sup> )	L (cm)	العنصر
2500	-1/2	-50	4	400	AE
1953.125	0.625	62.5	10	500	EB
703.125	-0.375	-37.5	6	300	EF
703.125	-0.375	-37.5	6	300	FG
19530125	0.625	62.5	10	500	BG
2500	-1/2	-50	4	400	GC
$\Sigma = 103125$					

$$\Delta_B = \sum \int_0^{L_i} \frac{N.n_1}{EA} dx = \sum \frac{N.n_1}{EA} L = \frac{103125}{2 \times 10^4} = 0.5156 \text{ cm} = 5.156 \text{ mm}$$

(الجدول (7-2))

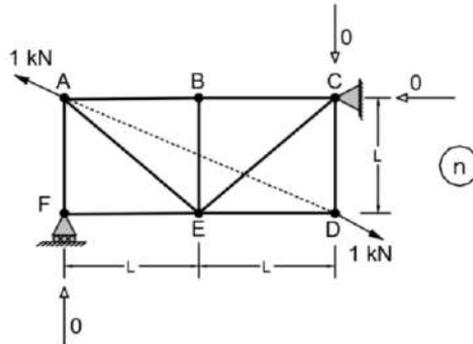
N.n <sub>2</sub> .L	n <sub>2</sub> (kN)	N(kN)	A (cm <sup>2</sup> )	L (cm)	العنصر
-2500	0.5	-50	4	400	AE
-1953.125	-0.625	62.5	10	500	EB
-703.125	0.375	-37.5	6	300	EF
-703.125	0.375	-37.5	6	300	FG
1953.125	-0.625	62.5	10	500	BG
7500	-1.5	-50	4	400	GC
$\Sigma = -3593.75$					

$$\Delta_D = \sum \int_0^{L_i} \frac{N.n_2}{EA} dx = \sum \frac{N.n_2}{EA} L = \frac{3593.15}{2 \times 10^4} = 0.1796 \text{ cm} = 1.796 \text{ mm}$$

## 2-5-2 طريقة القوة الواحدة في الجمل الشبكية

### • الانتقال النسبي Relative Translation:

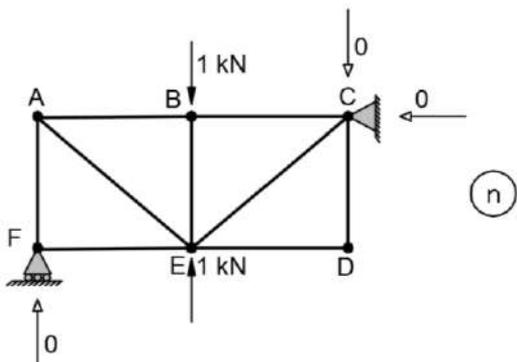
إذا طُلب حساب الانتقال النسبي بين نقطتين من جملة شبكية ما، فإنه يتم تطبيق قوتين واحدتين في النقطتين المدروستين محمولتين على الخط الواصل بين النقطتين وباتجاهين متعاكسين.



الشكل (22-2)

فمثلاً لحساب الانتقال النسبي بين D و A في المنشأ المبين بالشكل (22-2)، فإنه يتم تطبيق القوتين  
الواحديتين كما هو موضح وتتم المتابعة كما في السابق. في هذه الحالة تكون ردود الأفعال معدومة لأن  
القوى ملتقية ومتعاكسة.

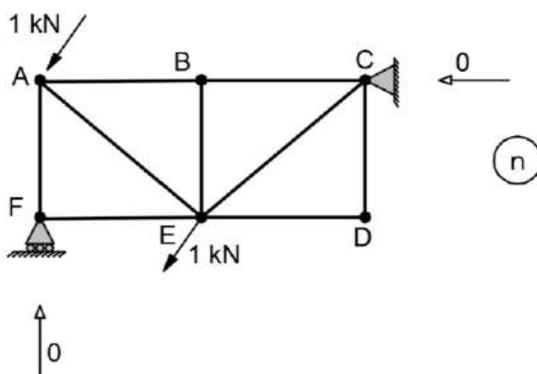
بينما لحساب الانتقال النسبي بين E و B يتم تطبيق القوتين الواحديتين كما في الشكل (23-2).



الشكل (23-2)

#### • الدوران النسبي Relative Rotation:

إذا أُريدَ حساب الدوران النسبي بين نقطتين، يتم تطبيق قوتين واحديتين تشكلان مزدوجة عزم (عموديتين  
على الضلع الواصل بينهما ومتعاكستين بالجهة) ويكون الدوران النسبي مساوياً إلى الانتقال مقسوماً على  
طول العنصر.



الشكل (24-2)

فمثلاً لإيجاد الدوران النسبي للعنصر AE من الشكل (24-2) بشكلٍ معامدٍ للعنصر AE ويكون:

$$\theta_{AE} = \frac{\Delta_{AE}}{L_{AE}} \quad (30-2)$$

### 2-5-3 التأثيرات الخارجية:

#### • التغيرات الحرارية المنتظمة Uniform Temperature Changes:

عندما يكون هناك زيادة أو نقصان في درجة الحرارة بشكل منتظم Uniform في أحد العناصر أو أكثر، عندئذ يحصل انتقال في العنصر أو العناصر /تطاول أو تقاصر/ ولحساب هذا الانتقال يتم اتباع المعادلات التالية:

$$\Delta = \int n.d\Delta \quad (31-2)$$

من أجل التغيرات الحرارية المنتظمة يكون:

$$d\Delta = \alpha.\Delta t.dx \quad (32-2)$$

بتعويض المعادلة (32-2) في المعادلة (31-2):

$$\Delta = \sum n.\alpha.\Delta t.L \quad (33-2)$$

#### • عيوب التصنيع Fabrication Errors:

قد يكون هناك عيب في تصنيع عنصر أو أكثر فيكون أطول أو أقصر من اللازم بالمقدار  $e$  مثلاً، وهذا لا يؤثر على بقية الجملة، عندها لحساب الانتقال الناتج عن هذا السبب في نقطة ما نستخدم المعادلة (2-34):

$$\Delta = \sum n.\Delta L \quad (34-2)$$

ولكن:

$$\Delta L = e \quad (35-2)$$

فيكون:

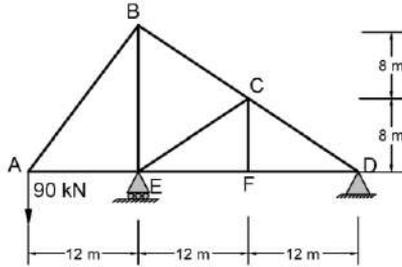
$$\Delta = \sum n.e \quad (36-2)$$

#### مثال (2-8):

بالاعتماد على طريقة القوة الواحدية، أوجد ما يلي من أجل المنشأ المبين بالشكل (2-25).

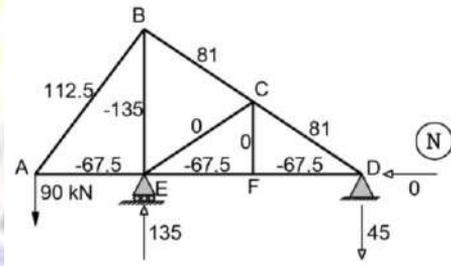
1. الانتقال النسبي بين النقطتين B، E حيث  $L/A=2$  لجميع العناصر، وأوجد الدوران النسبي بين النقطتين A، B (أي دوران العنصر AB).

2. أعد الطلبات في حال حصول انخفاض في درجة الحرارة قدره  $50^{\circ}\text{C}$  في القضبان السفلية.
3. أعد الطلبات في حال حصول عيوب في التصنيع في العنصر BC بحيث توجد زيادة في طول العنصر قدرها 3mm، وفي العنصر BA بحيث يحصل نقصان في الطول قدره 2mm.



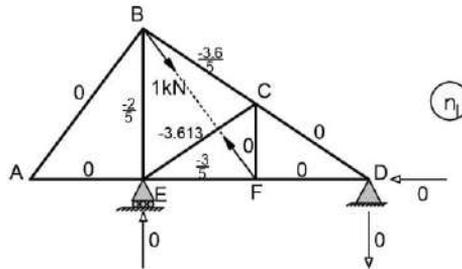
الشكل (25-2)

1. بحساب ردود الأفعال والقوى المحورية في الجملة تحت تأثير الحمولة الأصلية 90kN يتم الحصول على النتائج الموضحة في الشكل (25-2).



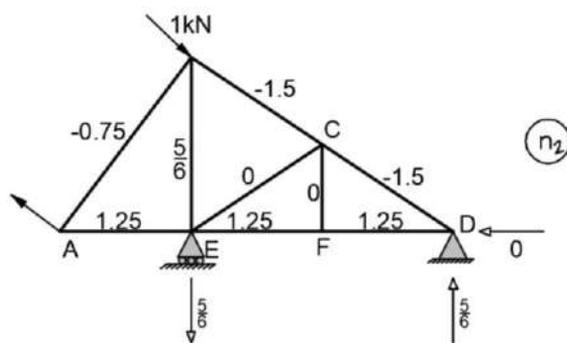
الشكل (25-2)

- لحساب الانتقال النسبي بين النقطتين B، E يتم تطبيق قوتين واحدتين متعاكستين محمولتين على المستقيم BE ويتم الحصول بذلك على الجملة المساعدة الأولى، وتكون قيم القوى في العناصر كما هو مبين بالشكل (26-2).



الشكل (26-2)

يتم الحصول على الجملة المساعدة الثانية بتطبيق قوتي مزدوجة واحديتين في النقطة A والنقطة B ، حيث تكون نتائج القوى في العناصر كما هو مبيّن بالشكل (27-2).



الشكل (27-2)

تُلخص النتائج في الجدول (8-2):

الجدول (8-2)

$N.n_2$	$N.n_1$	$n_2(kN)$	$n_1(kN)$	$N(kN)$	العنصر
-84.375	0	1.25	0	-67.5	AE
-84.375	40.5	1.25	$-\frac{3}{5}$	-67.5	EF
-84.375	0	1.25	0	-67.5	FD
-84.375	0	-0.75	0	112.5	AB
-122.5	54	$\frac{5}{6}$	$-\frac{2}{5}$	-135	EB
0	0	0	$\frac{3.6}{5}$	0	EC
0	0	0	$-\frac{4}{5}$	0	FC
-121.5	0	-1.5	0	81	CD
-121.5	-58.32	-1.5	$\frac{3.6}{5}$	81	CB
$\sum = -693$	$\sum = 36.18$				

ويكون الانتقال النسبي  $\Delta_{BE}$  :

$$\Delta_{BE} = \sum \frac{N.n_1}{EA} L = \frac{L}{EA} \sum N.n_1 = \frac{36.18 \times 2}{E} = \frac{72.36}{E}$$

والدوران النسبي  $\theta_{AB}$  :

$$\theta_{AB} = \frac{\sum \frac{N.n_2}{EA} L}{L_{AB}} = \frac{L}{EA} \sum N.n_2 = \frac{-693 \times 2}{20E} = \frac{-69.3}{E} \text{ rad}$$

2. حالة وجود تغيّرات حرارية:

إنّ التغيّرات الحرارية تحصل فقط في العناصر AE، EF، FD وبالتالي يتم أخذها هي فقط بالحسبان، ويتم استخدام المعادلة (2-33) للحصول على الانتقال النسبي، حيث  $L=12$  في العناصر الثلاث.

الجدول (2-9)

العنصر	$n_1(\text{kN})$	$n_2(\text{kN})$	$N.n_1$	$N.n_2$
AE	0	1.25	0	15
EF	$-\frac{3}{5}$	1.25	-9	15
FD	0	1.25	0	15
			$\sum = -9$	$\sum = 45$

$$\Delta_{BE} = \alpha.\Delta t \sum n_1.L = \alpha \times 50 \times (-9) = 450\alpha$$

بينما للحصول على الدوران النسبي يتم استخدام المعادلة (2-30).

$$\theta_{AB} = \frac{\alpha.\Delta t \sum n_2.L}{L_{AB}} = \frac{\alpha.50.45}{20} = 112.5\alpha$$

3. حالة عيوب التصنيع:

إنّ العناصر التي حصل فيها الخطأ هي AB، BC لذلك تُؤخذ فقط بالحسبان.

$$\Delta_{BE} = \sum e.n_1 = -2.16\text{mm}$$

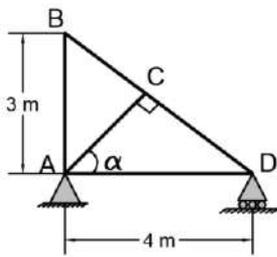
$$\theta_{AB} = \frac{\sum e.n_2}{L_{AB}} = \frac{-3}{20}$$

وهي سالبة أي أنها عكس عقارب الساعة.

الجدول (10-2)

العنصر	e	$n_1$ (kN)	$n_2$ (kN)	$N.n_1$	$N.n_2$
BC	3	$\frac{3.6}{5}$	-1.5	-2.16	-4.5
BA	-2	0	-0.75	0	1.5
				$\sum = -2.16$	$\sum = -3$

مثال (9-2):



الشكل (28-2)

أوجد الانتقال الأفقي والشاقولي في النقطة C إذا زاد طول العنصر على AC بالمقدار 1cm.

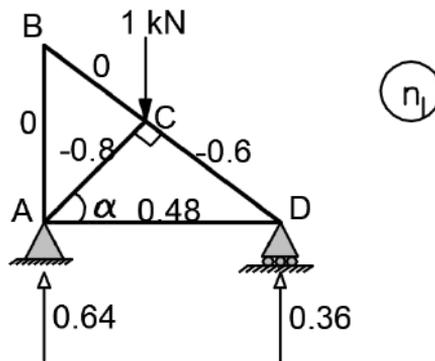
الحل:

$$AC = 4 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5}$$

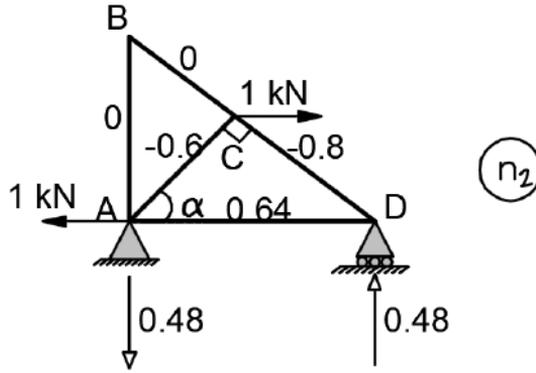
$$AC = 4 \frac{3}{5} = 2.4m$$

- من أجل حساب الانتقال الشاقولي يتم تطبيق قوة واحدة في C، وتكون القوى في العناصر كما في الشكل (29-2).



الشكل (29-2)

بينما من أجل الانتقال الأفقي في C يتم تطبيق قوة أفقية نحو الاتجاه الموجب للمحور X.



الشكل (30-2)

$$(\Delta_C)_v = \sum e.n_1 = -0.8 \times 1 = -0.8 \text{ cm}$$

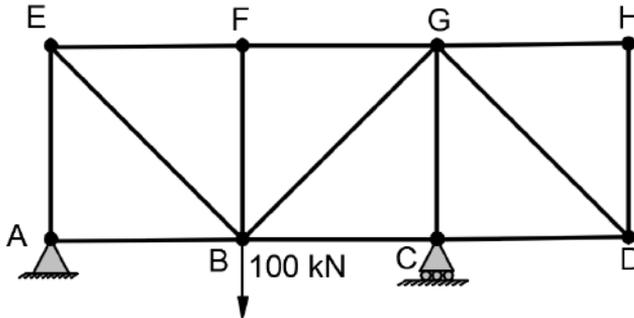
$$(\Delta_C)_v = \sum e.n_2 = 0.6 \times 1 = 0.6 \text{ cm}$$

حيث يؤخذ العنصر المتغير الطول AC فقط بالحسبان.

### مثال (10-2):

بالاعتماد على طريقة القوة الواحدية، أوجد ما يلي من أجل المنشأ المبين بالشكل (31-2).

1. أوجد الانتقال النسبي بين H، B .
2. أوجد الدوران في العنصر GH .
3. أوجد الانتقال الشاقولي في B الناتج عن الزيادة في درجة الحرارة بمقدار  $40^\circ\text{C}$ ، إن معامل التمدد الحراري يساوي  $\alpha = 12 \times 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$ ، معامل المرونة الطولاني  $E = 2 \times 10^4 \text{ kN/cm}^2$  مساحات مقاطع العناصر معطية بالجدول (11-2).



الشكل (31-2)

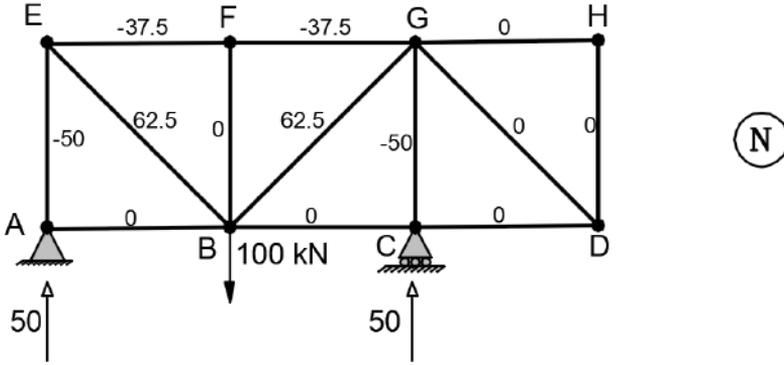
الحل:

الجدول (11-2)

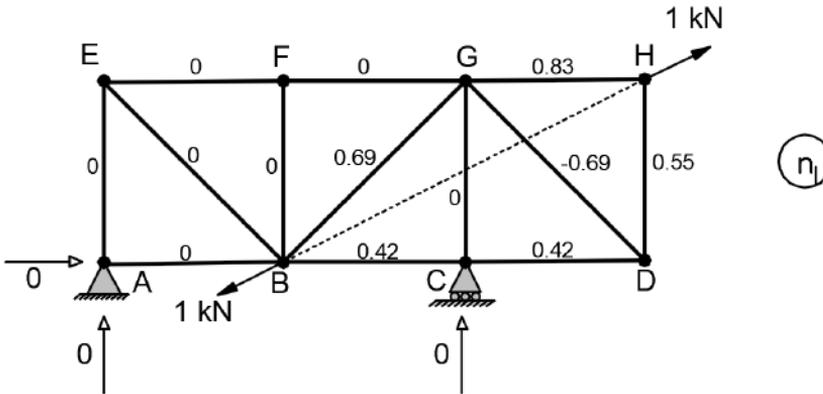
العنصر	A (cm <sup>2</sup> )
أفقي	6
شاقولي	4
قطري	10

بحساب القوى في العناصر بطريقة العقد يتم الحصول على القيم الموضحة بالشكل (32-2) (2). بينما من أجل حساب الانتقال النسبي بين النقطتين H، B يتم استخدام الجملة المساعدة المبينة بالشكل (2-33) حيث يتم

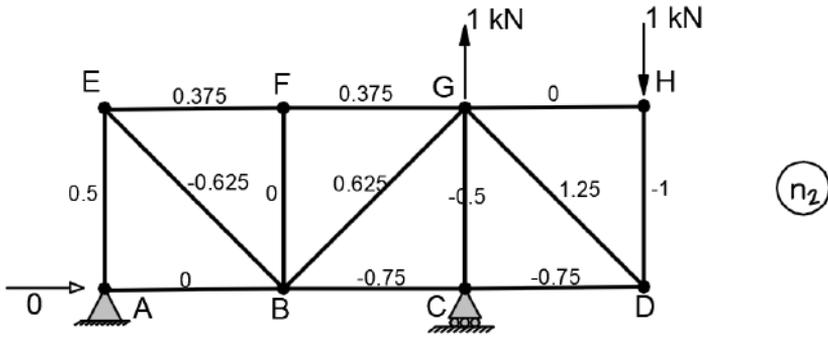
تطبيق قوتين واحدتين في كل من النقطتين B،H محمولتين على المستقيم الواصل بين النقطتين. في حين يتم تطبيق قوتين واحدتين متعاكستين عموديتين على العنصر GH من أجل حساب الدوران النسبي في هذا العنصر، وتكون الجملة المساعدة في هذه الحالة مبينة بالشكل (2-34).



الشكل (32-2)



الشكل (33-2)



الشكل (34-2)

في الحقيقة يُمكن الحصول على الجملة المساعدة الخاصة بالانتقال الشاقولي في B عن طريق قسمة الجملة الأساسية على الرقم 100. وتكون النتائج كما هي موضحة في الجدول (12-2) من أجل العناصر ذات القوة المحورية غير المعدومة في الجملة الأساسية N.

الجدول (12-2)

$n_3 \cdot L$	$N \cdot n_1 \cdot L / A$	$N \cdot n_1 \cdot L / A$	$n_3$	$n_2$	$n_1$	N	A cm <sup>2</sup>	L cm	العنصر
-200	-2500	0	-0.5	0.5	0	-50	4	400	AE
312.5	-1953.13	0	0.625	-0.625	0	62.5	10	500	EB
-112.5	-703.13	0	-0.375	0.375	0	-37.5	6	300	EF
-112.5	-703.125	0	-0.375	0.375	0	-37.5	6	300	FG
312.5	1953.125	2156.25	0.625	0.625	0.69	62.5	10	500	BG
-200	2500	0	-0.5	-0.5	0	-50	4	400	GC
$\sum = 0$	$\sum = -1406.25$	-2156.25							

$$\Delta_{BH} = \sum \frac{N \cdot n_1}{EA} L = \frac{2156.25}{2 \times 10^4} = 0.1078 \text{ cm} : H \text{ و } B \text{ ويكون الانتقال النسبي بين}$$

$$\theta_{GH} = \frac{\sum \frac{N \cdot n_1}{EA} L}{L_{GH}} = \frac{-1406.25}{2 \times 10^4 \times 300} = -2.34 \text{ rad} : H \text{ و } G \text{ الدوران النسبي بين}$$

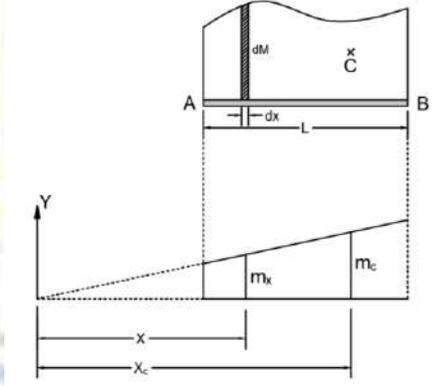
بينما يكون الانتقال الشاقولي في B الناتج عن زيادة درجة الحرارة:

$$\Delta_B = \alpha \cdot \Delta t \cdot \sum n_3 \cdot L = \frac{2156.25}{2 \times 10^4} = 0$$

يُلاحظ أنّ تغير درجة الحرارة لا يؤثر على الانتقال الشاقولي في B.

## 6-2 جداء مور Mohr's Multiplication

ويُعرف أيضاً بقاعدة فريشاجين، حيث يمكن استخدام طريقة بيانية تحليلية بدلاً من حساب التكامل  $\int_0^L \frac{M \cdot m}{EI} dx$  وتسمى جداء الرسوم البيانية Multiplying the Diagrams. لشرح هذه القاعدة يتم اعتبار مخطط عزم الانعطاف على العنصر AB المبيّن بالشكل (2-35) أحدهما اعتباطي M والآخر على شكل مستقيم هو m.



الشكل (2-35)

بما أنّ مخطط العزم m هو خطّي من الدرجة الأولى فيكون:

$$m_x = x \cdot \tan \alpha \quad (37-2)$$

$$m_c = x_c \cdot \tan \alpha \quad (38-2)$$

وبفرض كون مقطع العنصر ذا عطالة ثابتة يكون:

$$\int_0^L \frac{M \cdot m}{EI} dx = \frac{1}{EI} \int_0^L M \cdot m \cdot dx \quad (39-2)$$

إن المقدار  $\int_0^L M \cdot dx$  يمثل مساحة الجزء التفاضلي وتساوي dM، بالتعويض في (2-39) يكون:

$$\int_0^L M \cdot m \cdot dx = \int_0^L m_x \cdot dM \quad (40-2)$$

وبتعويض المعادلة (2-37) في المعادلة (2-40) يكون:

$$\int_0^L m_x \cdot dM = tg\alpha \int_0^L x \cdot dM \quad (41-2)$$

إن التكامل  $\int_0^L x \cdot dM$  يمثل العزم الستاتيكي لمساحة مخطط العزم  $M$  بالنسبة للمحور  $y$  ولتكن  $A_M$  ويكون العزم الستاتيكي مساوياً  $A_M \cdot x_c$  ، حيث:

$x_c$ : البعد بين المحور  $Y$  ومركز ثقل الرسم البياني  $M$ . يتضح من الرسم أن:

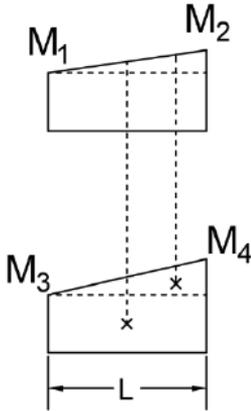
$$x_c = \frac{m_c}{tg\alpha} \quad (42-2)$$

$m_c$ : قيمة العزم في المخطط الثاني  $m$  الموافقة لمركز ثقل مخطط العزم  $M$ .  
بالتعويض (2-41):

$$\int_0^L m_x \cdot dM = tg\alpha \int_0^L x \cdot dM = tg\alpha \cdot A_M \cdot x_c = tg\alpha \cdot A_M \cdot \frac{m_c}{tg\alpha} = A_M \cdot m_c \quad (43-2)$$

وهذا يعني أن التكامل المطلوب إيجاده يساوي حاصل جداء مساحة المخطط البياني  $M$  (أياً كان شكل هذا المخطط) في القيمة المقابلة للمخطط البياني الخطي  $M_c$  الموافق لمركز ثقله.

يمكن البرهنة على نتيجة جداء مخططين شبه منحرفين كما يلي:



$$\int_0^L M_u \cdot M_L dx$$

$$= A_1 \frac{(M_1 + M_2)}{2} + A_2 \left[ (M_2 - M_1) \frac{2}{3} + M_1 \right]$$

$$= M_3 L \frac{(M_1 + M_2)}{2} + \left( \frac{M_4 - M_3}{2} \right) L \left[ (M_2 - M_1) \frac{2}{3} + M_1 \right]$$

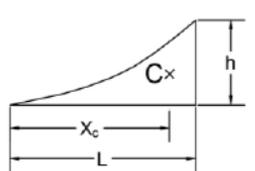
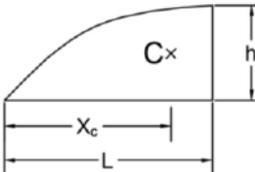
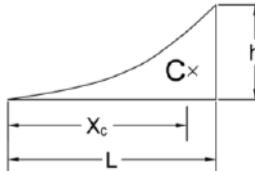
$$= M_3 L \frac{(M_1 + M_2)}{2} + \left( \frac{M_4 - M_3}{2} \right) \frac{L}{3} [(2M_2 + M_1)]$$

$$= M_3 L \frac{(M_1 + M_2)}{2} + (M_4 - M_3) \frac{L}{6} [(2M_2 + M_1)]$$

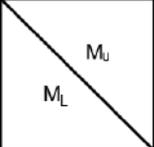
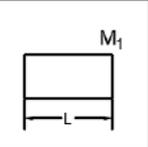
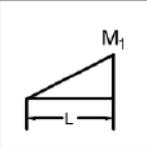
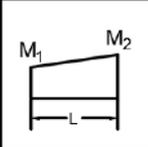
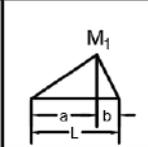
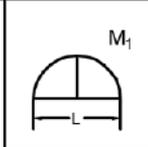
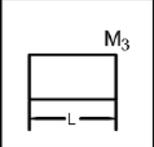
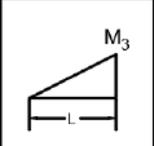
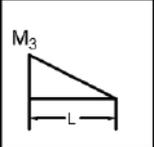
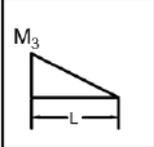
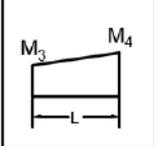
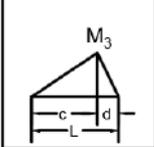
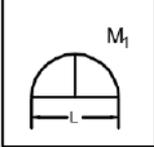
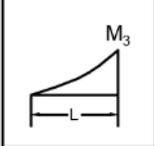
$$= \frac{L}{6} [3M_1 M_3 + 3M_2 M_3 + 2M_2 M_4 + M_1 M_4 - 2M_2 M_3 - M_1 M_3]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{L}{6} [2M_1M_3 + M_2M_3 + 2M_2M_4 + M_1M_4] \\
&= \frac{L}{6} [M_3(2M_1 + M_2) + M_4(2M_2 + M_1)] \\
&= \frac{L}{6} [M_1(2M_3 + M_4) + M_2(2M_4 + M_3)]
\end{aligned}$$

الجدول (13-2)

إحداثي مركز النقل	المساحة	المخطط البياني
$\frac{3}{4}L$	$\frac{1}{3}h.L$	 <p>منحنٍ من الدرجة الثانية</p>
$\frac{5}{8}L$	$\frac{2}{3}h.L$	 <p>قطع مكافئ</p>
$\frac{4}{5}L$	$\frac{1}{4}h.L$	 <p>منحنٍ من الدرجة الثالثة</p>

الجدول (14-2)

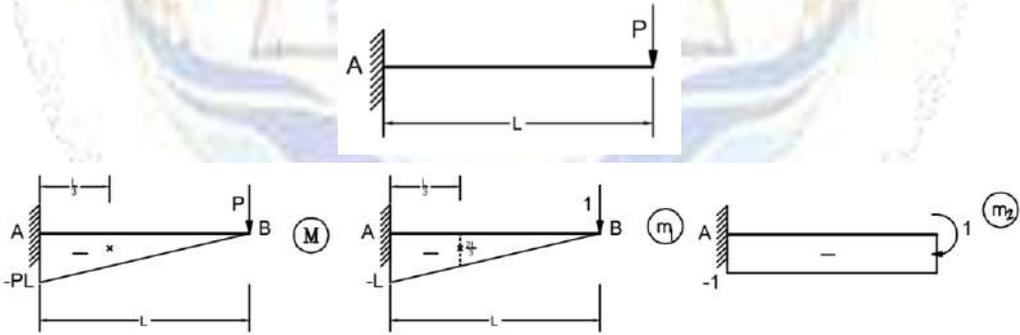
					
	$M_1 \cdot M_3 \cdot L$	$M_1 \cdot M_3 \cdot \frac{L}{2}$	$\frac{L}{2}(M_1 + M_2)M_3$	$M_1 \cdot M_3 \cdot \frac{L}{2}$	$M_1 \cdot M_3 \cdot 2\frac{L}{3}$
	$M_1 \cdot M_3 \cdot \frac{L}{2}$	$M_1 \cdot M_3 \cdot \frac{L}{3}$	$\frac{L}{6}(M_1 + 2M_2)M_3$	$M_1 \cdot M_3 \cdot \frac{L}{6}(1 + \frac{a}{L})$	$M_1 \cdot M_3 \cdot \frac{L}{3}$
	$M_1 \cdot M_3 \cdot \frac{L}{2}$	$M_1 \cdot M_3 \cdot \frac{L}{6}$	$\frac{L}{6}(2M_1 + M_2)M_3$	$M_1 \cdot M_3 \cdot \frac{L}{6}(1 + \frac{b}{L})$	$M_1 \cdot M_3 \cdot \frac{L}{3}$
	$M_1 \cdot M_3 \cdot \frac{L}{2}$	$M_1 \cdot M_3 \cdot \frac{L}{6}$	$\frac{L}{6}(2M_1 + M_2)M_3$	$M_1 \cdot M_3 \cdot \frac{L}{6}(1 + \frac{b}{L})$	$M_1 \cdot M_3 \cdot \frac{L}{3}$
	$\frac{L}{2}(M_3 + M_4)M_1$	$\frac{L}{6}(M_3 + 2M_4)M_1$	$\frac{L}{6}(2M_3 + M_4)M_1 + \frac{L}{6}(M_3 + 2M_4)M_2$	$M_1 \cdot M_3 \cdot \frac{L}{6}(1 + \frac{b}{L}) + M_1 \cdot M_4 \cdot \frac{L}{6}(1 + \frac{b}{L})$	$\frac{L}{3}(M_3 + M_4)M_1$
	$M_1 \cdot M_3 \cdot \frac{L}{2}$	$M_1 \cdot M_3 \cdot \frac{L}{6}(1 + \frac{c}{L})$	$M_1 \cdot M_3 \cdot \frac{L}{6}(1 + \frac{c}{L}) + M_2 \cdot M_3 \cdot \frac{L}{6}(1 + \frac{c}{L})$	$M_1 \cdot M_3 \cdot \frac{L}{6} + \frac{L}{6} M_1 \cdot M_3 \cdot L \cdot \frac{(a-c)^2}{6ab}$	$M_1 \cdot M_3 \cdot \frac{L}{3}(1 + \frac{cd}{L^2})$
	$M_1 \cdot M_3 \cdot 2\frac{L}{3}$	$M_1 \cdot M_3 \cdot \frac{L}{3}$	$\frac{L}{3}(M_1 + M_2)M_3$	$M_1 \cdot M_3 \cdot \frac{L}{3}(1 + \frac{ab}{L^2})$	$M_1 \cdot M_3 \cdot 8\frac{L}{15}$
	$M_1 \cdot M_3 \cdot \frac{L}{3}$	$M_1 \cdot M_3 \cdot \frac{L}{4}$	$\frac{L}{12}(M_1 + 3M_2)M_3$	$M_1 \cdot M_3 \cdot \frac{L}{12}(1 + \frac{a}{L} + \frac{a^2}{L^2})$	$M_1 \cdot M_3 \cdot \frac{L}{5}$

## ملاحظات:

1. عندما يكون المخططان في جهة واحدة فإنّ حاصل الجداء موجب أما إذا وقعا في جهتين مختلفتين من العنصر فإنّ حاصل الجداء سالب.
  2. من الضروري دائماً الانتباه إلى أنّ قيمة  $m_c$  تؤخذ من المخطط ذي الدرجة الأولى (الخطّي) وعندما يكون كلا المخططين خطيين عندها يمكن أخذ جداء مساحة أي منهما في القيمة المقابلة لمركز ثقلها من المخطط الآخر.
  3. عندما يكون المنشأ محملاً بعدة حمولات يمكن تقسيم مخطط العزم إلى عدة مخططات أبسط من المخطط الأصلي، مربعات أو مثلثات أو قطوع مكافئة من الدرجة الثانية.
- يبين الجدول (2-13) قيم مساحات المخططات ومراكز ثقلها حسب شكلها. ويبين الشكل (2-36) نتائج الجداء من أجل الأشكال الشهيرة لمخططات العزم.

## مثال (2-11):

أوجد الانتقال والدوران في النقطة B من المنشأ المبين بالشكل (2-36) بالاعتماد على طريقة القوة الواحدية Unit-Load Method وبالاستعانة بجداء مور. برسم مخططات العزم من أجل الحمولات الأساسية ومن أجل قوة واحدة وعزم واحد في B يتم الحصول على الشكل (2-36).



الشكل (2-36)

• الانتقال الشاقولي في B:

$$\Delta_B = \int_0^L \frac{M \cdot m_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} A_m \times m_{1c}$$

$$\Delta_B = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} PL^2 \frac{2}{3} L = \frac{PL^3}{3EI}$$

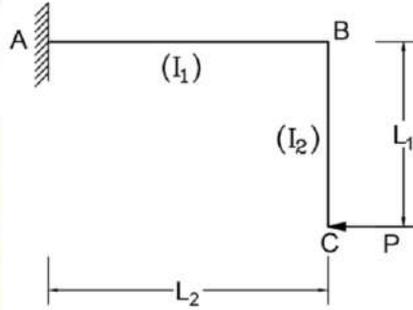
• الدوران في B:

$$\theta_B = \int_0^L \frac{M \cdot m_2}{EI} dx = \frac{1}{EI} A_m \times m_{2c}$$

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \frac{1}{2} PL^2 \times 1 = \frac{PL^2}{2EI}$$

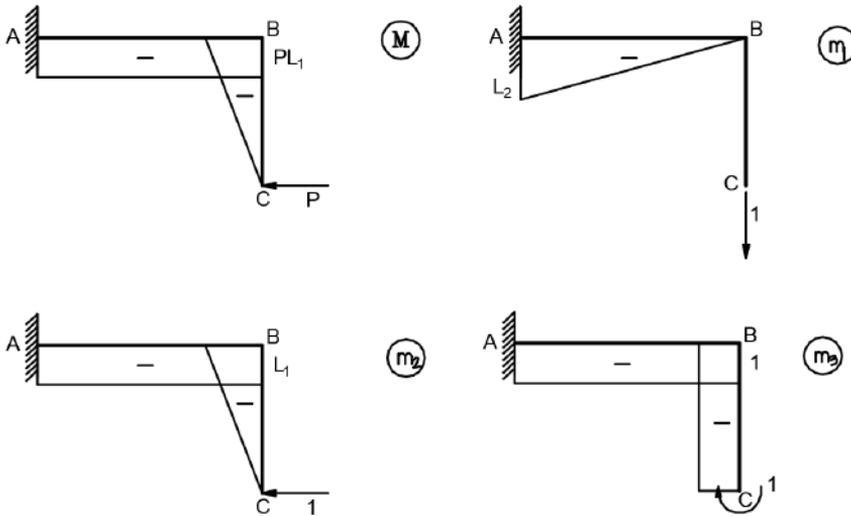
مثال (2-12):

أوجد الانتقال الشاقولي والانتقال الأفقي والدوران في النقطة C من المنشأ المبين بالشكل (2-37) بالاعتماد على طريقة القوة الواحدة Unit-Load وبالاستعانة بجداء مور.



الشكل (2-37)

برسم مخططات العزوم من أجل الجملة الأساسية والجميل المساعدة يتم الحصول على الشكل (2-38).



الشكل (2-38)

- الانتقال الشاقولي في النقطة C:

$$(\Delta_C)_v = \sum \int_0^L \frac{M.m_1}{EI} dx = \frac{1}{EI_2} \frac{L_2^2}{2} PL_1 \downarrow$$

- الانتقال الأفقي في النقطة C:

$$(\Delta_C)_h = \sum \int_0^L \frac{M.m_2}{EI} dx = \frac{1}{EI_1} P \frac{L_1^2}{2} \frac{2}{3} L_1 + \frac{1}{EI_2} PL_1^2 L_2 \leftarrow$$

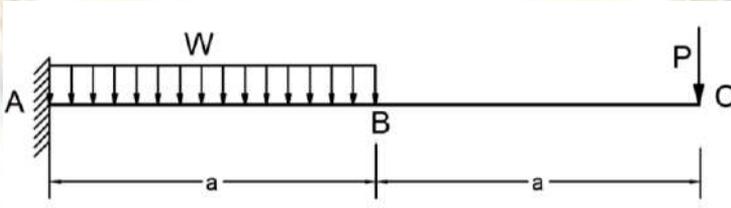
- الدوران في النقطة C:

$$\theta_C = \sum \int_0^L \frac{M.m_3}{EI} dx = \frac{1}{EI_1} P \frac{L_1^2}{2} + \frac{1}{EI_2} PL_1 L_2$$

تعني الإشارة الموجبة للدوران أنه يوافق العزم الواحدي المفروض فهو مع عقارب الساعة.

### مثال (2-13):

أوجد الانتقال الشاقولي في النقطة C من المنشأ المبين بالشكل (2-39) بالاعتماد على طريقة القوة الواحدية Unit-Load وبالاستعانة بقاعدة فريشاجين.



الشكل (2-39)

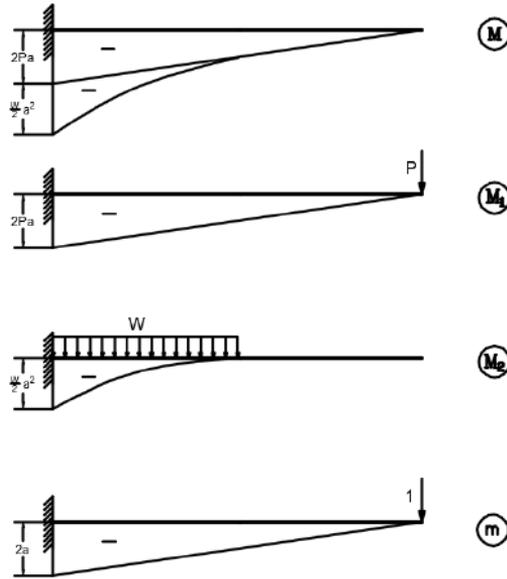
برسم مخطط عزم الانعطاف تحت تأثير الحملات الخارجية يُلاحظ أنه مؤلف من جزأين، الأول ناتج عن الحمولة P والآخر ناتج عن الحمولة W، وبالتالي يمكن فصل كل منهما عن الآخر بحسب مبدأ تنضد الآثار، حيث يتم الحصول على مخططين بسيطين كما هو مبين بالشكل (2-40).

الانتقال الشاقولي في C:

$$(\Delta_C)_v = \int_0^L \frac{M.m}{EI} dx = \frac{1}{EI} A_M . m_c$$

$$(\Delta_C)_v = \frac{1}{EI} A_{M1} . m_{c1} + \frac{1}{EI} A_{M2} . m_{c2}$$

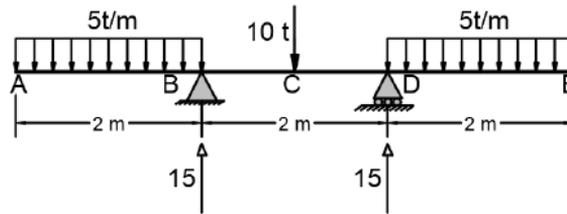
$$(\Delta_c)_v = \frac{1}{EI} \frac{2Pa}{2} \frac{a}{3} \frac{4a}{3} + \frac{1}{EI} \frac{Wa^2}{2} \frac{a}{3} \frac{7a}{4} = \frac{8}{3} pa^3 + \frac{7}{24} Wa^4 \downarrow$$



الشكل (40-2)

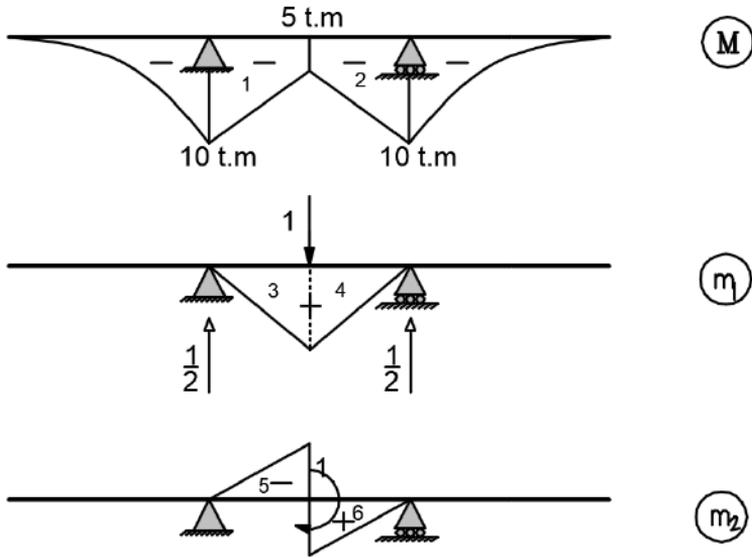
مثال (13-2):

أوجد الانتقال الشاقولي والدوران في النقطة C من الجائز المبين بالشكل (41-2) بالاعتماد على طريقة القوة الواحدة.



الشكل (41-2)

إن مخططات العزم تحت تأثير الأحمال الخارجية والقوة الواحدة في النقطة C والعزم الواحدي في النقطة C موضحة بالشكل (42-2).



الشكل (42-2)

• الانتقال الشاقولي في C:

$$(\Delta_C)_v = \sum \int_0^L \frac{M \cdot m_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} A_M \cdot m_c$$

بأخذ جداء المخطط رقم (1) بالمخطط رقم (3) ثم جداء الناتج بالرقم /2:

$$EI(\Delta_C)_v = 2 \left[ -(2M_1 + M_2) \frac{m_1 L}{6} \right]$$

$$EI(\Delta_C)_v = 2 \left[ -(2 \times 5 + 10) \frac{0.5 \times 1}{6} \right] = -3.333 t.m^3$$

• الدوران في C:

$$\theta_C = \sum \int_0^L \frac{M \cdot m_2}{EI} dx$$

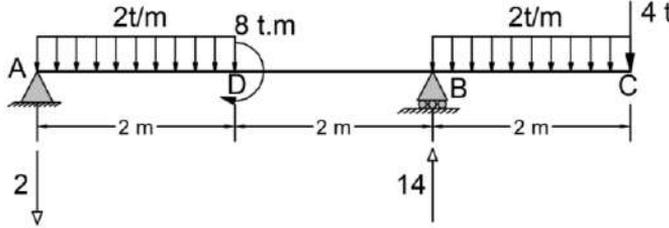
بأخذ جداء المخطط رقم (1) بالمخطط رقم (5) والمخطط رقم (2) بالمخطط رقم (6) ثم جمع النواتج:

$$\theta_C = \frac{(2 \times 5 + 10) \times 0.5 \times 2}{6} - 3.333 = 3.333 - 3.333 = 0$$

ينعدم الدوران في النقطة C وهذا صحيح لأنها واقعة على محور تناظر.

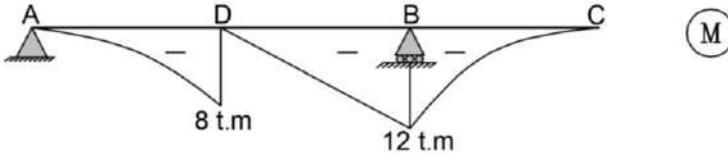
## مثال (2-14):

أوجد الانتقال الشاقولي والدوران في النقطة D من الجائز المبين بالشكل (2-43) بالاعتماد على طريقة القوة الواحدة.



الشكل (2-43)

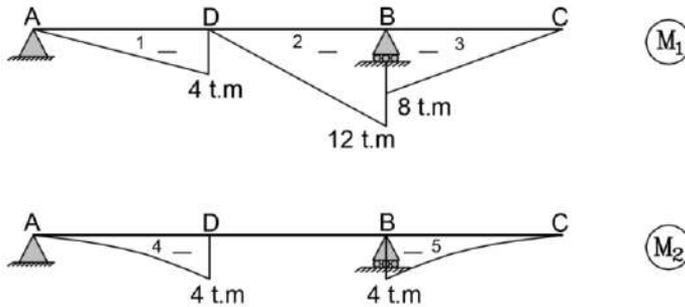
إن مخطط العزم تحت تأثير الأحمال الخارجية موضح بالشكل (2-44).



الشكل (2-44)

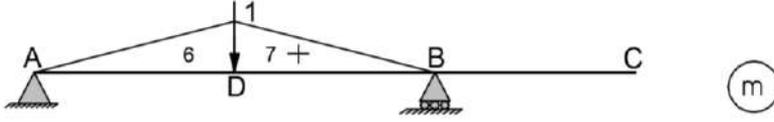
يُلاحظ من المخطط أنه يمكن تجزئة المخطط بين AD و BC إلى جزأين خطّي ومنحنٍ بشكل تقريبي:

- AD يجرأ إلى جزء خطّي ناتج عن رد الفعل كما في المخطط ( $M_1$ ) وجزء منحنٍ ناتج عن الحمولة الموزعة كما في المخطط ( $M_2$ ).
- BC يجرأ إلى جزء خطّي ناتج عن الحمولة المركزة كما في المخطط ( $M_1$ ) وجزء منحنٍ ناتج عن الحمولة الموزعة كما في المخطط ( $M_2$ ), الشكل (2-45).



الشكل (2-45)

وتكون مخططات العزم من أجل الجملة المساعدة كما في الشكل (2-46).



الشكل (2-46)

بتطبيق معادلة الانتقال:

$$(\Delta_D)_v = \sum \int_0^L \frac{M_u \cdot m}{EI} dx = \sum \int_0^L \frac{M_1 \cdot m}{EI} dx + \sum \int_0^L \frac{M_2 \cdot m}{EI} dx$$

• جداء المساحات (1) و(6):

$$-\frac{M_u M_L L}{3} = \frac{-4 \times 6 \times 2}{3} = -\frac{8}{3} t.m^3$$

• جداء المساحات (3) و(7):

$$-\frac{M_u M_L L}{6} = \frac{-12 \times 1 \times 2}{6} = -4 t.m^3$$

• جداء المساحات (4) و(6):

$$-\frac{M_u M_L L}{4} = \frac{-4 \times 1 \times 2}{4} = -2 t.m^3$$

بجمع القيم الثلاث:

$$EI(\Delta_D)_v = -8.667 t.m^3$$

## 7-2 نظريتا كاستليانو Castigliano's Theorems

### 1-7-2 مقدمة

نشر المهندس الإيطالي Albert Castigliano كتاباً حول المنشآت غير المقررة ستاتيكيًا عام

1879، وقد تضمّن كتابه نظريتين تعرفان اليوم بنظريتي كاستليانو الأولى والثانية.

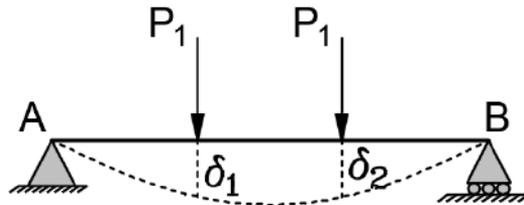
تمثّل نظرية كاستليانو الأولى طريقة مهمّة لحساب التشوهات Deflections من انتقال ودوران، إنّ الانتقال أو الدوران يساوي إلى المشتق الأول للعمل الداخلي بالنسبة إلى الحمولة المطبقة عند نقطة حساب التشوه. بينما تُعرف نظرية كاستليانو الثانية بالعمل الأصغري Least Work وتمثّل طريقة مهمّة من أجل تحليل

المنشآت غير المقررة ستاتيكيًا؛ حيث يجب أن يكون مشتق العمل الداخلي الناتج عن ردود الأفعال الفائضة معدوماً.

## 2-7-2 نظرية كاستليانو الأولى

على الرغم من أن الطرائق الأخرى لحساب التشوهات (مثل الجائز البديل أو القوة الواحدية) أكثر سهولة في الاستخدام من هذه النظرية وأكثر شيوعاً. إلا أن هذه الطريقة مهمة للطالب لأنها تعطيه أساساً لاستخدام نظرية كاستليانو الثانية.

من أجل برهان هذه النظرية يؤخذ الجائز البسيط الموضح بالشكل (2-47) وهو معرّض إلى القوتين المطبقتين تدريجياً  $P_1$  و  $P_2$  وينتج عن هاتين القوتين الانتقالان  $\delta_1$ ،  $\delta_2$  والمطلوب حساب الانتقال  $\delta_1$  عند نقطة تأثير القوة  $P_1$ .

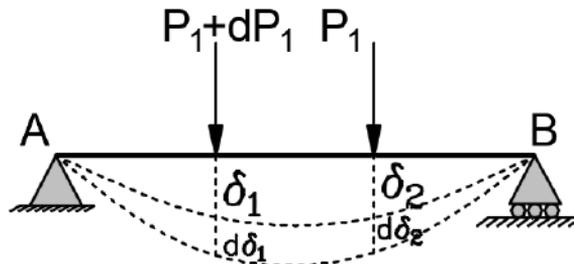


الشكل (2-47)

إنّ العمل الخارجي المنجز أثناء تطبيق القوتين يساوي:

$$W = \frac{P_1 \delta_1}{2} + \frac{P_2 \delta_2}{2} \quad (2-44)$$

في حال زيادة القوة  $P_1$  بالمقدار التفاضلي  $dP_1$  فإن الجائز سوف يتشوه بشكل إضافي  $d\delta_1$ ،  $d\delta_2$  تحت نقطتي تأثير القوتين  $P_1$  و  $P_2$  كما في الشكل (2-48).



الشكل (2-48)

إنّ العمل الإضافي المنجز أثناء تطبيق  $dP_1$  معطى بالمعادلة (45-2).

$$dW = \left( P_1 + \frac{dP_1}{2} \right) d\delta_1 + P_2 \cdot d\delta_2 \quad (45-2)$$

بالإصلاح وإهمال جداء التفاضلات لصغره.

$$dW = P_1 d\delta_1 + P_2 \cdot d\delta_2 \quad (46-2)$$

بفرض أنّ القوى  $(P_1 + dP_1)$  ،  $(P_2)$  تطبق في نفس اللحظة يكون العمل الكلي:

$$W' = \left( P_1 + \frac{dP_1}{2} \right) (\delta_1 + d\delta_1) + \frac{P_2}{2} (\delta_2 + d\delta_2) \quad (47-2)$$

بالإصلاح وإهمال جداء التفاضلات.

$$W' = \frac{P_1 \delta_1}{2} + \frac{P_1 d\delta_1}{2} + \frac{dP_1 \delta_1}{2} + \frac{P_2 \delta_2}{2} + \frac{P_2 \cdot d\delta_2}{2} \quad (48-2)$$

بما أنّ  $dW = W' - W$  فإنه بطرح المعادلتين (44-2) و (48-2) يتم الحصول على:

$$dW = \frac{P_1 \delta_1}{2} + \frac{P_1 d\delta_1}{2} + \frac{dP_1 \delta_1}{2} + \frac{P_2 \delta_2}{2} + \frac{P_2 \cdot d\delta_2}{2} - \frac{P_1 \delta_1}{2} - \frac{P_2 \delta_2}{2}$$

$$dW = \frac{P_1 d\delta_1}{2} + \frac{dP_1 \delta_1}{2} + \frac{P_2 \cdot d\delta_2}{2} \quad (50-2)$$

يمكن استخراج  $P_2 \cdot d\delta_2$  من المعادلة (46-2) وتعويضها في المعادلة (51-2).

$$P_2 \cdot d\delta_2 = dW - P_1 \cdot d\delta_1 \quad (51-2)$$

$$dW = \frac{P_1 d\delta_1}{2} + \frac{dP_1 \delta_1}{2} + \frac{dW - P_1 \cdot d\delta_1}{2}$$

$$dW = dP_1 \delta_1 \Rightarrow \delta_1 = \frac{dW}{dP_1}$$

بالتعميم من أجل وجود أكثر من حمل مطبق على المنشأ تكون معادلة التشوه (انتقال أو دوران).

$$\delta = \frac{\partial W}{\partial P} \quad (52-2)$$

تعطى معادلة العمل أيضاً كما يلي  $W = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$  ، بالتعويض في (52-2) يكون:

$$\delta = \frac{\partial \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx}{\partial P} = \int_0^L \frac{1}{2EI} \frac{\partial M^2}{\partial P} dx = \int_0^L \frac{1}{2EI} 2M \frac{\partial M}{\partial P} dx$$

$$\delta = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial P} dx \quad (53-2)$$

من أجل منشأ شبكي يتم اتباع نفس الإجراء .

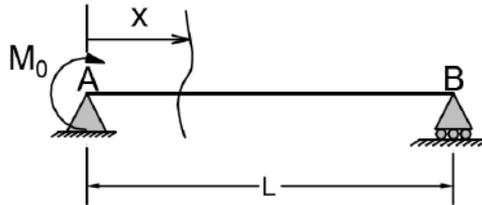
$$\delta = \frac{\partial \sum \frac{N^2}{2EA} L}{\partial P}$$

$$\delta = \sum \frac{L}{EA} \frac{\partial N}{\partial P} N \quad (54-2)$$

- عند تطبيق هذه النظرية يُفترض أنّ القوة الموجودة عند نقطة الانتقال المطلوب هي P وبعد الانتهاء من الاشتقاق والتكامل يتم تعويض القيمة الحقيقية للقوة P.
- في حال حساب الانتقال في نقطة ما من المنشأ بحيث لا توجد قوة مطبقة في هذه النقطة يُفترض وجود قوة وهمية P في النقطة المدروسة وبعد إنهاء الحسابات يتم تعويض القيمة صفر مكان القوة P.
- عندما يُحسب الدوران في نقطة ما فإنه يُفترض وجود عزم وهمي M في النقطة المطلوبة ويتم مساواة هذه القيمة مع الصفر بعد انتهاء العمل. إن الإشارة الموجبة للدوران تعني أنه في اتجاه دوران العزم المفروض.

**مثال (2-15):**

أوجد الدوران في النقطة A من الجانز البسيط المبين بالشكل (2-49) بالاعتماد على نظرية كاستليانو الأولى.



الشكل (2-49)

$$R_A = \frac{M_0}{L} \downarrow$$

$$M_x = M_0 - R_A \cdot x = M_0 - \frac{M_0}{L} \cdot x = M_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

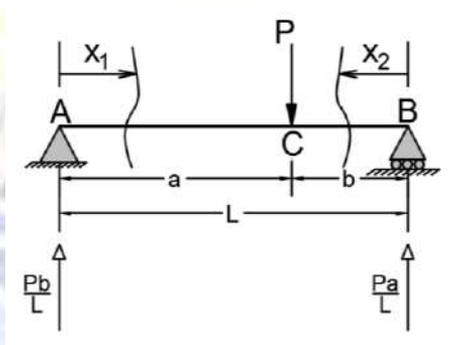
$$\frac{\partial M_x}{\partial M_0} = \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$\theta_A = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_0} dx = \frac{1}{EI} \int_0^L M_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 dx$$

$$\theta_A = \frac{M_0}{EI} \left[ \frac{L}{3} - L + L \right] = \frac{M_0 L}{3EI}$$

مثال (2-16):

أوجد الانتقال الشاقولي في النقطة D من المنشأ المبين بالشكل (2-50) بالاعتماد على نظرية كاستليانو الأولى.



الشكل (2-50)

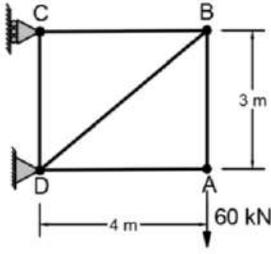
$$M_{x_1} = \frac{p \cdot b}{L} x \Rightarrow \frac{\partial M_{x_1}}{\partial P} = \frac{p \cdot b}{L} : a \geq x_1 \geq 0$$

$$M_{x_2} = \frac{p \cdot a}{L} x \Rightarrow \frac{\partial M_{x_2}}{\partial P} = \frac{a \cdot b}{L} : b \geq x_2 \geq 0$$

$$\delta_D = \frac{1}{EI} \sum \int_0^L M \frac{\partial M}{\partial P} dx$$

$$\delta_D = \frac{1}{EI} \left[ \int_0^a \frac{p \cdot b \cdot x}{L} \left( \frac{b \cdot x}{L} \right) dx + \int_0^b \frac{p \cdot a \cdot x}{L} \left( \frac{a \cdot x}{L} \right) dx \right] = \frac{Pa^2 b^2}{3EI \cdot L} \downarrow$$

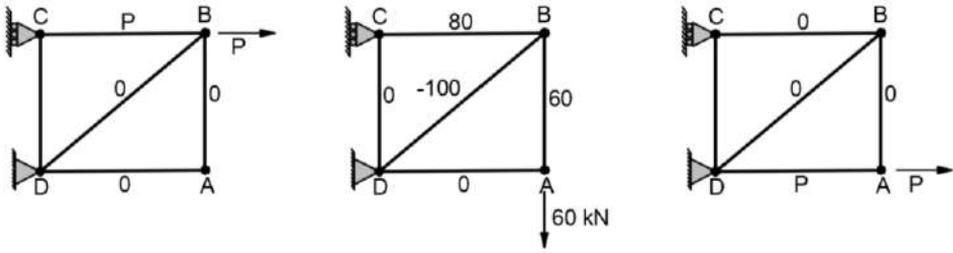
**مثال (2-17):**



الشكل (2-51)

أوجد الانتقال الأفقي في النقطة A ثم الانتقال الأفقي في النقطة B من المنشأ الشبكي المبين بالشكل (2-51) بالاعتماد على نظرية كاستليانو الأولى، علماً بأن مساحة كل من العناصر  $A = 300mm^2$  اهل المرونة الطولاني لكامل المنشأ  $E = 200GPa$ .

بحساب القوى في العناصر من أجل كل من الجملة الأساسية والجمال المساعدة يتم الحصول على النتائج الموضحة بالشكل (2-52).



الشكل

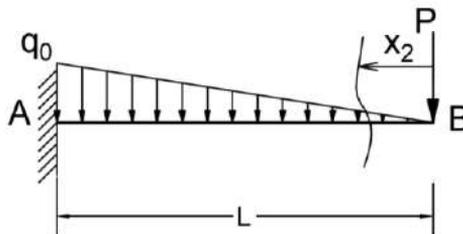
(2-52)

$$(\Delta_A)_h = 0$$

$$(\Delta_B)_h = \sum \frac{L}{EA} \frac{\partial N}{\partial P} N = \frac{80 \times 1 \times 4 \times 10^3}{(200 \times 10^9) 300 \times 10^{-6}} = 0.00533m = 5.33mm \rightarrow$$

**مثال (2-18):**

أوجد الانتقال الشاقولي في النقطة B من المنشأ الشبكي المبين بالشكل (2-53) بالاعتماد على نظرية كاستليانو الأولى.



الشكل (2-53)

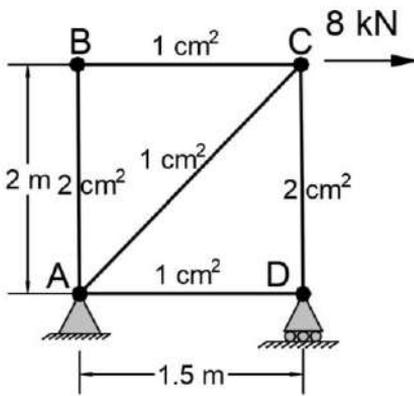
$$M_x = -P \cdot x - \frac{q_0}{6} \frac{x^3}{L}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial P} = -x$$

$$\delta_B = \frac{1}{EI} \int_0^L \left( P \cdot x + \frac{q_0}{6} \frac{x^3}{L} \right) x \cdot dx = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{q_0}{30EI} L^4$$

$$P = 0 \Rightarrow \delta_B = \frac{q_0}{30EI} L^4 \downarrow$$

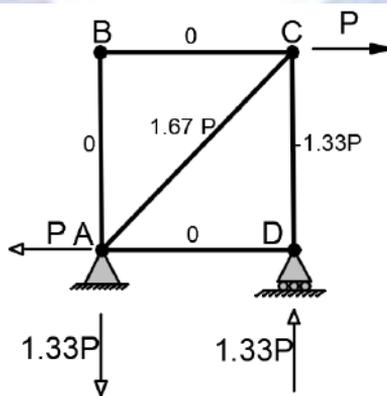
مثال (19-2):



الشكل (54-2)

أوجد الانتقال الأفقي في النقطة C من المنشأ الشبكي المبين بالشكل (54-2) بالاعتماد على نظرية كاستليانو الأولى، علماً بأن مساحة كل من العناصر موضحة على الشكل، عامل المرونة الطولاني لكامل المنشأ  $E = 2.9 \times 10^2 \text{ kN/cm}^2$ .

بتطبيق قوة أفقية P في النقطة C وحساب القوى في العناصر يتم الحصول على النتائج الموضحة في الشكل (55-2).



الشكل (55-2)

يُمكن حساب الانتقال وفق الجدول (15-2).

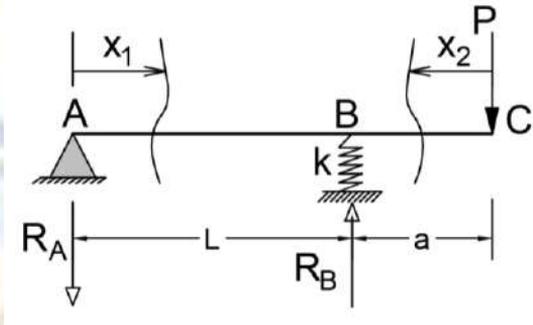
الجدول (15-2)

العنصر	N جملة مساعدة	$\frac{\partial N}{\partial P}$	L	N جملة أساسية	$N \frac{\partial N}{\partial P} L$
AB	0	0	2	0	0
BC	0	0	1.5	0	0
AC	1.67P	1.67	2.5	13.33	33.325
CD	-1.33P	-1.33	2	-10.67	21.34
AD	0	0	1.5	0	0

$$(\Delta_C)_h = \sum \frac{L}{EA} \frac{\partial N}{\partial P} N = \frac{33.325}{(2.9 \times 10^2)} + \frac{21.34}{2(2.9 \times 10^2)} = 0.152 \text{ cm} \rightarrow$$

مثال (20-2):

أوجد الانتقال الشاقولي في النقطة C من المنشأ المبين بالشكل (2-56) بالاعتماد على نظرية كاستليانو الأولى، علماً بأن صلابة النابض في B تساوي k.



الشكل (2-56)

$$R_A = \frac{P \cdot a}{L} \downarrow, R_B = \frac{P(L+a)}{L} \uparrow$$

$$M_{x_1} = -R_A \cdot x = -\frac{P \cdot a}{L} x \Rightarrow \frac{\partial M_{x_1}}{\partial P} = -\frac{a \cdot x}{L} \Big|_{x_1: 0 \rightarrow L}$$

$$M_{x_2} = -P \cdot x \Rightarrow \frac{\partial M_{x_2}}{\partial P} = -\frac{a}{L} \Big|_{x_2: 0 \rightarrow a}$$

في هذه المسألة يمكن تجزئة العمل المبذول إلى عمل ناتج عن الحمولات وعمل ناتج عن النابض.

$$W = W_s + W_L$$

ويكون الانتقال الكلي في C مساوياً  $\delta_{\Delta C} = \frac{\partial W_s}{\partial P} + \frac{\partial W_L}{\partial P}$

$$(\delta_{\Delta C})_L = \frac{1}{EI} \int_0^L M_{x1} \frac{\partial M_{x1}}{\partial P} dx + \frac{1}{EI} \int_0^a M_{x2} \frac{\partial M_{x2}}{\partial P} dx$$

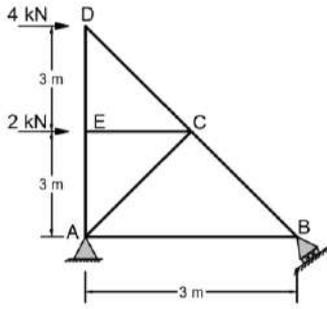
$$(\delta_{\Delta C})_L = \frac{1}{EI} \int_0^L \frac{Pa^2}{L^2} x^2 dx + \frac{1}{EI} \int_0^a \frac{Pa}{L} x dx = \frac{Pa^2(L+a)}{3EI}$$

$$(\delta_{\Delta C})_s = \frac{\partial W_s}{\partial P} ; W_s = \frac{1}{2} R_B \delta_B = \frac{1}{2} R_B \frac{R_B}{k} = \frac{R_B^2}{2k}$$

$$W_s = \frac{1}{2} \frac{P^2}{L^2 k} (L+a)^2 ; \frac{\partial W_s}{\partial P} = \frac{P}{L^2 k} (L+a)^2$$

$$\delta_{\Delta C} = \frac{Pa^2(L+a)}{3EI} + \frac{P}{L^2 k} (L+a)^2 \downarrow$$

مثال (21-2):



الشكل (57-2)

أوجد الانتقال الأفقي في النقطة D من المنشأ الشبكي المبين بالشكل (57-2) بالاعتماد على نظرية كاستليانو الأولى، علماً بأن مساحة كل من العناصر  $A = 300mm^2$  المرنة الطولاني لكامل المنشأ  $E = 200GPa$ .

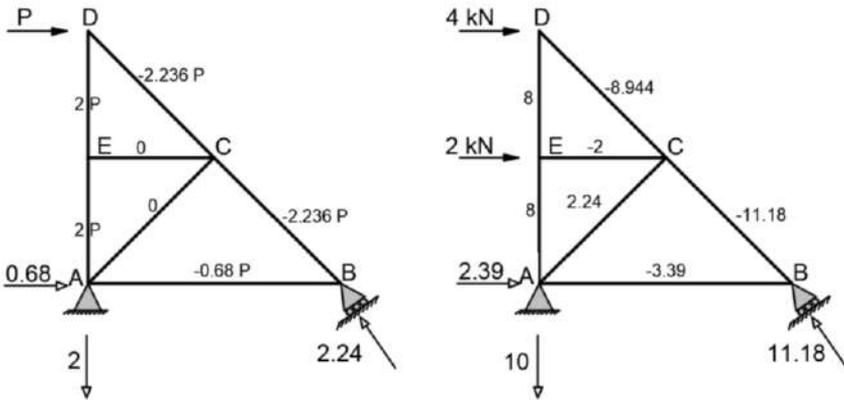
الحل:

بحساب القوى في العناصر من أجل الجملة الأساسية والجملة

المساعدة يتم الحصول على الشكل (58-2).

ويكون الانتقال الأفقي في النقطة D:

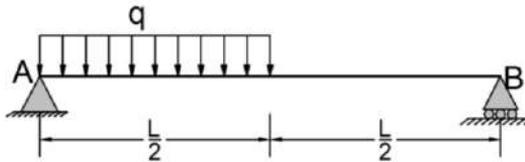
$$(\Delta_D)_h = \sum \frac{L}{EA} \frac{\partial N}{\partial P} N = \frac{2 \times 8 \times 2(3 \times 10^3)}{EA} - \frac{8.944 \times (-2.236) \times (3.354 \times 10^3)}{EA} - \frac{11.18 \times (-2.236) \times (3.354 \times 10^3)}{EA} - \frac{3.39 \times (-0.68) \times (3 \times 10^3)}{EA} = 4.22mm \rightarrow$$



الشكل (58-2)

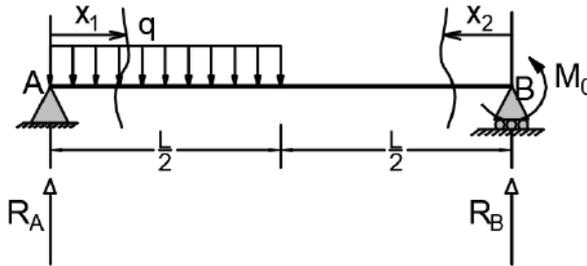
مثال (22-2):

أوجد الدوران في النقطة B من الجائز الميّن بالشكل (59-2) بالاعتماد على نظرية كاستليانو الأولى.



الشكل (59-2)

بتطبيق عزم وهمي في النقطة B يتم الحصول على ردود الأفعال التالية:



الشكل (60-2)

$$R_A = \frac{3qL}{8} + \frac{M_0}{L} ; R_B = \frac{qL}{8} - \frac{M_0}{L}$$

$$x_1 = 0 \rightarrow \frac{L}{2} ; M_{x_1} = R_A \cdot x - \frac{qx^2}{2} = \frac{3qL}{8}x + \frac{M_0}{L}x - \frac{qx^2}{2} \Rightarrow \frac{\partial M_{x_1}}{\partial M_0} = \frac{x}{L}$$

$$x_2 = 0 \rightarrow \frac{L}{2}; M_{x_2} = R_B \cdot x + M_0 = \left( \frac{q \cdot L}{8} - \frac{M_0}{L} \right) x + M_0 \Rightarrow \frac{\partial M_{x_2}}{\partial M_0} = -\frac{x}{L} + 1$$

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \int M \frac{\partial M}{\partial M_0} dx$$

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left( \frac{3qL}{8} x + \frac{M_0}{L} x - \frac{qx^2}{2} \right) \left( \frac{x}{L} \right) dx$$

$$+ \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left( \left( \frac{q \cdot L}{8} - \frac{M_0}{L} \right) x + M_0 \right) \left( 1 - \frac{x}{L} \right) dx$$

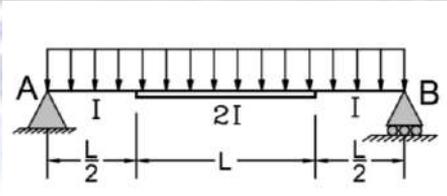
$$M_0 = 0$$

$$\theta_B = \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left( \frac{3qL}{8} x - \frac{qx^2}{2} \right) \left( \frac{x}{L} \right) dx$$

$$+ \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left( \frac{q \cdot L}{8} x \right) \left( 1 - \frac{x}{L} \right) dx = \frac{7qL^3}{384EI}$$

مثال (23-2):

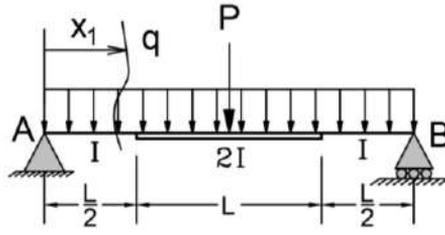
جانز بسيط ABCD يحمل حمولة موزعة بانتظام ذات شدة قدرها q. عطالة الجزء الوسطي BC ضعف أطراف AB-DE، والمطلوب إيجاد الانتقال الشاقولي في النقطة C.



الشكل (2-61)

بتطبيق قوة واحدة وهمية شاقولية في النقطة C يكون رد الفعل في A ومعادلة العزم:

$$R_A = \frac{qL}{2} + \frac{P}{2}; M_x = R_A \cdot x - \frac{qx^2}{2} = \frac{qLx}{2} + \frac{Px}{2} - \frac{qx^2}{2}; x = 0 \rightarrow \frac{L}{2}$$



الشكل (62-2)

لحساب الانتقال الشاقولي في C يمكن الاستفادة من التناظر بأخذ نصف الجائز فقط بالحساب والجداء بالرقم /2/.

$$\delta_c = 2 \int_0^{L/2} \frac{1}{EI} M_x \frac{\partial M_x}{\partial P} dx = 2 \frac{1}{EI} \int_0^{L/4} \left( \frac{qLx}{2} + \frac{Px}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) \frac{x}{2} dx$$

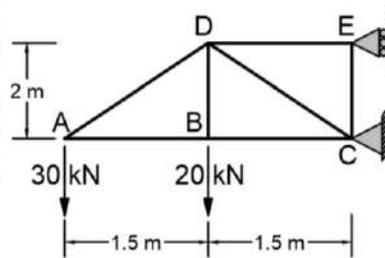
$$+ 2 \frac{1}{2EI} \int_{L/4}^{L/2} \left( \frac{qLx}{2} + \frac{Px}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) \frac{x}{2} dx$$

بجعل القوة P معدومة.

$$\delta_c = 2 \frac{1}{EI} \int_0^{L/4} \left( \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) \frac{x}{2} dx + \frac{1}{EI} \int_{L/4}^{L/2} \left( \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) \frac{x}{2} dx = \frac{31qL^4}{4096EI} \downarrow$$

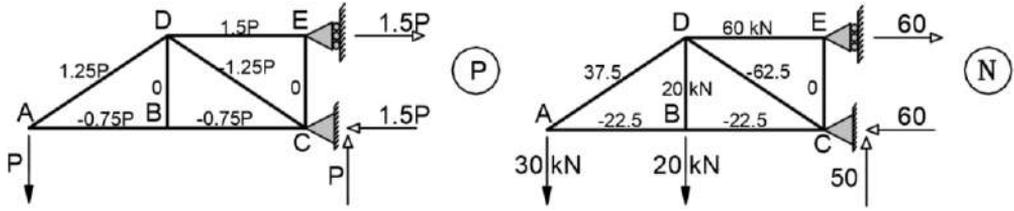
مثال (24-2):

أوجد الانتقال الشاقولي في العقدة A من الجائز الشبكي المبين بالشكل (63-2)، علماً بأن مساحة كل من العناصر  $A = 400mm^2$  عامل المرونة الطولاني لكامل المنشأ  $E = 200GPa$ .



الشكل (63-2)

يتم حساب القوى الداخلية في العناصر N تحت تأثير الأحمال الخارجية من أجل الجملة الأساسية ثم من أجل الجملة المساعدة حيث تطبق قوة شاقولية P في النقطة A ثم يتم الاشتقاق بالنسبة للقوة P والتعويض في معادلة الانتقال.



الشكل (64-2)

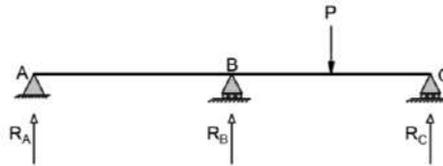
$$\begin{aligned}
 (\Delta_A)_v &= \sum \frac{L}{EA} \frac{\partial N}{\partial P} N = 2 \left[ \frac{-22.5 \times 0.75 \times 1.5 \times 10^3}{EA} \right] \\
 &+ \frac{37.5 \times 1.25 \times 2.5 \times 10^3}{EA} + \frac{-62.5 \times (-1.25) \times 10^3}{EA} \\
 &+ \frac{60 \times 1.5 \times 1.5 \times 10^3}{EA} = \frac{498.125 \times 10^3}{400 \times 10^{-6} \times 200 \times 10^9} = 0.00623m = 6.23mm \downarrow
 \end{aligned}$$

### 3-7-2 نظرية كاستليانو الثانية Castigliano's Second Theorem

تُعرف بطريقة العمل الأصغري Method of Least Work، وهي طريقة فعالة جداً في تحليل المنشآت غير المقررة ستاتيكيًا، كما أنها مناسبة من أجل المنشآت المركبة والشبكية على وجه الخصوص، وهي قابلة للتطبيق أيضاً في الجوائز والإطارات على الرغم من وجود طرائق أخرى أكثر عملية من أجل الجوائز والإطارات؛ مثل طريقة العزوم الثلاث وطريقة الانتقال والدوران. غير أنه من الصعب تطبيق هذه الطريقة من أجل التغيرات الحرارية وعيوب التصنيع وهبوط المساند.

في نظرية كاستليانو الأولى تم البرهان على أن المشتق الجزئي الأول للعمل الداخلي بالنسبة إلى القوة P المطبقة في نقطة ما من المنشأ (سواءً أكانت حقيقية أو وهمية) يساوي إلى الانتقال في اتجاه القوة P.

لنأخذ الجائز المستمر المبين بالشكل (65-2)، إذا تم حساب المشتق الجزئي الأول للعمل في هذا الجائز بالنسبة إلى رد الفعل RB يتم الحصول على الانتقال في النقطة B، ولكن هذا الانتقال يساوي إلى الصفر في الحقيقة بسبب وجود المسند.



الشكل (65-2)

$$\frac{\partial W}{\partial R_B} = 0 \quad (55-2)$$

هذا هو مبدأ نظرية كاستليانو الثانية، حيث يمكن كتابة عدة معادلات من نفس شكل المعادلة (2-55) من أجل كل رد فعل زائد في منشأ غير مقرر ستاتيكيًا، فيتم الحصول على جملة معادلات بعدة مجاهيل هي  $R_A, R_B, R_C, \dots, R_n$  ويتم حلها للحصول على قيم هذه المجاهيل وتقرير الجائز.

$$\frac{\partial W}{\partial R_A} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial R_B} = 0 \dots \frac{\partial W}{\partial R_n} = 0 \quad (56-2)$$

يُلاحظ من التحليل الإنشائي أنّ كل عنصر من عناصر منشأ ما لا يقوم بعمل زائد عن الحاجة، وأنّ العمل الكلي المنجز من قبل كل العناصر الملتقية في عقدة ما هو أقل ما يمكن.

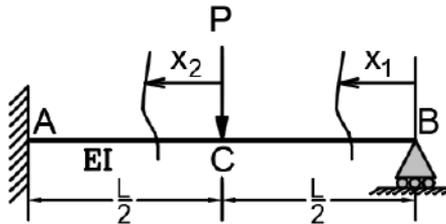
يمكن صياغة نظرية العمل الأصغري (كاستليانو الثانية) بناءً على ما سبق كما يلي:

"إنّ العمل الداخلي المنجز من قبل كل عنصر من عناصر منشأ غير مقرر ستاتيكيًا ومعرّض إلى جملة حمولات خارجية يساوي إلى أصغر قيمة ممكنة للحفاظ على التوازن من أجل مقاومة الحمولات الخارجية". عند تطبيق هذه النظرية يتم تحرير ردود الأفعال الزائدة ولكن  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ ، ويتم اشتقاق العمل بالنسبة لها. أحياناً نحتاج إلى اعتبار عنصر من العناصر أو أكثر عنصراً فائضاً وبإزالته أو إزالتهم يتم تحويل المنشأ إلى منشأ مقرر ستاتيكيًا، ويحدث هذا في الجمل الشبكية والمركبة حيث يتم تحرير العناصر الخاضعة إلى قوة محورية فقط، ويتم اشتقاق العمل الداخلي بالنسبة إلى القوة المحررة N الناتجة عن إزالة العنصر الفائض ومساواته مع الصفر ثم حساب N في المعادلة الناتجة.

$$\delta = \frac{\partial W}{\partial R} = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial R} dx = 0 \quad (57-2)$$

مثال (25-2):

أوجد رد الفعل في النقطة B من الجائز الظفري المبين بالشكل (2-66) بالاعتماد على نظرية كاستليانو الثانية.



الشكل (2-66)

إن الجائز غير مقرر من الدرجة الأولى ولتقريره يتم تحرير رد الفعل في المسند B.  
وتكون معادلات العزوم من أجل كل من المجال الأول والثاني.

$$x_1 = 0 \rightarrow \frac{L}{2} ; M_{x_1} = R_B \cdot x \Rightarrow \frac{\partial M_{x_1}}{\partial R_B} = x$$

$$x_2 = 0 \rightarrow \frac{L}{2} ; M_{x_2} = R_B \cdot \left(x + \frac{L}{2}\right) - P \cdot x \Rightarrow \frac{\partial M_{x_2}}{\partial R_B} = x + \frac{L}{2}$$

$$\int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial R_B} dx = 0$$

$$\frac{1}{EI} \int_0^{L/2} R_B x^2 dx + \frac{1}{EI} \int_0^{L/2} \left( R_B \left(x + \frac{L}{2}\right) - Px \right) \left(x + \frac{L}{2}\right) dx = 0 : EI \neq 0$$

$$R_B \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{L/2} + \int_0^{L/2} R_B \left(x + \frac{L}{2}\right)^2 dx - \int_0^{L/2} (Px) \left(x + \frac{L}{2}\right) dx = 0$$

$$R_B \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{L/2} + \int_0^{L/2} R_B \left(x^2 + xL + \frac{L^2}{4}\right) dx - P \int_0^{L/2} \left(x^2 + x \frac{L}{2}\right) dx = 0$$

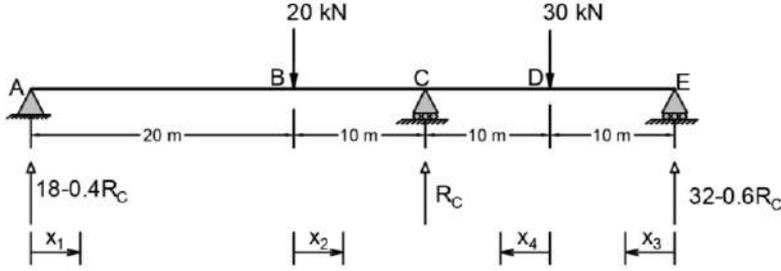
$$R_B \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{L/2} + R_B \left[ \frac{x^3}{3} + \frac{x^2 L}{2} + \frac{L^2}{4} x \right]_0^{L/2} - P \left[ \frac{x^3}{3} + \frac{x^2 L}{4} \right]_0^{L/2} = 0$$

$$R_B \frac{L^3}{24} + R_B \left( \frac{L^3}{24} + \frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8} \right) - P \left[ \frac{L^3}{24} + \frac{L^3}{16} \right] = 0$$

$$R_B \frac{16L^3}{48} = \frac{5PL^3}{48} \Rightarrow R_B = \frac{5}{16} P$$

مثال (26-2):

أوجد رد الفعل في النقطة C من الجائز الظفري المبين بالشكل (67-2) بالاعتماد على نظرية كاستليانو الثانية.



الشكل (67-2)

يمكن جدولة الحل كما في الجدول (16-2):

الجدول (16-2)

المجال	مجالات x	M	$\frac{\partial M}{\partial R_C}$	$\int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial R_C} dx = 0$
A → B	$x_1 : 0 \rightarrow 20$	$18x - 0.4R_C x$	$-0.4x$	$\int_0^{20} (-7.2x^2 + 0.16R_C x^2) dx$
B → C	$x_2 : 0 \rightarrow 10$	$-2x - 0.4R_C x$ $-8R_C + 360$	$-0.4x - 8$	$\int_0^{10} \begin{pmatrix} 0.8x^2 + 0.16R_C x^2 + 6.4R_C x \\ -128x + 64R_C - 2880 \end{pmatrix} dx$
E → D	$x_3 : 0 \rightarrow 10$	$32x - 0.6R_C x$	$-0.6x$	$\int_0^{10} (-19.2x^2 + 0.36R_C x^2) dx$
D → C	$x_4 : 0 \rightarrow 10$	$2x - 0.6R_C x$ $-6R_C + 320$	$-0.6x - 6$	$\int_0^{10} \begin{pmatrix} 1.2x^2 + 0.36R_C x^2 - 7.2R_C x \\ -204x + 36R_C - 1920 \end{pmatrix} dx$

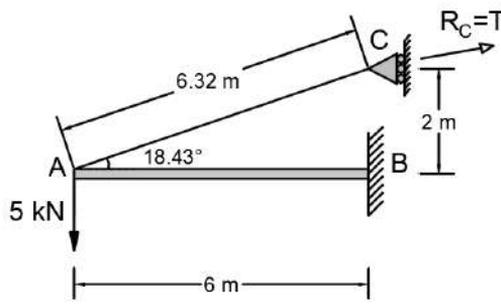
بإجراء التكاملات وتعويض حدود التكامل يتم الحصول على المعادلة.

$$R_C = 37.6 \text{ kN} \uparrow$$

مثال (27-2):

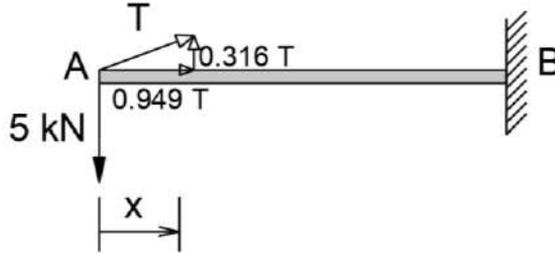
أوجد ردود الأفعال والقوة المحورية الشاذة في الشدّاد الفولاذي support cable من المنشأ المركّب composite structure المبين بالشكل (2-68)، مع الأخذ بالحسبان كل من التشوهات الانعطافية والمحورية.

مساحة مقطع الشدّاد  $A_c = 2 \times 10^{-4} m^2$  املى المرونة الطولاني لمادة الشدّاد  $E_c = 200 \times 10^6 kN/m^2$  ، مساحة مقطع الجائز  $A_b = 0.06 m^2$  ، عزم عطالة الجائز  $I_b = 5 \times 10^{-4} m^4$  عامل المرونة الطولاني لمادة الجائز  $E_b = 9.65 \times 10^6 kN/m^2$  .



الشكل (2-68)

بكتابة كل من معادلة العزم والقوة المحورية بدلالة القوة الشاذة T:



الشكل (2-69)

$$x = 0 \rightarrow 6; M_x = 0.316T \cdot x - 5x$$

$$N_x = 0.949T$$

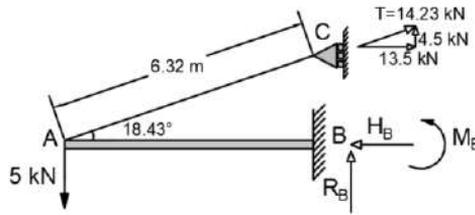
$$\Delta_C = \int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial T} dx + \int_0^L \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial T} dx = 0$$

$$\frac{1}{E_b I_b} \int_0^6 (0.316x)(0.316xT - 5x) dx + \frac{1}{E_b A_b} \int_0^6 (-0.949)(-0.949T) dx$$

$$+ \frac{1}{E_c A_c} \int_0^{6.32} 1 \times T dx = 0$$

$$\frac{1}{E_b I_b} \left[ \frac{(0.316^2 x^3 T)}{3} - \frac{0.316 \times 5x^3}{3} \right]_0^6 + \frac{1}{E_b A_b} [0.949^2 T \cdot x]_0^6 + \frac{1}{E_c A_c} [T \cdot x]_0^{6.32} = 0$$

$$1.49T - 23.58 + 9.33 \times 10^{-3} T + 0.158T \Rightarrow T = 14.23 \text{ kN}$$



الشكل (70-2)

ردود الأفعال في الوثيقة:

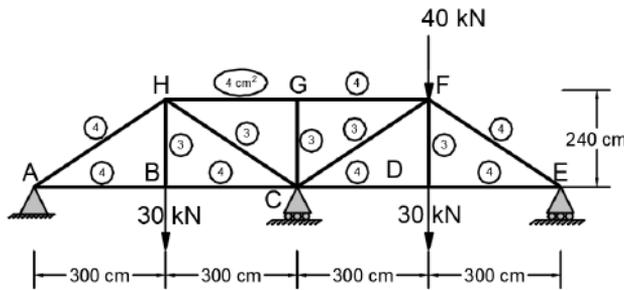
$$+ \curvearrowleft: \sum M_B = 0 \Rightarrow M_B = -13.5 \times 2 + 5 \times 6 = 3 \text{ kN.m}$$

$$+ \uparrow: \sum F_y = 0 \Rightarrow R_B = 5 - R_C \sin \theta = 0.5 \text{ kN} \uparrow$$

$$+ \rightarrow: \sum F_x = 0 \Rightarrow H_B = R_C \cos \theta = -13.5 \text{ kN} \leftarrow$$

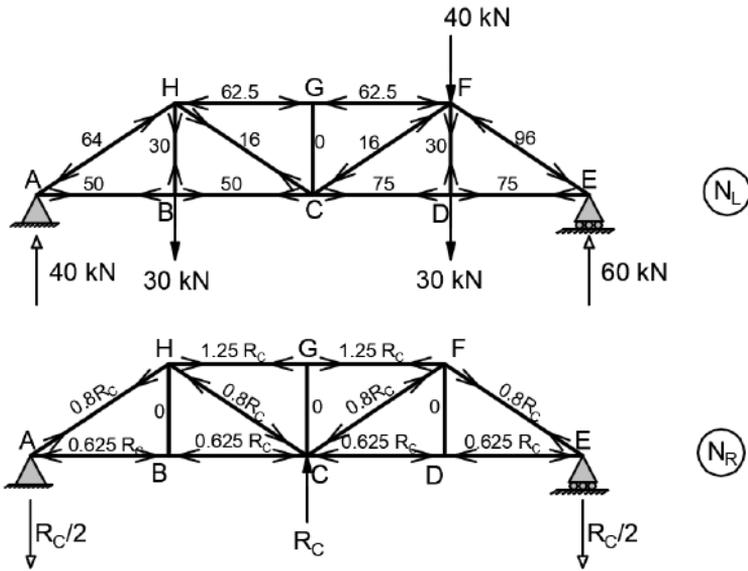
مثال (28-2):

حلّ المنشأ الشبكي المبين بالشكل (71-2) باستخدام طريقة العمل الأصغري، علماً بأنّ مساحات العناصر موضحة على الشكل داخل الدوائر.



الشكل (71-2)

يتم تقرير المنشأ بتحرير رد الفعل الزائد في C وتكون قيم القوى في العناصر تحت تأثير القوى الخارجية وتحت تأثير رد الفعل الفائض  $R_C$  كما في الشكل (72-2).



الشكل (72-2)

وتكون قيم  $N$  الكلية عبارة عن مجموع  $N_L$  و  $N_R$ ، يمكن تلخيص النتائج في الجدول (17-2).

الجدول (17-2)

$\frac{N.L}{A} \frac{\partial N}{\partial R_C}$	$\frac{\partial N}{\partial R_C}$	$N(\text{kN})$	$L/A$	$A$ ( $\text{cm}^2$ )	$L$ ( $\text{cm}$ )	العنصر ر
$-2345 + 29.3R_C$	$-0.625$	$50 - 0.625R_C$	75	4	300	AB
$-2345 + 29.3R_C$	$-0.625$	$50 - 0.625R_C$	75	4	300	BC
$-3520 + 29.3R_C$	$-0.625$	$75 - 0.625R_C$	75	4	300	CD
$-3520 + 29.3R_C$	$-0.625$	$75 - 0.625R_C$	75	4	300	DE
$-4915 + 61.4R_C$	0.8	$-64 + 0.8R_C$	96	4	384	AH
$-5860 + 117.2R_C$	1.25	$-62.5 + 1.25R_C$	75	4	300	HG
$-5860 + 117.2R_C$	1.25	$-62.5 + 1.25R_C$	75	4	300	GF

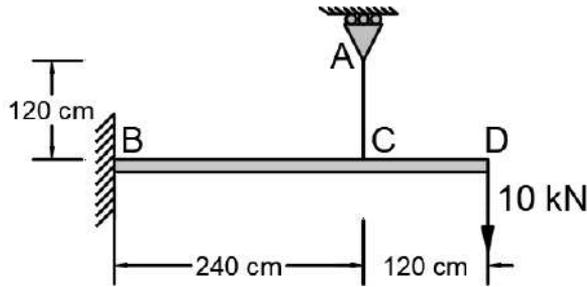
$-7373+61.4R_C$	0.8	$-96+0.8R_C$	96	4	384	FE
0+0	0	30+0	80	3	240	HB
$-1638+81.9R_C$	-0.8	$16-0.8R_C$	12	3	384	HC
0+0	0	0+0	80	3	240	GC
$1638+81.9R_C$	-0.8	$-16-0.8R_C$	12	3	384	GF
0+0	0	30+0	80	3	240	FD
$\sum -35738+638.2R_C$						

$$\Delta_C = \frac{\partial W}{\partial R_C} = \frac{N.L}{EA} \frac{\partial N}{\partial R_C} = \sum -35738+638.2R_C = 0$$

$$R_C = 56kN \uparrow$$

مثال (29-2):

أوجد القوة المحورية في الشدّاد الفولاذي AC من المنشأ المبين بالشكل (73-2) وذلك بإهمال التشوهات المحورية في الجائز BD علماً بأن مساحة مقطع الشدّاد  $A_C = 0.6cm^2$  عامل المرونة الطولاني لمادة الشدّاد  $E_C = 29 \times 10^3 kN/cm^2$  ، عزم عطالة الجائز  $I_b = 1728cm^4$  عامل المرونة الطولاني لمادة الجائز  $E_b = 1.5 \times 10^3 kN/cm^2$  .



الشكل (73-2)

بتحرير الشدّاد يتم تقرير المنشأ والحصول على القوة المحورية T ويكون العمل المنجز عبارة عن مجموع كل من العمل الناتج عن القوة المحورية في الشدّاد والعمل الناتج عن عزم الانعطاف في الجائز BD، ثم يتم حساب المشتق بالنسبة للقوة المحورية T.

• دراسة الشدّاد AC:

الجدول (18-2)

$\frac{N.L}{EA} \frac{\partial N}{\partial T}$	$\frac{\partial N}{\partial T}$	N(kN)	$\frac{L}{EA}$	$\frac{N}{A}$	A (cm <sup>2</sup> )	L (cm)	العنصر
$6.9 \times 10^6 T$	1	T	$6.9 \times 10^6$	200	0.6	120	AC

• دراسة العنصر الانحنائي BD حيث  $EI = 1.5 \times 10^6 \text{ kN.cm}^2$

الجدول (19-2)

$\int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial T} dx$	$M \frac{\partial M}{\partial T}$	$\frac{\partial M}{\partial T}$	M(kN.m)	مجاالت x	المجال
0	0	0	-10x	0 → 1.2m	D → C
$\int_0^{2.4} (T.x^2 - 10x^2 - 12x) \frac{dx}{EI}$ $= \frac{4.608T - 80.64}{EI}$	$T.x^2 - 10x^2 - 12x$	x	$T.x - 10x - 12$	0 → 2.4m	C → B

$$\int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial T} dx + \frac{N.L}{EA} \frac{\partial N}{\partial T} = \frac{1}{10^6} \left[ \frac{4.608T}{1.5 \times 1728 \times 10^{-4}} - \frac{80.64}{1.5 \times 1728 \times 10^{-4}} + 6.9T \right] = 0$$

$$= 17.78T - 311.04 + 6.9T = 0$$

$$T = 12.6 \text{ kN}$$



## الفصل الثالث

### طريقة العزوم الثلاثة Three Moments Method

#### 1-3 مقدمة:

إنّ طريقة العزوم الثلاثة هي إحدى الطرائق الكلاسيكية في تحليل المنشآت غير المقررة ستاتيكياً. نشرت هذه الطريقة عام 1855 من قبل المهندس الفرنسي Bertot ثم تم تطويرها من قبل Calpeyron عام 1857، ثم من قبل Bresse عام 1862 وكلاهما فرنسيان أيضاً، لذلك تُعرف النظرية أيضاً بنظرية كلايرون.

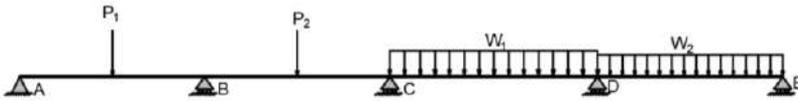
إنّ النظرية المقدمة عبارة عن إيجاد علاقات بين عزوم المساند في الجوائز المستمرة، وعادة تطبق على جوائز ذات مقاطع عرضية ثابتة (عطالة ثابتة) في المجاز الواحد (بين مسندين). على الرغم من أنه يمكن تطبيق هذه الطريقة على مجازات ذات مقاطع متغيرة إلا أنّ الحسابات تصبح معقّدة للغاية، وبالتالي القيمة العملية غير مجدية في هذه الحالة.

#### 2-3 مبدأ طريقة العزوم الثلاثة:

إنّ الهدف هو البحث عن علاقة تربط العزوم السالبة في المساند الداخلية. إنّ طريقة الجائز البديل Conjugate Beam تعدّ طريقة ملائمة للوصول إلى هكذا علاقة. تطبق المعادلات الناتجة على العزوم السالبة في ثلاثة مساند متتالية من جائز مستمر بشرط كون الجائز مستمراً بين هذه المساند، أي لا يوجد مفاصل أو انقطاع في الاستمرارية بينها، فمثلاً بدراسة الجائز المستمر المبين بالشكل (1-3)، تُكتب معادلات العزوم الثلاثة كما يلي:

- من أجل العزوم في المساند الثلاثة  $A, B, C$  وهي  $M_A, M_B, M_C$ .
- وأيضاً من أجل العزوم في المساند الثلاثة  $B, C, D$  وهي  $M_B, M_C, M_D$ .
- و من أجل العزوم في المساند الثلاثة  $C, D, E$  وهي  $M_C, M_D, M_E$ .

وبما أنّ المسندين في النقطة  $A$  والنقطة  $E$  طرفيان فإنّ العزم ينعدم عندهما، وتكون المجاهيل المتبقية هي  $M_B, M_C, M_D$  أي أنه يتم الحصول على ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل. كذلك الأمر يمكن تطبيق المعادلات من أجل مساند موثوقة كما سيتم عرضه لاحقاً.

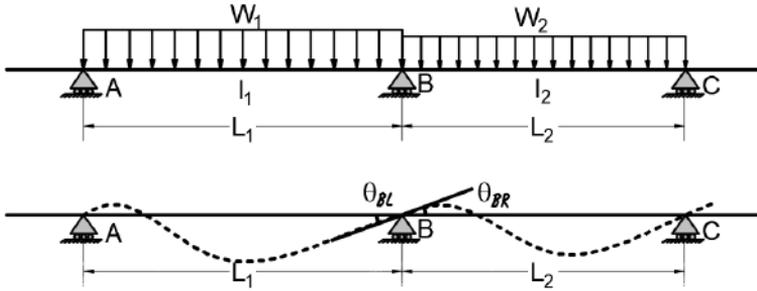


الشكل (1-3)

### 3-3 استنتاج معادلة العزوم الثلاثة:

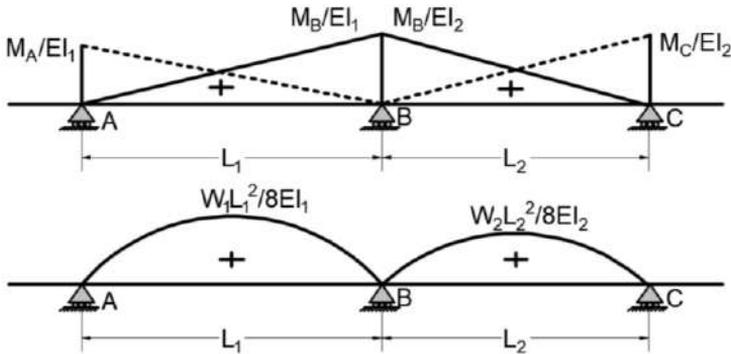
يبين الشكل (2-3) جزءاً من جائز مستمر، وهذا الجزء مؤلف من مجازين  $AB, BC$  لهما عتالة مختلفة  $I_1, I_2$  وحمولة موزعة بانتظام مختلفة هي  $W_1, W_2$  على الترتيب. بدراسة الشكل المتشوه Deformed Shape (الخط المرن) لهذين المجازين يُلاحظ أنّ الدوران في المسند  $B$  متساوٍ من جهة اليمين وجهة اليسار ومتعاكس بالإشارة، أي:

$$\theta_{BL} = -\theta_{BR} \quad (1-3)$$



الشكل (2-3)

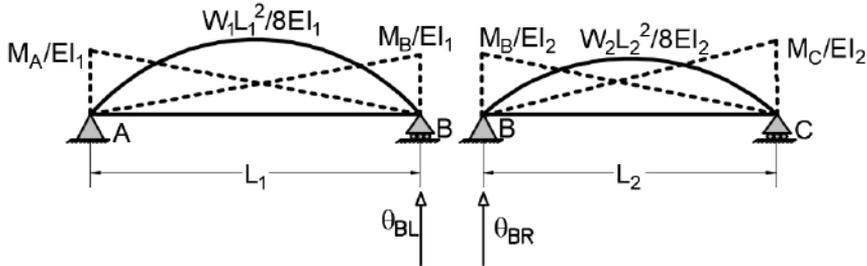
للحصول على كل من قيمة  $\theta_{BL}$  و  $\theta_{BR}$  يتم تحميل المجازين بمخطط عزم الانعطاف مقسوماً على  $EI$  بحسب طريقة الجائز البديل، ويكون مخطط عزم الانعطاف عبارة عن جزئين الأول ناتج عن الحمولة الموزعة بانتظام والثاني ناتج عن العزوم السالبة في المساند بحسب مبدأ تتصد الأثار وتكون كما في الشكل (3-3)، حيث تم افتراض العزوم في المساند موجبة مبدئياً (بحسب قاعدة شد الألياف) وبعد الحساب تنتج سالبة في الحالة العامة.



الشكل (3-3)

- إيجاد  $\theta_{BL}$  من المجاز  $AB$  :

بحسب طريقة الجائز البديل فإن  $\theta_{BL}$  تساوي إلى القص في المسند B للطرف اليساري، الشكل (4-3).



الشكل (4-3)

$$\sum M_A = V_{BL} \cdot L_1$$

$$\theta_{BL} = \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{M_A}{EI_1} \right) (L_1) \left( \frac{1}{3} L_1 \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{M_B}{EI_1} \right) (L_1) \left( \frac{2}{3} L_1 \right) + \frac{2}{3} \left( \frac{W_1 L_1^2}{8EI_1} \right) (L_1) \left( \frac{1}{2} L_1 \right)}{L_1}$$

$$\theta_{BL} = \frac{M_A L_1}{6EI_1} + \frac{M_B L_1}{3EI_1} + \frac{W_1 L_1^3}{24EI_1} \quad (2-3)$$

• إيجاد  $\theta_{BR}$  من المجاز BC :

بحسب طريقة الجائز البديل فإن  $\theta_{BR}$  تساوي إلى القص في المسند B للطرف اليميني، الشكل (4-3).

$$\sum M_C = V_{BR} \cdot L_2$$

$$\theta_{BR} = \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{M_C}{EI_2} \right) (L_2) \left( \frac{1}{3} L_2 \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{M_B}{EI_2} \right) (L_2) \left( \frac{2}{3} L_2 \right) + \frac{2}{3} \left( \frac{W_2 L_2^2}{8EI_2} \right) (L_2) \left( \frac{1}{2} L_2 \right)}{L_2}$$

$$\theta_{BR} = \frac{M_C L_2}{6EI_2} + \frac{M_B L_2}{3EI_2} + \frac{W_2 L_2^3}{24EI_2} \quad (3-3)$$

بما أنَّ الزاويتين متساويتين بالقيمة ومتعاكستين بالإشارة بحسب المعادلة (3-1) يكون:

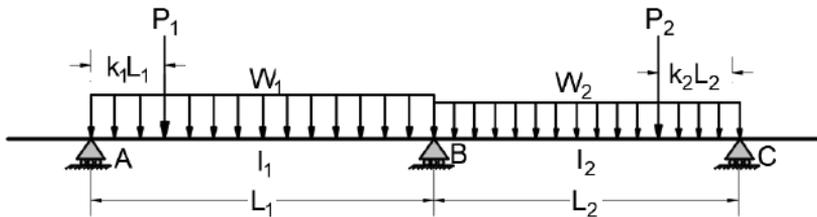
$$\frac{M_A L_1}{6EI_1} + \frac{M_B L_1}{3EI_1} + \frac{W_1 L_1^3}{24EI_1} = -\frac{M_C L_2}{6EI_2} - \frac{M_B L_2}{3EI_2} - \frac{W_2 L_2^3}{24EI_2}$$

$$\frac{M_A L_1}{6EI_1} + \frac{M_B}{3E} \left( \frac{L_1}{I_1} + \frac{L_2}{I_2} \right) + \frac{M_C L_2}{6EI_2} = -\frac{W_1 L_1^3}{24EI_1} - \frac{W_2 L_2^3}{24EI_2}$$

بما أنّ الجائز مصنوع من نفس المادة فإنّ قيمة معامل المرونة الطولاني E ثابتة ويمكن اختصارها بين طرفي المعادلة، وبأخذ الجداء بالرقم 6/ يكون:

$$\frac{M_A L_1}{I_1} + 2M_B \left( \frac{L_1}{I_1} + \frac{L_2}{I_2} \right) + \frac{M_C L_2}{I_2} = -\frac{W_1 L_1^3}{4I_1} - \frac{W_2 L_2^3}{4I_2} \quad (4-3)$$

إنّ المعادلة (4-3) تمثّل معادلة العزوم الثلاثة من أجل حمولة موزعة بانتظام، ويمكن التعميم بسهولة من أجل حمولات مركّزة أيضاً، الشكل (5-3). إنّ مخطط عزم الانعطاف من أجل حمولة مركّزة هو مثلث وبالتالي يكون  $\frac{M}{EI}$  هو مثلث أيضاً، ويتم الحصول على المعادلة العامة (5-3).



الشكل (5-3)

$$\frac{M_A L_1}{I_1} + 2M_B \left( \frac{L_1}{I_1} + \frac{L_2}{I_2} \right) + \frac{M_C L_2}{I_2} = \quad (5-3)$$

$$- \sum \frac{P_1 L_1^2}{I_1} (k_1 - k_1^3) - \sum \frac{P_2 L_2^2}{I_2} (k_2 - k_2^3) - \frac{W_1 L_1^3}{4I_1} - \frac{W_2 L_2^3}{4I_2}$$

يمكن تبسيط المعادلة في حال كون عزم العطالة ثابتاً فتصبح كما في (6-3).

$$M_A L_1 + 2M_B (L_1 + L_2) + M_C L_2 = \quad (6-3)$$

$$- \sum P_1 L_1^2 (k_1 - k_1^3) - \sum P_2 L_2^2 (k_2 - k_2^3) - \frac{W_1 L_1^3}{4} - \frac{W_2 L_2^3}{4}$$

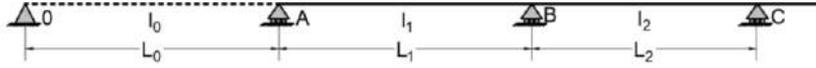
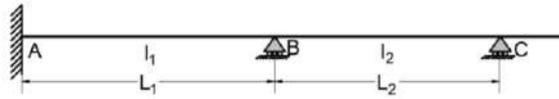
إنّ كلاً من  $k_1, k_2$  هي نسبة بعد الحمولة المركّزة عن المسند الطرفي في المعادلة.

في حال كون وجود وثاقات بدلاً من المساند الطرفية، بحيث لا يندم العزم فيها، فإنّ عدد المجاهيل يُصبح أكبر من عدد المعادلات. وبما أنّ الوثاقة هي عنصر صلابته لا نهائية كونها تمنع الحركة كلياً فإنّه يمكن

التعويض عنها بمجاز وهمي طوله صغير جداً وذو عطالة لا نهائية  $I_0 = \infty$

وطول افتراضي هو  $L_0$  بهذه الطريقة يتم الحصول على مجاز إضافي لتطبيق معادلة العزوم الثلاثة ويتم

الحصول على معادلة إضافية أيضاً، الشكل (6-3).

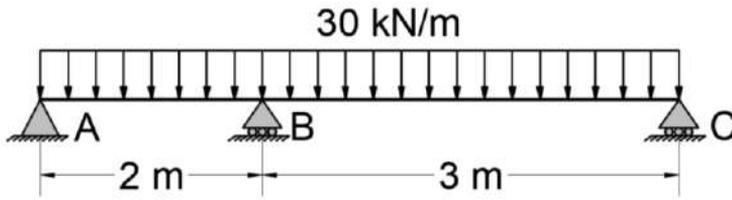


الشكل (6-3)

### 4-3 أمثلة تطبيقية:

#### مثال (1-3):

بالاستفادة من نظرية العزوم الثلاثة أوجد عزوم المساند في المنشأ المبين بالشكل (7-3)، ثم ارسم كلاً من مخطط القوى القاطعة Shear Force Diagram ومخطط عزم الانعطاف Bending Moment Diagram.



الشكل (7-3)

إنّ علاقة العزوم الثلاثة من أجل عزم عطالة ثابت تعطى بالمعادلة (6-3).

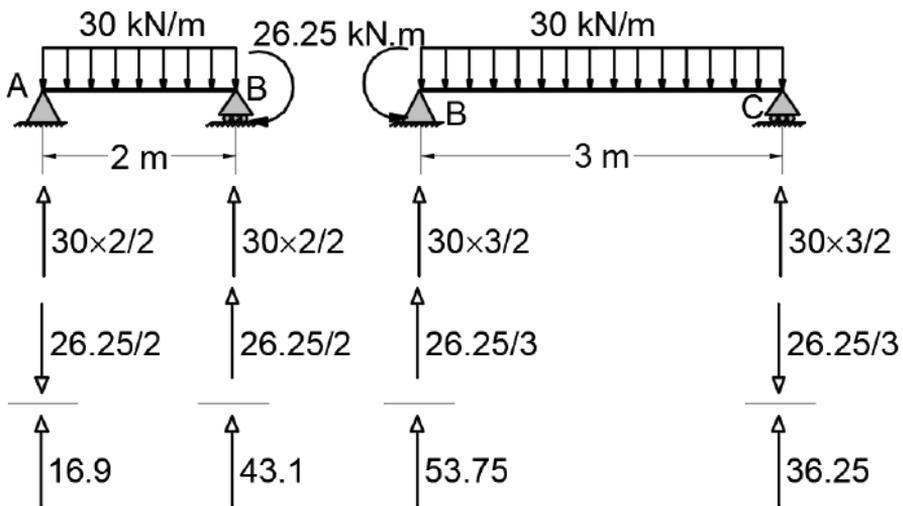
$$M_A L_1 + 2M_B (L_1 + L_2) + M_C L_2 = -\sum P_1 L_1^2 (k_1 - k_1^3) - \sum P_2 L_2^2 (k_2 - k_2^3) - \frac{W_1 L_1^3}{4} - \frac{W_2 L_2^3}{4}$$

وبما أنّ العزوم الطرفية معدومة، ولا توجد قوى مركزة يكون:

$$2M_B (2 + 3) = -\frac{30 \times 2^3}{4} - \frac{30 \times 3^3}{4}$$

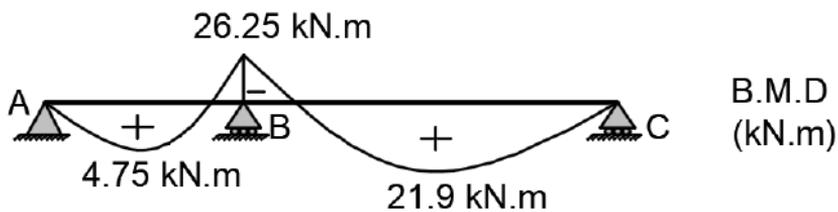
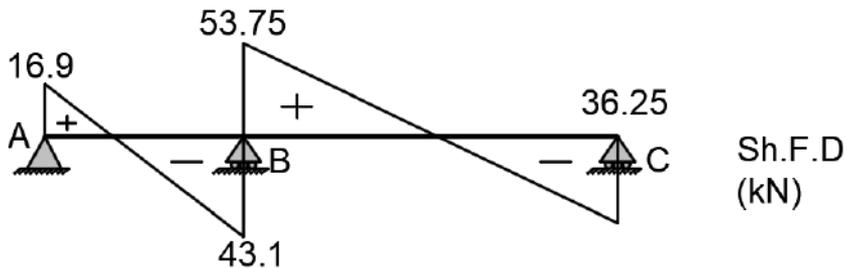
$$M_B = -26.25 \text{ kN.m}$$

يفصل الجائز إلى مجازين وتعويض قيمة العزم الوسطي الناتجة، يمكن إيجاد قوى القص في كل مجاز على حدة كما في الشكل (8-3).



الشكل (8-3)

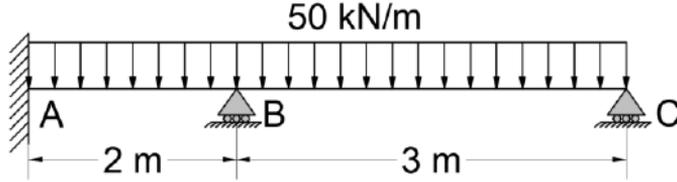
وتكون مخططات القوى القاطعة وعزم الانعطاف كما في الشكل (9-3).



الشكل (9-3)

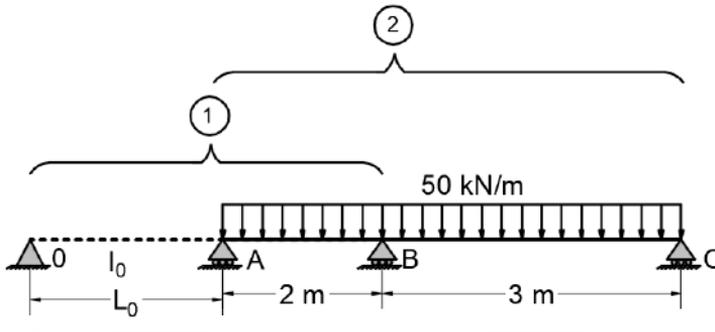
### مثال (2-3):

ارسم كلاً من مخطط القوى القاطعة Shear Force Diagram ومخطط عزم الانعطاف Bending Moment Diagram وذلك بالاستفادة من نظرية العزوم الثلاثة من أجل المنشأ المبين بالشكل (10-3).



الشكل (10-3)

من أجل حل مشكلة الوثيقة يتم استبدالها بمجاز وهمي طوله الافتراضي  $L_0$  وعطالته  $I_0 = \infty$ ، الشكل (11-3).



الشكل (11-3)

إن علاقة العزوم الثلاثة في الحالة العامة تعطى بالمعادلة (5-3).

$$\frac{M_A L_1}{I_1} + 2M_B \left( \frac{L_1}{I_1} + \frac{L_2}{I_2} \right) + \frac{M_C L_2}{I_2} =$$

$$-\sum \frac{P_1 L_1^2}{I_1} (k_1 - k_1^3) - \sum \frac{P_2 L_2^2}{I_2} (k_2 - k_2^3) - \frac{W_1 L_1^3}{4I_1} - \frac{W_2 L_2^3}{4I_2}$$

$$M_0 L_0 + 2M_A (L_0 + L_1) + M_B L_1 = -\frac{W_0 L_0^3}{4} - \frac{W_1 L_1^3}{4}$$

$$2M_A \times 2 + 2M_B = -\frac{50 \times 2^3}{4}$$

$$4M_A + 2M_B = -100 \quad (I)$$

$$2M_A + 2M_B(2+3) = -\frac{50 \times 2^3}{4} - \frac{50 \times 3^3}{4}$$

$$2M_A + 10M_B = -437.5 \quad (II)$$

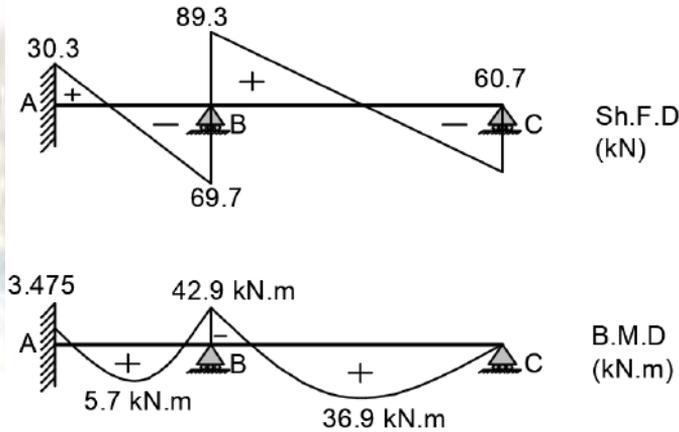
تم الحصول على معادلتين بمجهولين  $M_A, M_B$  بحلها يكون:

$$M_A = -3.475 \text{ kN.m} \quad M_B = -42.9 \text{ kN.m}$$

وتكون ردود الأفعال في المساند:

$$R_A = 30.3 \text{ kN} \uparrow, R_B = 159 \text{ kN} \uparrow, R_C = 60.7 \text{ kN} \uparrow$$

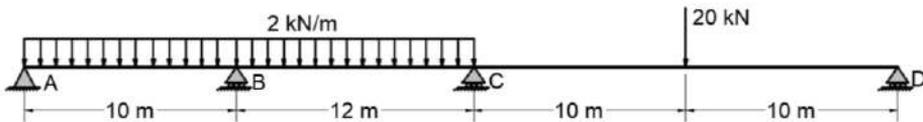
وبذلك يمكن رسم مخططات القوى القاطعة وعزم الانعطاف فتكون كما في الشكل (12-3).



الشكل (12-3)

مثال (3-3):

ارسم كلاً من مخطط عزم الانعطاف والقوى القاطعة من أجل الجائز المبين بالشكل (13-3)، وذلك بالاعتماد على طريقة العزوم الثلاثة. علماً بأن عزم عطالة الجائز ثابت على كل المجازات.



الشكل (13-3)

بتطبيق معادلة العزوم الثلاثة من أجل عزم عطالة ثابت (6-3) على المجازين ABC يتم الحصول على ما يلي:

$$\begin{aligned}
 M_A L_1 + 2M_B(L_1 + L_2) + M_C L_2 = \\
 - \sum P_1 L_1^2 (k_1 - k_1^3) - \sum P_2 L_2^2 (k_2 - k_2^3) - \frac{W_1 L_1^3}{4} - \frac{W_2 L_2^3}{4} \\
 2M_B(10+12) + 12M_C = -\frac{2 \times 10^3}{4} - \frac{2 \times 12^3}{4} \\
 44M_B + 12M_C = -1364 \quad (I)
 \end{aligned}$$

ثم بتطبيق المعادلة على المجازين BCD:

$$\begin{aligned}
 M_B L_1 + 2M_C(L_1 + L_2) + M_D L_2 = \\
 - \sum P_2 L_2^2 (k_2 - k_2^3) - \sum P_3 L_3^2 (k_3 - k_3^3) - \frac{W_2 L_2^3}{4} - \frac{W_3 L_3^3}{4} \\
 12M_B + 2M_C(12+20) = -20 \times 20^2 \times \left( \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} \right)^3 \right) - \frac{2 \times 12^3}{4} \\
 12M_B + 64M_C = -3864 \quad (II)
 \end{aligned}$$

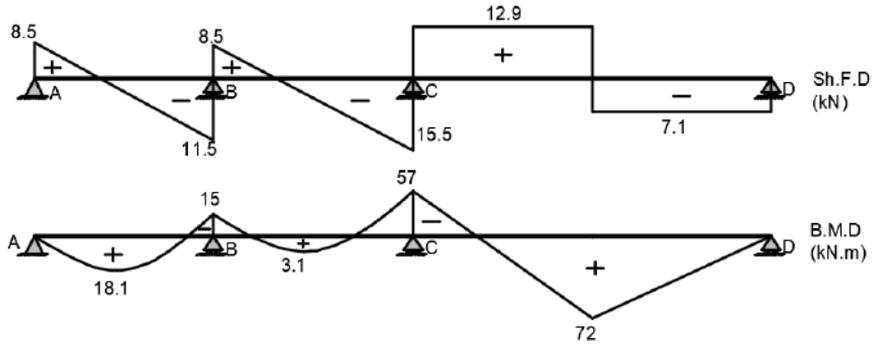
بالحل المشترك لجملة المعادلتين يتم الحصول على العزمين السالبيين في المسندين الوسيطين وبالتالي يتم تقرير الجائز غير المقرر من الدرجة الثانية.

$$M_B = -15.3kN.m \quad M_C = -57.5kN.m$$

وتكون ردود الأفعال في المساند:

$$R_A = 8.5kN \uparrow, R_B = 28.4kN \uparrow, R_C = 20kN \uparrow, R_D = 7.1kN$$

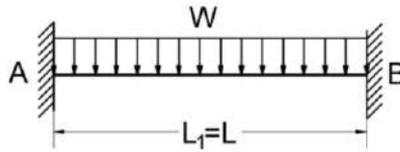
وبذلك يمكن رسم مخططات القوى القاطعة وعزم الانعطاف فتكون كما في الشكل (3-14).



الشكل (14-3)

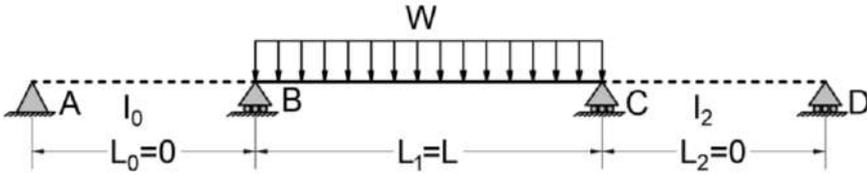
مثال (4-3):

أوجد قيم العزوم في الوثاقتين من الجائز الموثوق الميّن بالشكل (15-3).



الشكل (15-3)

يتم استبدال كل من الوثاقتين بمجاز وهمي عطالته لا نهائية كما هو موضّح بالشكل (16-3).



الشكل (16-3)

بتطبيق معادلة العزوم الثلاثة على المجازين ABC يتم الحصول على ما يلي:

$$M_A L_1 + 2M_B (L_1 + L_2) + M_C L_2 = -\frac{W_1 L_1^3}{4} - \frac{W_2 L_2^3}{4}$$

$$2M_B L + M_C L = -\frac{W \cdot L^3}{4} \quad (I)$$

$$M_B L_2 + 2M_C (L_1 + L_2) + M_D L_3 = -\frac{W_2 L_2^3}{4} - \frac{W_3 L_3^3}{4}$$

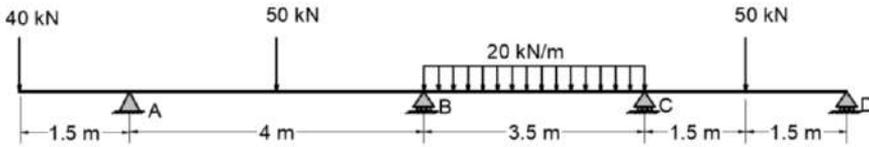
$$M_B L + 2M_C L = -\frac{W.L^3}{4} \quad (II)$$

بالحل المشترك لجملة المعادلتين يتم الحصول على:

$$M_B = -\frac{WL^2}{12} \quad M_C = -\frac{WL^2}{12}$$

**مثال (3-5):**

بالاعتماد على معادلة العزوم الثلاثة قرر الجائز المبين بالشكل (17-3) ثم ارسم مخطط القوى القاصّة ومخطط عزم الانعطاف.



الشكل (17-3)

بسبب وجود الظفر يسار الجائز فإنّ العزم في المسند A  $M_A = -40 \times 1.5 = -60 \text{ kN.m}$  بتطبيق معادلة العزوم الثلاثة من أجل عزم عطالة ثابت (3-6) على المجازين ABC يتم الحصول على ما يلي:

$$\begin{aligned} M_A L_1 + 2M_B(L_1 + L_2) + M_C L_2 = & \\ - \sum P_1 L_1^2 (k_1 - k_1^3) - \sum P_2 L_2^2 (k_2 - k_2^3) - \frac{W_1 L_1^3}{4} - \frac{W_2 L_2^3}{4} & \\ - 60 \times 4 + 2M_B(4 + 3.5) + 3.5M_C = -50 \times 4^2 \left( \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} \right)^3 \right) - \frac{20 \times 3.5^3}{4} & \\ 150M_B + 35M_C = -274.38 \quad (I) & \end{aligned}$$

ثم بتطبيق المعادلة على المجازين BCD:

$$\begin{aligned} M_B L_1 + 2M_C(L_1 + L_2) + M_D L_2 = & \\ - \sum P_2 L_2^2 (k_2 - k_2^3) - \sum P_3 L_3^2 (k_3 - k_3^3) - \frac{W_2 L_2^3}{4} - \frac{W_3 L_3^3}{4} & \end{aligned}$$

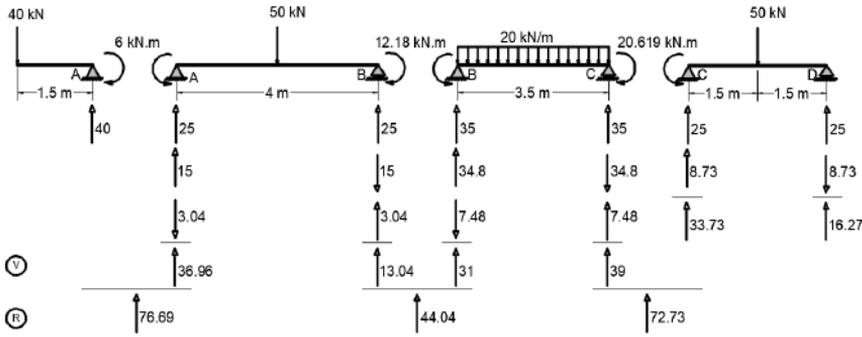
$$3.5M_B + 2M_C(3.5+3) = -50 \times 3^2 \times \left( \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} \right)^3 \right) - \frac{20 \times 3.5^3}{4}$$

$$35M_B + 130M_C = -383.125 \quad (II)$$

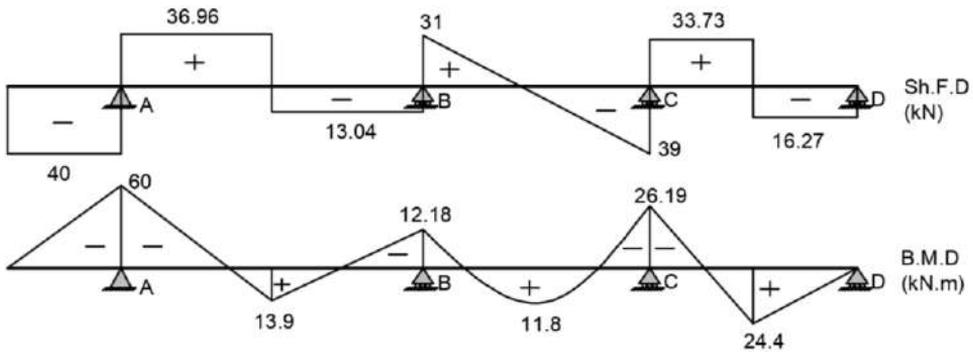
بالحل المشترك لجملة المعادلتين يتم الحصول على العزمين السالبيين في المسندين الوسيطين، وبالتالي يتم تقرير الجائز غير المقرر من الدرجة الثانية.

$$M_B = -12.18 \text{ kN.m} \quad M_C = -26.19 \text{ kN.m}$$

يتم فصل مجازات الجائز بحيث يحافظ كل مجاز على توازنه ثم نحسب القوى القاطعة وعزم الانعطاف لكل منها.



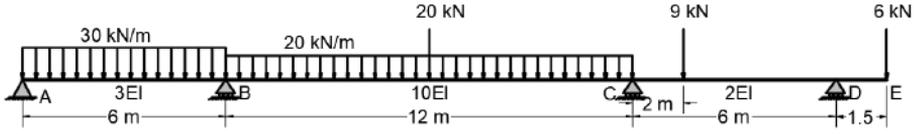
الشكل (18-3)



الشكل (19-3)

مثال (3-6):

أوجد العزوم في مساند المنشأ الميّن بالشكل (20-3) بالاعتماد على معادلة العزوم الثلاثة.



الشكل (20-3)

بما أن عتالة المجازات مختلفة فإنه يتم استخدام المعادلة (5-3):

• المجازان ABC:

$$\begin{aligned} \frac{M_A L_1}{I_1} + 2M_B \left( \frac{L_1}{I_1} + \frac{L_2}{I_2} \right) + \frac{M_C L_2}{I_2} = \\ - \sum \frac{P_1 L_1^2}{I_1} (k_1 - k_1^3) - \sum \frac{P_2 L_2^2}{I_2} (k_2 - k_2^3) - \frac{W_1 L_1^3}{4I_1} - \frac{W_2 L_2^3}{4I_2} \\ 2M_B \left( \frac{6}{3I} + \frac{12}{10I} \right) + M_C \frac{12}{10I} = -20 \frac{12^2}{10I} (0.375) - \frac{30 \times 6^3}{12I} - \frac{20 \times 12^3}{40I} \end{aligned}$$

$$6.4M_B + 1.2M_C = -108 - 540 - 864$$

$$6.4M_B + 1.2M_C = -1512 \quad (I)$$

• المجازان BCD:

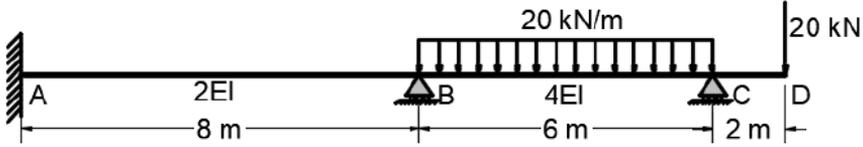
$$\begin{aligned} \frac{M_B L_1}{I_1} + 2M_C \left( \frac{L_1}{I_1} + \frac{L_2}{I_2} \right) + \frac{M_D L_2}{I_2} = \\ - \sum \frac{P_2 L_2^2}{I_2} (k_2 - k_2^3) - \sum \frac{P_3 L_3^2}{I_1} (k_3 - k_3^3) - \frac{W_2 L_2^3}{4I_2} - \frac{W_3 L_3^3}{4I_1} \\ M_B \frac{12}{10I} + 2M_C \left( \frac{12}{10I} + \frac{6}{2I} \right) - 9 \frac{6}{2I} = -\frac{20 \times 12^3}{40I} - 20 \frac{12^2}{10I} (0.375) \\ - 9 \frac{6^2}{2I} \left( \frac{2}{3} - \left( \frac{2}{3} \right)^3 \right) \end{aligned}$$

$$1.2M_B + 8.4M_C = 27 - 864 - 108 - 60 \quad 1.2M_B + 8.4M_C = -1005 \quad (II)$$

وتكون العزوم السالبة في المساند الوسطية:  $M_B = -219.7 \text{ kN.m}$   $M_C = -88.26 \text{ kN.m}$

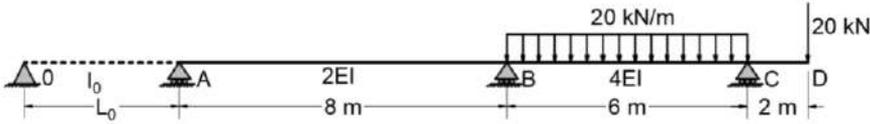
### مثال (7-3):

أوجد العزوم في مساند الجائز المستمر المبيّن بالشكل (21-3)، ثم ارسم مخططات القص وعزم الانعطاف.



الشكل (21-3)

بما أنّ الجائز موثوق في A يتم استبدال الوثاقّة بمجاز ذي عطالة لا نهائية من أجل الحصول على معادلة إضافية.



الشكل (22-3)

• معادلة العزوم الثلاثة في المجازين OAB:

$$\frac{M_0 L_0}{I_0} + 2M_A \left( \frac{L_0}{I_0} + \frac{L_1}{I_1} \right) + \frac{M_B L_1}{I_1} = 0$$

$$2M_A \left( 0 + \frac{8}{2I} \right) + \frac{M_B 8}{2I} = 0$$

$$2M_A + M_B = 0 \quad (I)$$

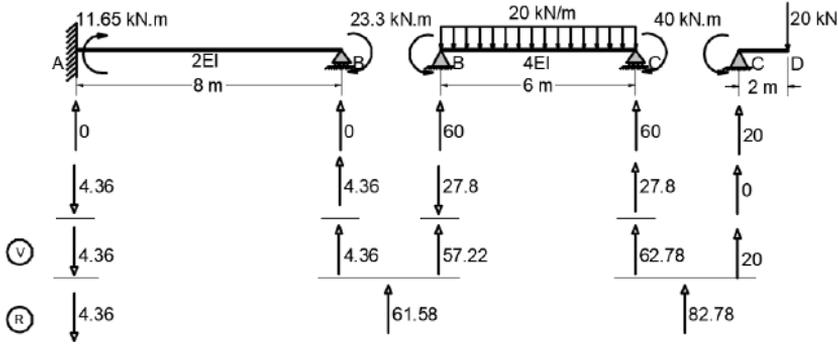
• معادلة العزوم الثلاثة في المجازين ABC:

$$\frac{M_A L_1}{I_1} + 2M_B \left( \frac{L_1}{I_1} + \frac{L_2}{I_2} \right) + \frac{M_C L_2}{I_2} = -\frac{W_2 L_2^3}{4I_2}$$

$$\frac{M_A 8}{2I} + 2M_B \left( \frac{8}{2I} + \frac{6}{4I} \right) + \frac{M_C 6}{4I} = -20 \frac{6^3}{4 \times 4I}$$

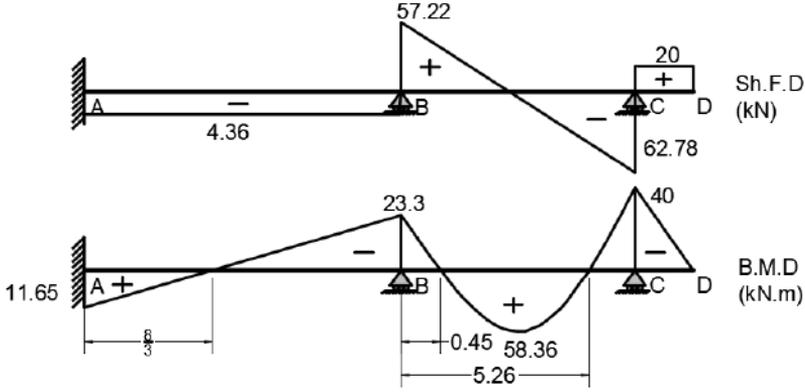
$$4M_A + 11M_B = -210 \quad (II)$$

وتكون العزوم في الوثاقّة A والمسند B:  $M_A = 11.65 \text{ kN.m}$      $M_B = -23.3 \text{ kN.m}$



الشكل (23-3)

وتكون مخططات القص وعزم الانعطاف.

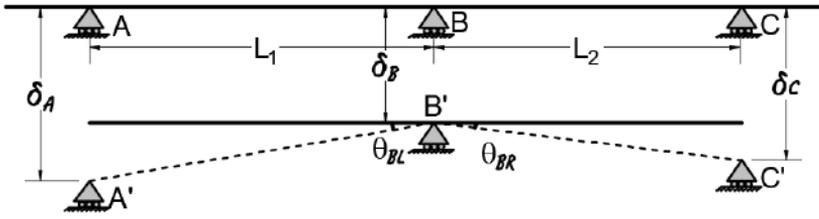


الشكل (24-3)

### 5-3 حالات خاصة:

#### 1-5-3 معادلة العزوم الثلاثة في حالة وجود هبوط في المساند:

قد تحدث تغيّرات في مواقع المساند بسبب الهبوط أو سوء التصنيع أو غير ذلك، إن أي هبوط في المساند الثلاثة في معادلة العزوم الثلاثة سوف يغيّر فيها، وذلك لأنه يغيّر قيمة الدوران  $\theta_{BL}$  و  $\theta_{BR}$  مثلاً بدراسة المجازين ABC من الجائز المبين بالشكل (25-3) والذين يُفترض حدوث هبوطات في مساندهما الثلاثة قدرها  $\delta_A, \delta_B, \delta_C$ .



الشكل (25-3)

برسم خط واصل بين المواقع الجديدة للمساند ABC يُلاحظ أنّ قيمة كل من زاويتي اليمين واليسار في المسند B تساوي:

$$\theta_{BL} = \frac{\delta_A - \delta_B}{L_1} \quad \theta_{BR} = \frac{\delta_C - \delta_B}{L_2}$$

حيث تم إلباس الزاوية بقيمة tangent الخاصة بها لصغرهما.

بافتراض كون الانتقال الموجب للأسفل تصبح قيم  $\theta_{BL}$  و  $\theta_{BR}$  من أجل جائز محمّل بحمولات مركزة وموزعة بانتظام كما يلي.

$$\theta_{BL} = \frac{M_A L_1}{6EI_1} + \frac{M_B L_1}{3EI_1} + \frac{W_1 L_1^3}{24EI_1} + \frac{\sum P_1 L_1^2}{6EI_1} (k_1 - k_1^3) + \frac{\delta_A - \delta_B}{L_1}$$

$$\theta_{BR} = \frac{M_C L_2}{6EI_2} + \frac{M_B L_2}{3EI_2} + \frac{W_2 L_2^3}{24EI_2} + \frac{\sum P_2 L_2^2}{6EI_2} (k_2 - k_2^3) + \frac{\delta_C - \delta_B}{L_2}$$

بما أنّ الزاويتان متساويتان بالقيمة ومتعاكستان بالإشارة بحسب المعادلة (1-3) يكون:

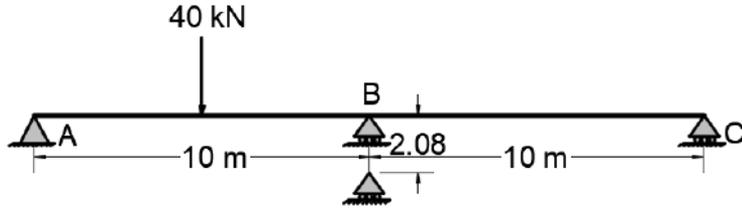
$$\frac{M_A L_1}{I_1} + 2M_B \left( \frac{L_1}{I_1} + \frac{L_2}{I_2} \right) + \frac{M_C L_2}{I_2} = -\frac{W_1 L_1^3}{4I_1} - \frac{W_2 L_2^3}{4I_2} \quad (7-3)$$

$$\frac{\sum P_1 L_1^2}{I_1} (k_1 - k_1^3) - \frac{\sum P_2 L_2^2}{I_2} (k_2 - k_2^3) - 6E \left( \frac{\delta_A - \delta_B}{L_1} + \frac{\delta_C - \delta_B}{L_2} \right)$$

#### • مثال تطبيقي:

ارسم كلاً من مخطط القوى القاطعة ومخطط عزم الانعطاف في الجائز ذي المجازين ABC المبين بالشكل (3-26) إذا كان المسند الوسطي B يهبط بمقدار 2.08cm حيث:

$$E = 29 \times 10^6 \text{ kN/cm}^2, I = 34.7 \text{ cm}^4$$



الشكل (26-3)

بالتعويض في المعادلة (7-3) من أجل المجازين ABC حيث قيم هبوطات المساند هي

$$\delta_A = 0, \delta_B = 0.0208m, \delta_C = 0$$

$$2M_B \left( \frac{10}{I} + \frac{10}{I} \right) = -40 \frac{10^2}{I} (0.375) - 6E \left( \frac{0 - 0.0208}{10} + \frac{0 - 0.0208}{10} \right)$$

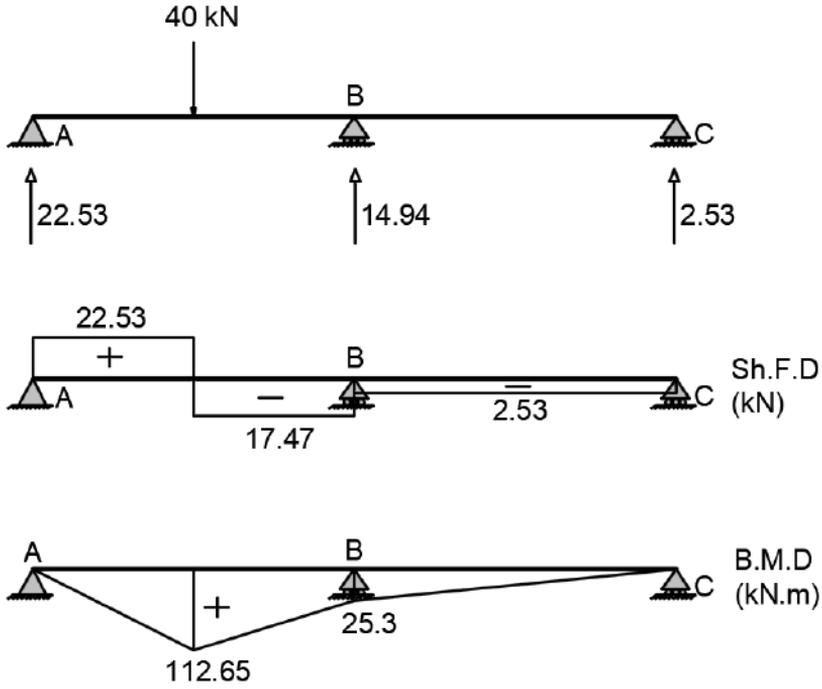
$$40M_B = -1500 + 0.02496EI$$

$$M_B = -37.5 + 0.000624EI$$

$$M_B = -37.5 + 0.000624 \times \frac{29 \times 10^6 \times 34.7}{10^4}$$

$$M_B = 25.3kN.m$$

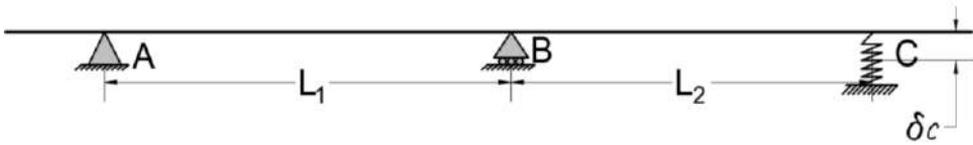
وتكون ردود الأفعال وكل من مخطط القص وعزم الانعطاف كما في الشكل (27-3).



الشكل (27-3)

### 3-5-2 معادلة العزوم الثلاثة في حالة وجود نوابض:

في هذه الحالة يُعاني النابض من هبوط يتناسب عكساً مع صلابته  $k$  وبالتالي يمكن مكافأة النابض بمسند يعاني من هبوط قدره  $\delta = \frac{R}{k}$  وتؤول معادلة العزوم الثلاثة إلى حالة مسند يعاني من هبوط كما في المثال السابق.

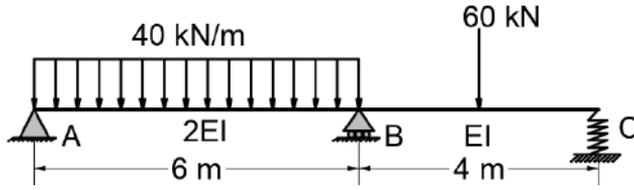


الشكل (28-3)

#### • مثال تطبيقي:

أوجد قيم العزوم في مساند الجائز المبين بالشكل (29-3) إذا كان الجائز يستند في C على نابض

$$.k = \frac{EI}{10}$$



الشكل (29-3)

بالتعويض في المعادلة (7-3)

$$\frac{M_A L_1}{I_1} + 2M_B \left( \frac{L_1}{I_1} + \frac{L_2}{I_2} \right) + \frac{M_C L_2}{I_2} = -\frac{W_1 L_1^3}{4I_1} - \frac{W_2 L_2^3}{4I_2} - \frac{\sum P_1 L_1^2}{I_1} (k_1 - k_1^3) - \frac{\sum P_2 L_2^2}{I_2} (k_2 - k_2^3) - 6E \left( \frac{\delta_A - \delta_B}{L_1} + \frac{\delta_C - \delta_B}{L_2} \right)$$

$$\frac{M_A 6}{2I} + 2M_B \left( \frac{6}{2I} + \frac{4}{I} \right) + \frac{M_C 4}{I} = -\frac{40 \times 6^3}{4 \times 2I} - \frac{60 \times 4^2}{I} (0.375) - 6E \left( \frac{\delta_A - \delta_B}{6} + \frac{\delta_C - \delta_B}{4} \right)$$

$$\frac{14M_B}{I} = -\frac{1440}{I} - 6E \left( \frac{R_C}{4k} \right), \quad k = \frac{EI}{10}$$

$$\frac{14M_B}{I} = -\frac{1440}{I} - 6E \left( \frac{R_C}{4EI} 10 \right),$$

$$14M_B = -1440 - 15R_C \quad (I)$$

إنّ المعادلة (I) ذات مجهولين وبالتالي يجب البحث عن معادلة أخرى تتضمن كلا المجهولين. وذلك بحساب قوى القص في المجاز BC وبافتراض  $M_B$  موجباً حسب قاعدة شد الألياف.

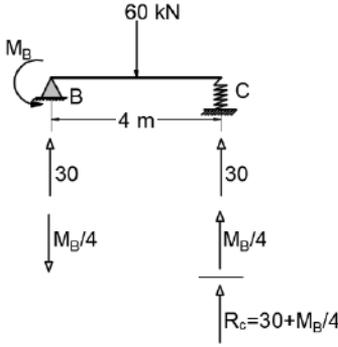
بتعويض  $R_C = 30 + \frac{M_B}{4}$  في (I):

$$14M_B = -1440 - 15 \left( 30 + \frac{M_B}{4} \right)$$

$$17.75M_B = -1890 \quad M_B = -106.5 \text{ kN.m}$$

### 3-5-3 معادلة العزوم الثلاثة من أجل حمولات

بأشكال أخرى:



الشكل (30-3)

منذ بداية الفصل حتى الآن كانت جميع الأمثلة عبارة عن عناصر تحمل حمولات موزعة بانتظام أو مركزة، حيث تم استنتاج معادلات العزوم الثلاثة لها في بداية الأمر. إذا كانت الحمولة تختلف عن ذلك يمكن استنتاج معادلة العزوم الثلاثة لها بسهولة. إن الحد الناتج عن الحمولة ما هو إلا عبارة عن الجهد القاطع الناتج عن تحميل مجاز الجائز

بالعزم مقسوماً على  $EI$  حسب طريقة الجائز البديل، يتم بعد ذلك أخذ جداء ذلك الحد بالمقدار  $(-6E)$  للحصول على الحد اللازم تعويضه في معادلة العزوم الثلاثة.

- حمولتان مركّزتان تقعان على بعد متساوي من المسندين:

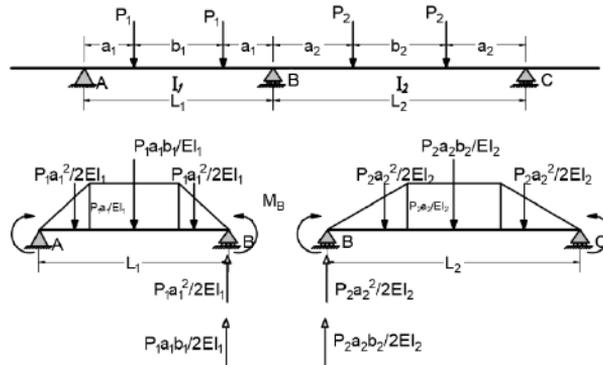
من الشكل (31-3) يكون الجهد القاطع يسار المسند B:

$$V_{BL} = \frac{P_2 a_2 b_2}{2EI_2} + \frac{P_2 a_2^2}{2EI_2} = \frac{P_2}{2EI_2} (a_2(L_2 - 2a_2) + a_2^2) = \frac{P_2}{2EI_2} (a_2 L_2 - 2a_2^2 + a_2^2)$$

$$V_{BL} = \frac{P_2}{2EI_2} (a_2(L_2 - a_2)) \quad (8-3)$$

بنفس الطريقة يكون الجهد القاطع يمين المسند B.

$$V_{BR} = \frac{P_1}{2EI_1} (a_1(L_1 - a_1)) \quad (9-3)$$



الشكل (31-3)

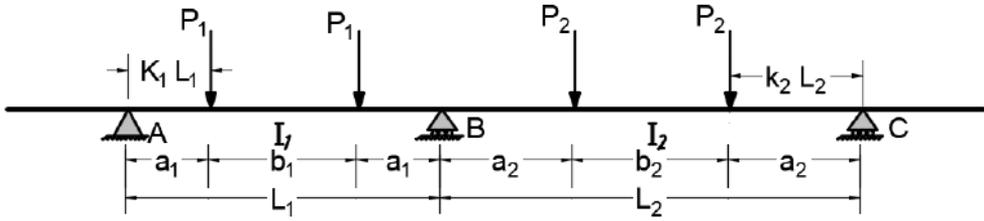
بأخذ جداء المعادلات (8-3) و(9-3) بالمقدار  $(-6E)$  يكون:

$$-6E \times V_{BL} = -3 \frac{P_2}{I_2} (a_2(L_2 - a_2)) \cdot -6E \times V_{BR} = -3 \frac{P_1}{I_1} (a_1(L_1 - a_1))$$

بالإصلاح:

$$-6E \times V_{BL} = -3 \frac{P_2}{I_2} (a_2(L_2 - a_2)) \times \frac{L_2^2}{L_2^2} = -3 \frac{P_2 L_2^2}{I_2} \left( \frac{a_2}{L_2} - \left( \frac{a_2}{L_2} \right)^2 \right) = -3 \frac{P_2 L_2^2}{I_2} (k_2 - k_2^2)$$

$$-6E \times V_{BR} = -3 \frac{P_1 L_1^2}{I_1} (k_1 - k_1^2)$$



الشكل (32-3)

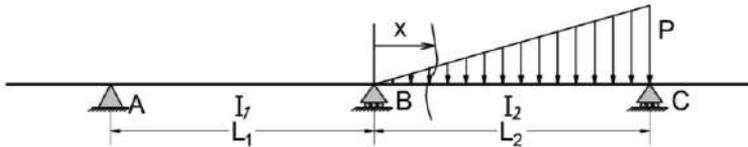
بالنتيجة تكون معادلة العزوم الثلاثة كما في (10-3):

$$\frac{M_A L_1}{I_1} + 2M_B \left( \frac{L_1}{I_1} + \frac{L_2}{I_2} \right) + \frac{M_C L_2}{I_2} = \quad (10-3)$$

$$-3 \frac{P_1 L_1^2}{I_1} (k_1 - k_1^2) - 3 \frac{P_2 L_2^2}{I_2} (k_2 - k_2^2)$$

• حمولة مثلثية:

إنّ مخطط عزم الانعطاف في هذه الحالة منحني ولإيجاد الجهد القاطع يمين أو يسار المسند لابد من إجراء تكامل.



الشكل (33-3)

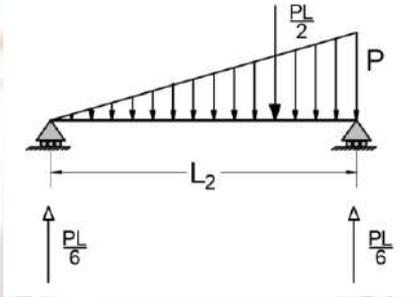
بحسب الشكل (34-3) تكون معادلة العزم في المجاز BC:

$$M = \frac{PLx}{6} - \frac{P}{L} \frac{x^3}{6}$$

- إذا كان B (رأس المثالث) هو المسند الوسطي يكون  $\sum M_B = 0; \quad V_C.L = \int_0^L \frac{M.x}{EI} dx$

- إذا كان C (قاعدة المثالث) هو المسند الوسطي يكون

$$\sum M_C = 0; \quad V_B.L = \int_0^L \frac{M(L-x)}{EI} dx$$



الشكل (34-3)

$$EI.LV_C = \int_0^L \left( \frac{PLx}{6} - \frac{P}{L} \frac{x^3}{6} \right) x dx = \int_0^L \left( \frac{PLx^2}{6} - \frac{P}{L} \frac{x^4}{6} \right) dx$$

$$= \left[ \frac{PLx^3}{18} - \frac{P}{L} \frac{x^5}{30} \right]_0^L = \frac{8PL^4}{360}$$

$$-6E \frac{8PL^3}{360} = \frac{-8PL^3}{60I} \quad \text{يصبح الحد المضاف للمعادلة العامة}$$

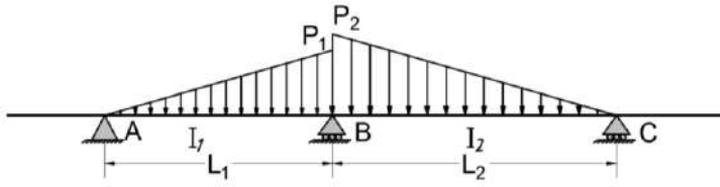
$$EI.LV_B = \int_0^L \left( \frac{PLx}{6} - \frac{P}{L} \frac{x^3}{6} \right) (L-x) dx = \int_0^L \left( \frac{PL^2x}{6} - P \frac{x^3}{6} - P \frac{Lx^2}{6} + P \frac{x^4}{6L} \right) dx$$

$$= \left[ \frac{PL^2x^2}{12} - P \frac{x^4}{24} - P \frac{Lx^3}{18} + P \frac{x^5}{30L} \right]_0^L = \frac{7PL^4}{360}$$

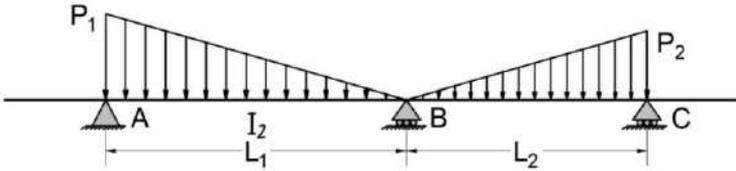
$$-6E \frac{7PL^3}{360} = \frac{-7PL^3}{60I} \quad \text{يصبح الحد المضاف للمعادلة العامة}$$

وتصبح معادلة العزوم الثلاثة.

$$\frac{M_A L_1}{I_1} + 2M_B \left( \frac{L_1}{I_1} + \frac{L_2}{I_2} \right) + \frac{M_C L_2}{I_2} = -\frac{8P_1 L_1^3}{60I_1} - \frac{8P_2 L_2^3}{60I_2} \quad (11-3)$$

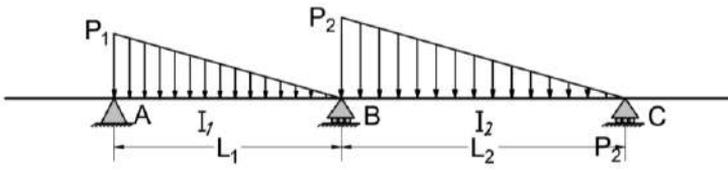


الشكل (35-3)



الشكل (36-3)

$$\frac{M_A L_1}{I_1} + 2M_B \left( \frac{L_1}{I_1} + \frac{L_2}{I_2} \right) + \frac{M_C L_2}{I_2} = -\frac{7P_1 L_1^3}{60I_1} - \frac{7P_2 L_2^3}{60I_2} \quad (12-3)$$



الشكل (37-3)

$$\frac{M_A L_1}{I_1} + 2M_B \left( \frac{L_1}{I_1} + \frac{L_2}{I_2} \right) + \frac{M_C L_2}{I_2} = -\frac{7P_1 L_1^3}{60I_1} - \frac{8P_2 L_2^3}{60I_2} \quad (13-3)$$

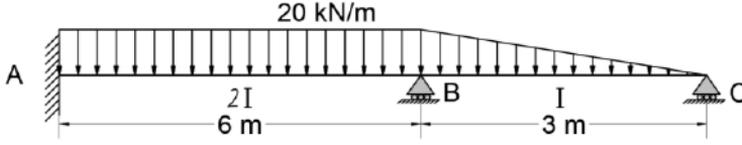
يمكن بنفس الطريقة استنتاج قيم حمولات أخرى كما في الجدول (1-3).

الجدول (1-3)

المسند B هو الواسطي	المسند A هو الواسطي	شكل الحمولة
$-\frac{5PL^3}{32I}$	$-\frac{5PL^3}{32I}$	
$-\frac{m}{IL}(L^2 - 3a^2)$	$-\frac{m}{IL}(L^2 - 3b^2)$	

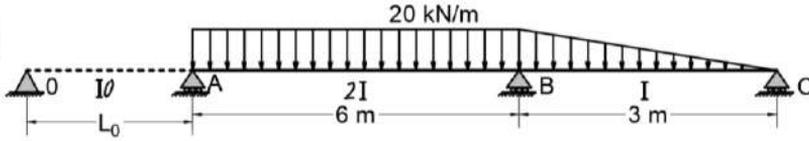
• مثال تطبيقي:

أوجد قيم العزوم في المسند B وفي الوثاقة A من الجائز المبين بالشكل (38-3)، بالاعتماد على نظرية العزوم الثلاثة.



الشكل (38-3)

باستبدال الوثاقة بمجاز ذي عطالة لا نهائية يتم الحصول على الشكل (39-3).



الشكل (39-3)

• معادلة العزوم الثلاثة على المجازين OAB:

$$2 \frac{M_A L_1}{I_1} + M_B \left( \frac{L_1}{I_1} \right) = - \frac{W_1 L_1^3}{4 I_1}$$

$$2 \frac{M_A 6}{2I} + M_B \left( \frac{6}{2I} \right) = - \frac{20 \times 6^3}{4 \times 2I}$$

$$2 \frac{M_A 6}{2I} + M_B \left( \frac{6}{2I} \right) = - \frac{20 \times 6^3}{4 \times 2I}$$

$$6M_A + 3M_B = -540 \quad (I)$$

• معادلة العزوم الثلاثة على المجازين ABC:

$$\frac{M_A L_1}{I_1} + 2M_B \left( \frac{L_1}{I_1} + \frac{L_2}{I_2} \right) = - \frac{W_1 L_1^3}{4 I_1} - \frac{8P_2 L_2^3}{60 I_2}$$

$$\frac{M_A 6}{2I} + 2M_B \left( \frac{6}{2I} + \frac{3}{I} \right) = -540 - \frac{8 \times 20 \times 3^3}{60I}$$

$$\frac{M_A 6}{2I} + 2M_B \left( \frac{6}{2I} + \frac{3}{I} \right) = -540 - \frac{8 \times 20 \times 3^3}{60I}$$

$$3M_A + 12M_B = -540 - 72 = -612 \quad (II)$$

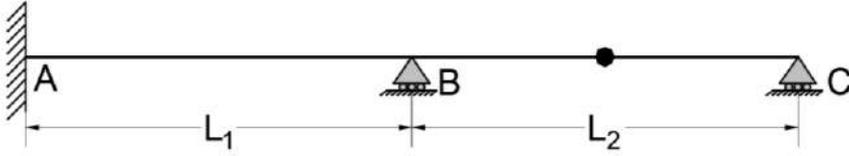
$$M_A = -73.714 \text{ kN.m}, M_B = -32.57 \text{ kN.m}$$

### 3-5-4 معادلة العزوم الثلاثة في الجوائز الحاوية على مفاصل:

تختلف مسألة الجوائز الحاوية على مفاصل باختلاف مكان المفصل، حيث تُحل المسألة الحاوية على مفصل موجود في موقع بحيث يؤدي إلى تقرير أحد جزأي الجائز بطريقة تختلف عن المسألة الحاوية على مفصل موجود في موقع لا يؤدي إلى تقرير أي من جزأي الجائز يمين ويسار المفصل.

#### • حالة وجود مفصل في موقع بحيث يؤدي إلى تقرير أحد جزأي الجائز:

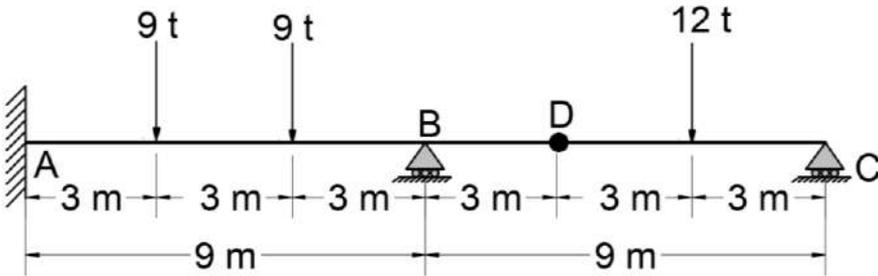
في هذه الحالة يتم فصل الجائز عند المفصل إلى جزأين أحدهما مقرر والآخر غير مقرر، تتم دراسة الجزء المقرر وحساب الجهد القاطع عند المفصل، ثم يتم نقله إلى الجزء غير المقرر وتطبيق معادلة العزوم الثلاث على هذا الجزء.



الشكل (3-40)

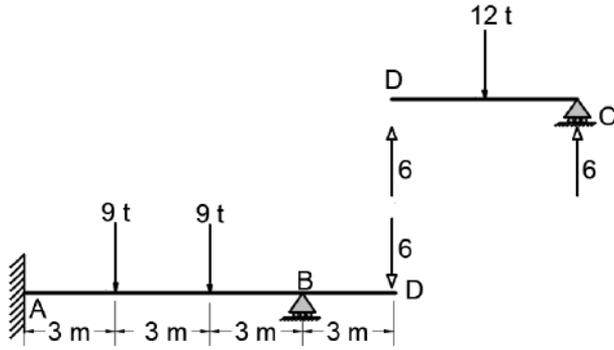
#### • مثال تطبيقي:

ارسم كلاً من مخطط الجهد القاطع وعزم الانعطاف من أجل الجائز المبين بالشكل (3-41) بالاعتماد على معادلة العزوم الثلاثة.



الشكل (3-41)

إنّ الجزء DC هو جزء مقرر، وبالتالي يتم حساب الجهد القاطع عند المفصل D ونقلها إلى الجزء ABD.



الشكل (42-3)

يتم استبدال الوثاقه بمجاز وهمي ذي عطالة لا نهائية وتطبيق معادلة العزوم الثلاثة، حيث العزم في B يساوي إلى 18 t.m.

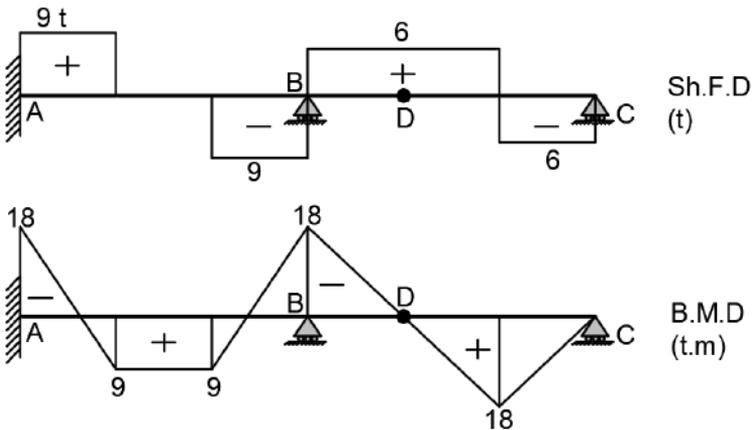
$$2 \frac{M_A L_1}{I_1} + M_B \left( \frac{L_1}{I_1} \right) = - \frac{3 P_1 L_1^2}{I_1} \left( \frac{1}{3} - \left( \frac{1}{3} \right)^2 \right)$$

$$2 \times 9 M_A + 9 M_B = -3 \times 6 \times 9^2 \left( \frac{1}{3} - \left( \frac{1}{3} \right)^2 \right)$$

$$2 M_A + M_B = -54 \Rightarrow 2 M_A = -54 + 18$$

$$M_A = -18$$

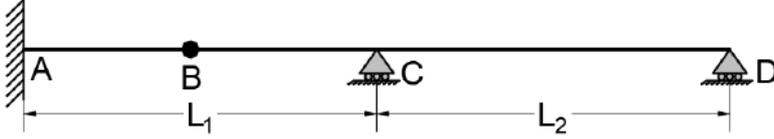
وتكون مخططات الجهد القاطع والعزم كما هو مبين بالشكل (43-3).



الشكل (43-3)

• حالة وجود مفصل في موقع لا يؤدي إلى تقرير أحد جزأي الجائز:

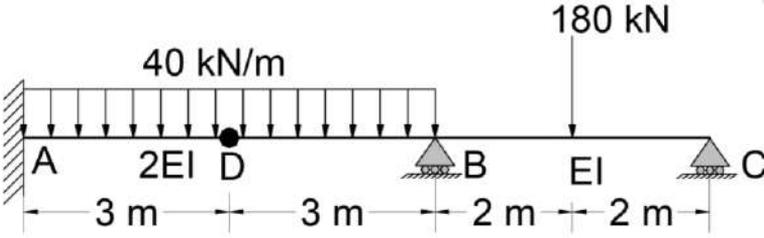
يُلاحظ من الشكل (3-44) أنّ المفصل لا يُقرر أيّاً من الجزأين AB و BCD. في هذه الحالة يتم فصل الجائز عند المفصل، ويتم تعويض المفصل في كل منهما بمسندين يحصل فيهما انتقال. إنّ ردّي الفعل في هذين المسندين متساويان ومتعاكسان. يتم كتابة معادلة العزوم الثلاثة لكل من الجزأين مع الانتباه إلى وجود انتقال في المسند البديل عن المفصل، وإلى أنّ العزم معدوم عند هذا المفصل؛ لأنه مسند.



الشكل (3-44)

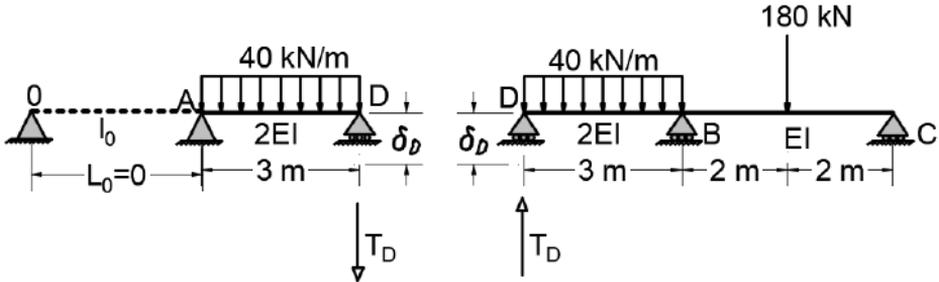
• مثال تطبيقي:

يبين الشكل (3-45) جائزاً مستمراً يحتوي على مفصل لا يُقرر أيّاً من جزأيه، المطلوب رسم مخططات الجهود للجائز بالاعتماد على معادلات العزوم الثلاثة.



الشكل (3-45)

يتم فصل الجائز عند المفصل والتعويض عنه بمسند يحصل فيه انتقال.



الشكل (3-46)

• معادلة العزوم الثلاثة في الجزء OAD

$$\frac{M_o L_0}{I_0} + 2M_A \left( \frac{L_0}{I_0} + \frac{L_1}{I_1} \right) + \frac{M_D L_1}{I_1} = -\frac{W_1 L_1^3}{4I_1} - 6E \left( \frac{\delta_o - \delta_A}{L_0} + \frac{\delta_D - \delta_A}{L_1} \right)$$

$$2M_A \left( 0 + \frac{3}{2I} \right) = -\frac{40 \times 3^3}{4 \times 2I} - 6E \left( \frac{\delta_D - \delta_A}{3} \right)$$

$$3M_A = -135 - 2EI\delta_D$$

$$EI\delta_D = -67.5 - 1.5M_A \quad (I)$$

• معادلة العزوم الثلاثة في الجزء DBC

$$\frac{M_D L_D}{I_D} + 2M_B \left( \frac{L_2}{I_2} + \frac{L_3}{I_3} \right) + \frac{M_C L_3}{I_3} = -\frac{W_2 L_2^3}{4I_2} - \frac{P_3 L_3^2}{I_3} (k - (k)^3) - 6E \left( \frac{\delta_D - \delta_B}{L_2} + \frac{\delta_C - \delta_B}{L_3} \right)$$

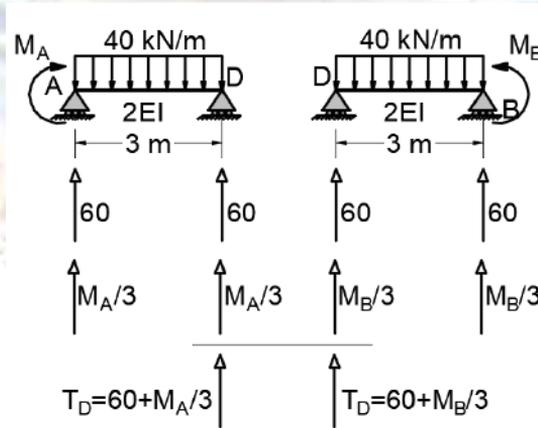
$$2M_B \left( \frac{3}{2I} + \frac{4}{I} \right) = -135 - \frac{180 \times 4^2}{I} (0.375) - 6E \left( \frac{\delta_D}{3} \right)$$

$$11M_B = -1215 - 2EI\delta_D \Rightarrow EI\delta_D = -607.5 - 5.5M_B \quad (II)$$

بمساواة (I) مع (II) يتم الحصول على المعادلة:

$$1.5M_A - 5.5M_B = 540 \quad (III)$$

يجب البحث عن معادلة ثانية لحساب العزمين، وبما أن  $T_D$  يمين ويسار المسند متساوية ومتعاكسة بالإشارة يتم إيجاد  $T_D$  بدلالة  $M_A$  و  $M_B$  يمين ويسار المسند  $D$  والمساواة بينهما.



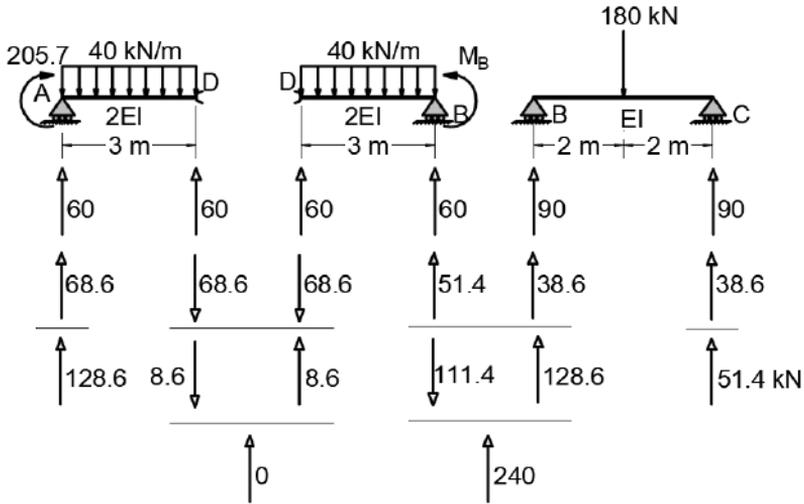
الشكل (3-47)

$$-60 - \frac{M_A}{3} = 60 + \frac{M_B}{3} \Rightarrow M_A + M_B = -360 \quad (IV)$$

بالحل المشترك للمعادلتين (III) و(IV):

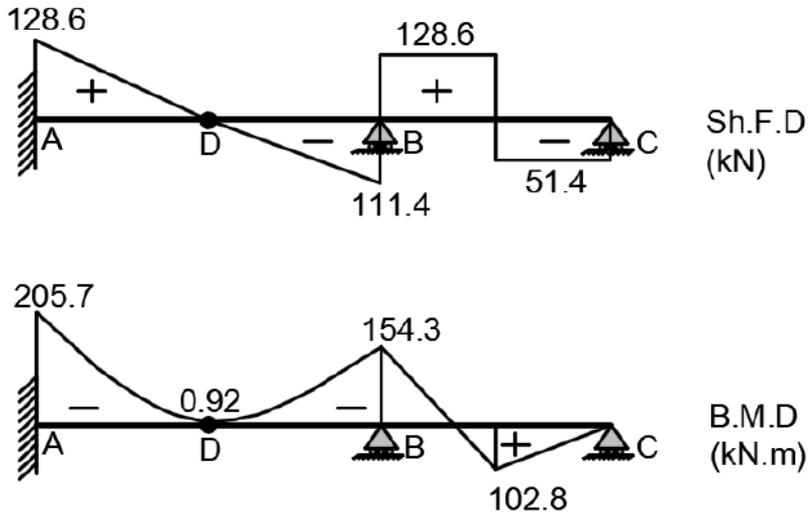
$$M_A = -205.7 \text{ kN.m}, M_B = -154.3 \text{ kN.m}$$

يتم إيجاد القوى القاطعة في كل النقاط.



الشكل (48-3)

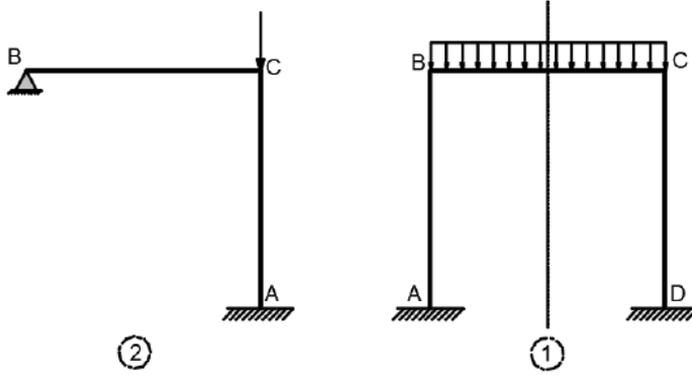
وتكون المخططات كما هو مبين بالشكل (49-3).



الشكل (49-3)

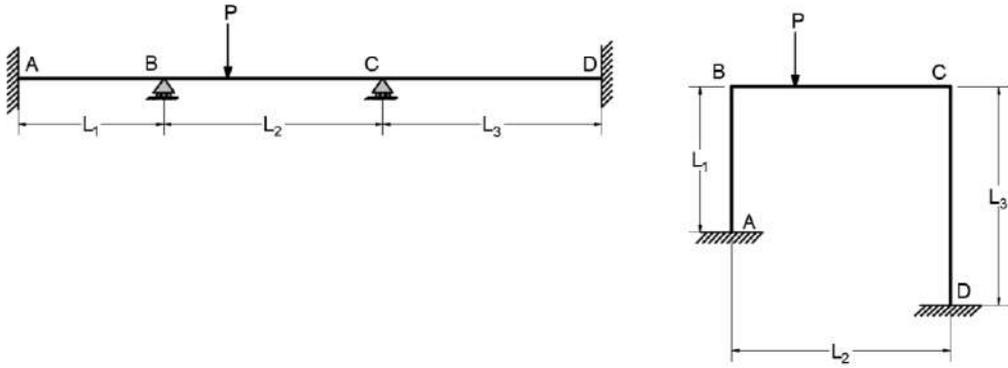
### 3-5-5 معادلة العزوم الثلاثة في حالة الإطارات:

يُمكن تطبيق طريقة العزوم الثلاثة على الإطارات بشرط تحقيق الإطار الشرطين التاليين، الشرط الأول ينص على ألا يسمح ترتيب المساند بالانتقالات في العقد وذلك مع إهمال التشوهات المحورية لصغرهما أو أن يكون الإطار متناظراً تناظراً كاملاً بحيث لا تحدث حركة جانبية بسبب وجود التناظر، بمعنى آخر يمكن تطبيق المعادلة في الإطارات المقيدة جانبياً. الشرط الثاني ينص على أنه لا يجوز ارتباط أكثر من عنصرين في العقدة الواحدة، كما هو مبين بالشكل (3-50).



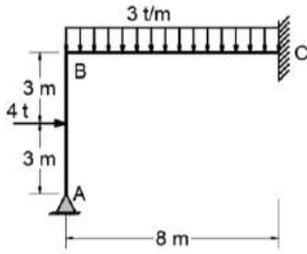
الشكل (3-50)

في حالة الإطار يتم تحويل الإطار إلى جائر عن طريق فرد الإطار وتعويض العقد بمساند، فمثلاً يتم استبدال العقدتين B, C في الإطار المبين بالشكل (3-51) بمساند ويصبح الإطار جائرًا مستمرًا قابلاً للحل بطريقة العزوم الثلاثة. يتم تشكيل معادلات العزوم الثلاثة وحلها حلاً مشتركاً، وبعد إيجاد العزوم الوسطية يتم رسم كل من مخطط الجهد القاطع وعزم الانعطاف كما هي العادة.



الشكل (3-51)

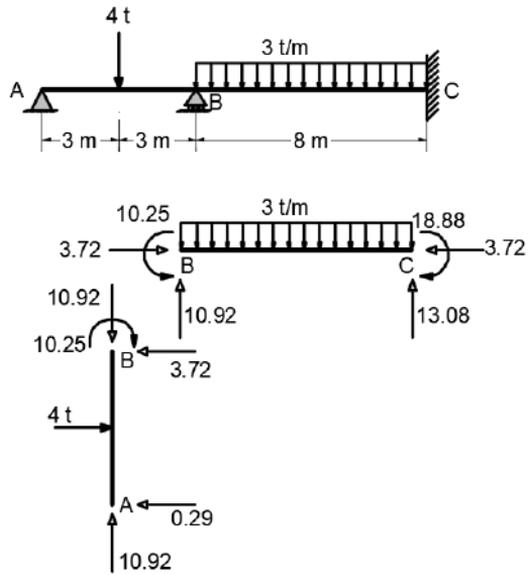
• مثال تطبيقي /1/:



الشكل (52-3)

أوجد العزوم في مساند الإطار المبين بالشكل (52-3) ثم ارسم كلاً من مخططات الجهد القاطع وعزم الانعطاف والقوى المحورية.

يتم استبدال الإطار بجائز مستمر مع تعويض العقد بمساند وسطية، ثم يتم تطبيق معادلة العزوم الثلاثة مرتين على الجائز.



الشكل (53-3)

• معادلة العزوم الثلاثة في المجازين ABC

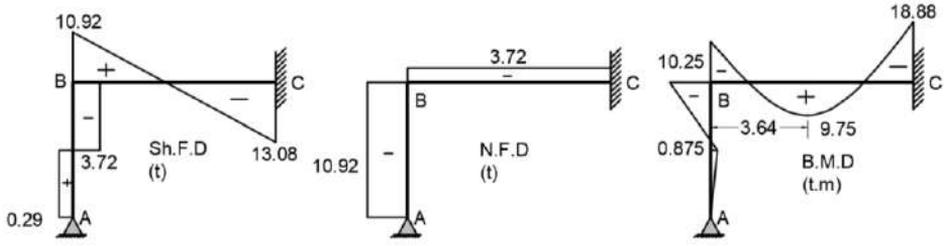
$$2M_B(6+8)+8M_C = -4 \times 6^2(0.375) - \frac{3 \times 8^3}{4} \Rightarrow 14M_B + 4M_C = -219 \quad (I)$$

• معادلة العزوم الثلاثة في المجازين BCO

$$8M_B + 2M_C(8+0) = -\frac{3 \times 8^3}{4} \Rightarrow M_B + 2M_C = -48 \quad (II)$$

$$M_B = -10.25 \text{ kN.m}, M_C = -18.88 \text{ kN.m}$$

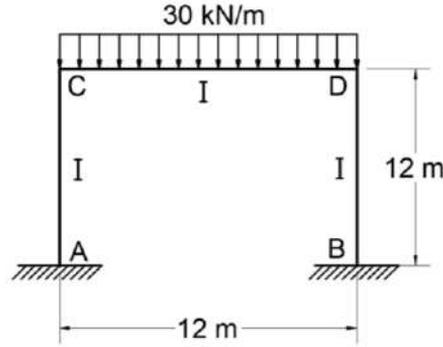
بالنتيجة تكون مخططات الجهد القاطع والعزوم والقوى المحورية كما في الشكل (54-3).



الشكل (54-3)

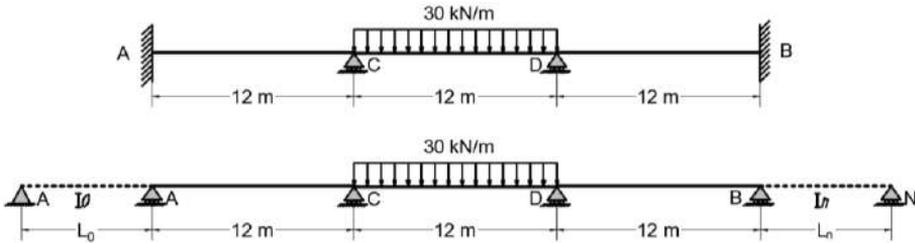
• مثال تطبيقي /2/:

إطار متناظر مبين بالشكل (55-3)، ارسـم مخططات الجهود NMT بالاعتماد على معادلات العزوم الثلاثة.



الشكل (55-3)

بما أنّ الإطار متناظر بالنسبة إلى محور شاقولي فإنّ العزمين في العقدتين C و D متساويان. بتمثيل الإطار بجائز مستمر يتم الحصول على الشكل (56-3).



الشكل (56-3)

• معادلة العزوم الثلاثة في المجازين OAC

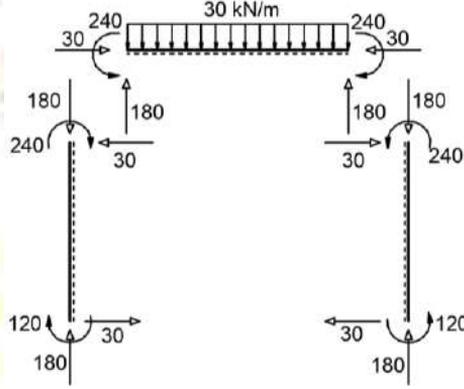
$$24M_A + 12M_C = 0 \Rightarrow 2M_A + M_C = 0 \quad (I)$$

• معادلة العزوم الثلاثة في المجازين ACD

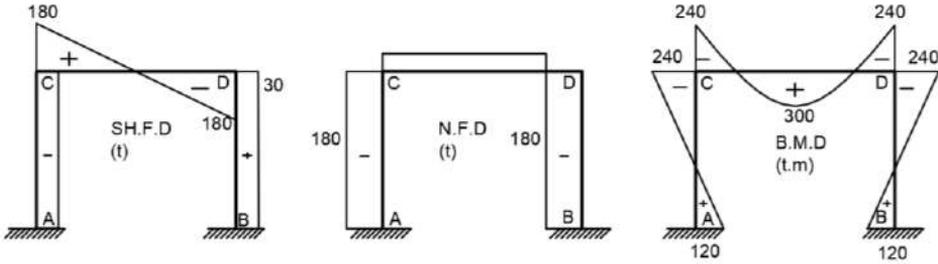
$$12M_A + 2M_C(12+12) + 12M_D = -\frac{30 \times 12^3}{4} \Rightarrow 12M_A + 60M_C = -12960$$

$$M_A + 5M_C = -1080 \quad (II)$$

$$M_A = 120 \text{ kN.m}, M_C = -240 \text{ kN.m}$$



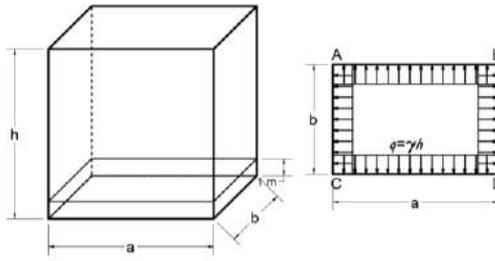
الشكل (57-3)



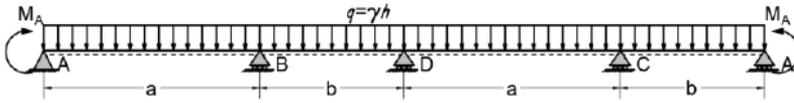
الشكل (58-3)

### 3-5-6 معادلة العزوم الثلاثة في حالة المنشآت المغلقة:

يُمكن الاستفادة من خاصّة تناظر المنشآت المغلقة كالخزانات بالنسبة لمحوري تناظر أفقي وشاقولي، وتتم دراسة شريحة مترية أسفل الخزان حيث يكون حمل السائل أعظماً. فمثلاً لدراسة خزان الماء المبين بالشكل (3-59) حيث طوله يساوي  $a$  وعرضه يساوي  $B$  وارتفاعه  $h$  تتم دراسة شريحة مترية أسفل الخزان، وتفرّد إلى جائز مستمر كما هو موضّح بالشكل (3-60).



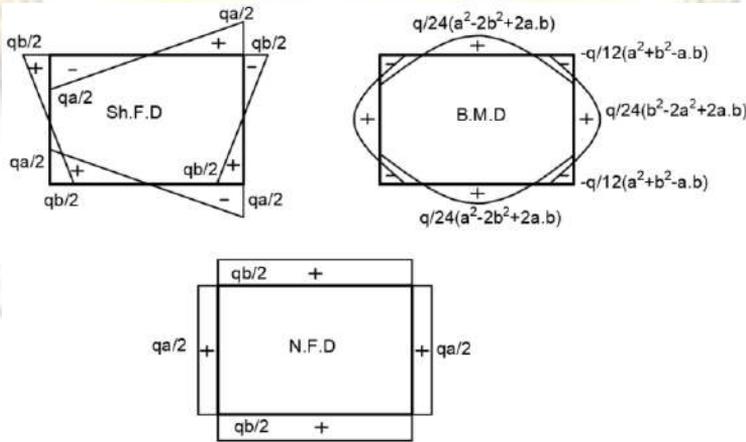
الشكل (59-3)



الشكل (60-3)

وبما أنّ الخزان متناظر بالنسبة إلى محوري تناظر يكون  $M_A = M_B = M_C = M_D$  وتكون معادلة العزوم الثلاثة على المجازين ABD:

$$M_A \cdot a + 2M_B(a+b) + M_D \cdot b = -6 \left( \frac{qa^3}{24} + \frac{qb^3}{24} \right)$$



الشكل (61-3)

وبما أنّ العزوم  $M_A, M_B, M_D$  متساوية، بالتعويض يكون:

$$3M_A \cdot (a+b) = -\frac{q}{4}(a^3 + b^3) \Rightarrow M_A = -\frac{q}{12} \frac{(a^3 + b^3)}{(a+b)} = -\frac{q}{12}(a^2 + b^2 - a.b)$$

وبالتالي تكون مخططات عزم الانعطاف والجهد القاطع والقوى المحورية مبينة في الشكل (61-3).

## الفصل الرابع

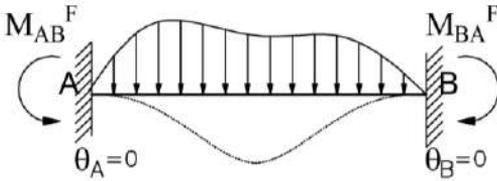
### طريقة الانتقال والدوران Slope Deflection Method

#### 1-4 مقدمة:

قُدِّمت هذه الطريقة من قبل George A. Maney عام 1915 - جامعة Minnesota، وهي نتيجة لتطوير دراسات سابقة خاصة بالإجهادات الثانوية من قبل Manderla و Mohr. بقيت هذه الطريقة لمدة 15 عاماً من أكثر الطرائق تفضيلاً ودقةً من أجل الجوائز المستمرة والإطارات على حدٍ سواء، إلى أن تمَّ استنتاج طريقة توزيع العزوم Moment Distribution. تأخذ طريقة الانتقال والدوران بالحسبان التشوهات الانحنائية للجوائز والإطارات وهي عبارة عن الدورانات والانتقالات العمودية على محور العنصر، إلا أنها تهمل القص والتشوهات المحورية. جاءت تسمية هذه الطريقة من كون مبدأ الطريقة يقوم على التعبير عن العزوم في نهايات العناصر في المنشآت غير المقررة ستاتيكيًا بدلالة الانتقالات والدورانات في هذه العقد. إنَّ دراسة هذه الطريقة مفيدة للأسباب التالية:

- هي طريقة ملائمة للحل اليدوي في الجمل الإنشائية الصغيرة.
- إنَّ معرفة هذه الطريقة تُعطي خلفية ممتازة من أجل فهم طريقة توزيع العزوم.
- تشكّل مدخلاً فعالاً إلى الصياغة المصفوفية للمنشآت.
- إنَّ الانتقالات والدورانات المحسوبة في هذه الطريقة تمكّن الدارس من رسم الشكل المتشوه للمنشآت مما يعطيه تصوراً أفضل لسلوك المنشأ.

#### 2-4 اشتقاق معادلات الانتقال والدوران:

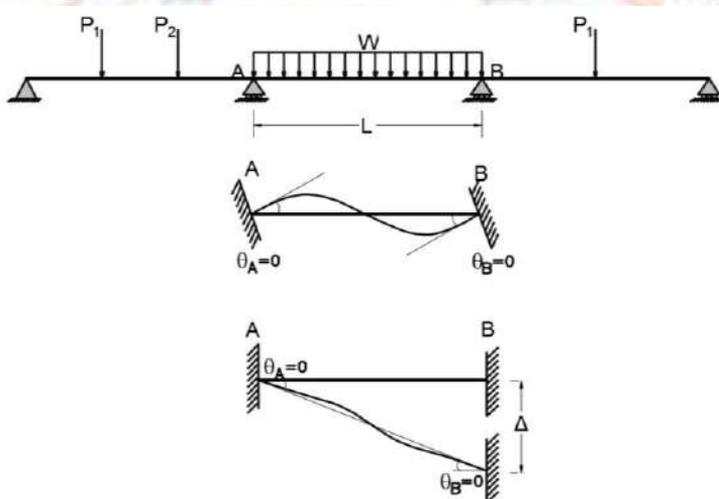


الشكل (1-4)

من أجل اشتقاق معادلات الطريقة يُفترض كون العناصر ثابتة العطالة بين المساند، حيث أنه يمكن اشتقاق معادلات من أجل عناصر ذات مقاطع متغيرة، إلا أن هذا يجعل الطريقة أكثر تعقيداً وأقل عملية.

لنأخذ الجائز الموثوق من الطرفين المبين بالشكل (1-4)، بما أن كل من العقدة A والعقدة B موثوقة كلياً فإنَّ الدوران في العقدتين معدوم  $\theta_A = \theta_B = 0$ . بنفس الوقت تولّد الحمولات الخارجية عزوماً في الوثاقات تسمّى عزوم الوثق Fixed End Moments ويصبح الشكل المتشوه للجائز كما هو مبين بالشكل (1-4).

هذا الإجراء صحيح في حال كانت العقدتان A, B موثقتين ولكن في الحالة العامة هي ليست موثوقة كلياً، نأخذ مثلاً المجاز AB من الجائز المستمر المبيّن بالشكل (2-4). كل من العقدتين A, B سوف تدور بشكل خفيف تحت تأثير الحملات لأنها ليست موثوقة كلياً، ولكن الزوايا بين العناصر الملتقية في العقد تبقى ذاتها. إنّ الشكل المتشوه للمجاز AB تحت تأثير الدورانين مبيّن بالشكل (2-4). في حال حصول انتقال في أحد المسندين أو كليهما سيؤدي إلى حدوث دورانٍ في النهايات. بفرض حصول انتقال في المسند B بالمقدار  $\Delta$  يصبح الشكل المتشوه كما هو موضّح بالشكل (2-4). وتكون قيم الدورانات الناتجة عن هذا الهبوط في كل من العقدة A و B مساويةً  $\theta_A = \theta_B = \text{tg} \theta_A = \frac{\Delta}{L}$  في حال هبوط كلا المسندين تصبح  $\Delta = \delta_A - \delta_B$  هي الانتقال النسبي.



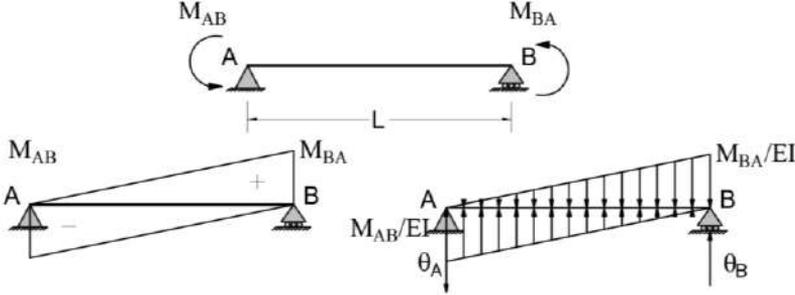
الشكل (2-4)

إنّ العزوم في كل من A و B حقيقةً هي حصيلة ثلاثة عزوم وهي:

- عزوم الوثق Fixed End Moment (الناتجة عن الحملات الخارجية).
- العزوم الناتجة عن دوران عقدي النهايتين A, B  $(\theta_A, \theta_B)$  (ناتجة عن التصحيح من وثاقة تامّة إلى وثاقة جزئية).
- العزوم الناتجة عن الدوران الناتج عن انتقال أحد المسندين أو كليهما.

إنّ عزوم الوثق Fixed End Moments تختلف حسب شكل التحميل وسيتم استنتاج قيمها لاحقاً. بينما لحساب العزوم الناتجة عن دوران العقد، الشكل (3-4)، فإنه يتم الاعتماد على طريقة الجائز البديل

Conjugate Beam، فتكون ردود الأفعال أو (قوى القص) في A,B هي  $\theta_A, \theta_B$  على الترتيب. بأخذ مجموع العزوم حول A ثم B يكون.



الشكل (3-4)

$$\sum M_B = 0$$

$$\theta_A = \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{M_{AB}}{EI} \right) L \left( \frac{2L}{3} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{M_{BA}}{EI} \right) L \left( \frac{L}{3} \right)}{L}$$

$$\theta_A = \frac{L}{6EI} (2M_{AB} - M_{BA}) \quad (1-4)$$

$$\sum M_A = 0$$

$$\theta_B = \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{M_{BA}}{EI} \right) L \left( \frac{2L}{3} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{M_{AB}}{EI} \right) L \left( \frac{L}{3} \right)}{L}$$

$$\theta_B = \frac{L}{6EI} (2M_{BA} - M_{AB}) \quad (2-4)$$

لحساب العزوم الناتجة عن انتقال أحد النهايتين  $\Delta$  يتم حساب الدورانين  $\theta_A, \theta_B$  حيث تُحسب كما ذكر

$$\theta_A = \theta_B = \text{tg} \theta_A = \frac{\Delta}{L} = \psi \quad \text{سابقاً:}$$

بإضافة قيمة الدوران الناتج عن الانتقال إلى المعادلات (1-4) و(2-4) تصبح قيم الدورانات.

$$\theta_A = \frac{L}{6EI} (2M_{AB} - M_{BA}) + \psi$$

$$\theta_B = \frac{L}{6EI} (2M_{BA} - M_{AB}) + \psi$$

بحل المعادلتين معاً لإيجاد عزوم النهايات الناتجة عن الدوران والانتقال يكون:

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}(2\theta_A + \theta_B - 3\psi)$$

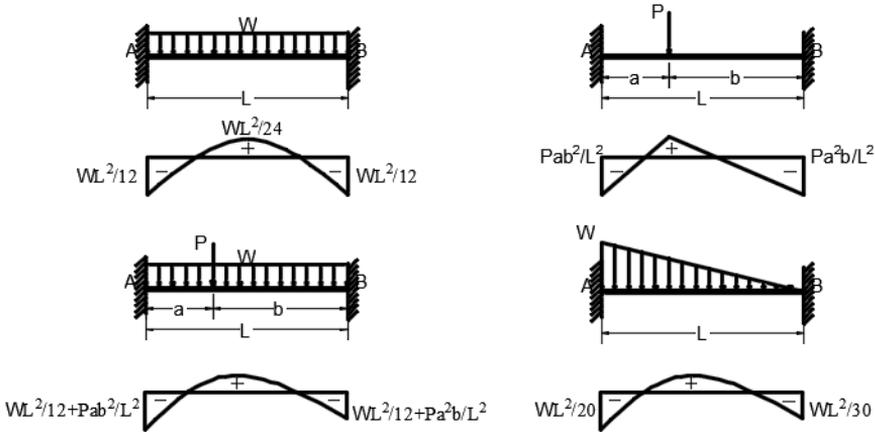
$$M_{BA} = \frac{2EI}{L}(\theta_A + 2\theta_B - 3\psi)$$

إنّ محصلة عزوم النهايات عبارة عن مجموع العزوم الناتجة عن الدورانات والانتقالات بالإضافة إلى عزوم الوثق Fixed End Moment وتكون معادلات الانتقال والدوران (3-4).

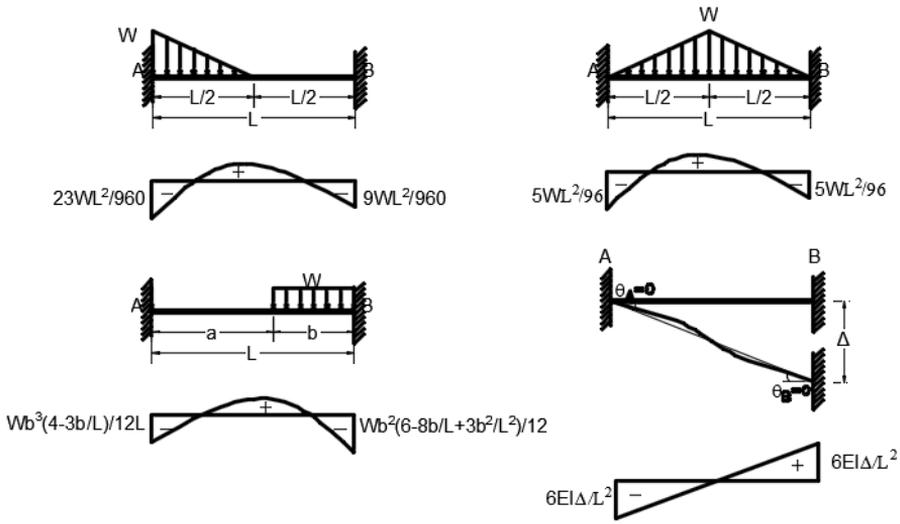
$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}(2\theta_A + \theta_B - 3\psi) + M_{AB}^F \quad (3-4)$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L}(\theta_A + 2\theta_B - 3\psi) + M_{BA}^F$$

هاتان المعادلتان تمكّنان من التعبير عن عزوم النهايات في المنشأ بدلالة دوران العقد وانتقالات العقد. في الطرائق السابقة للتحليل الإنشائي كان من الضروري كتابة معادلة واحدة لكل رد فعل زائد Redundant فيتم الحصول بالنتيجة على جملة معادلات عددها يساوي إلى عدد ردود الأفعال الزائدة أو درجة عدم التقرير، ولكن هذا العمل يصبح مرهقاً في الجمل الإنشائية ذات درجات عدم التقرير العالية. بينما في طريقة الانتقال والدوران فإنّ عدد المعادلات ينخفض بشكل كبير في المنشآت ذات درجات عدم التقرير الستاتيكي العالية؛ وذلك لأنها تعتمد على درجة عدم التقرير الحركي أي أنّ المجاهيل أصبحت هي الدورانات والانتقالات وهي قليلة. حتى من أجل الإطارات متعددة الطوابق فإنّ عدد المجاهيل نادراً ما يتخطى الخمس أو الست بينما تكون درجة عدم التقرير السكونية هي عدة أضعاف هذا الرقم.



الشكل (4-4) نماذج عزوم وثق



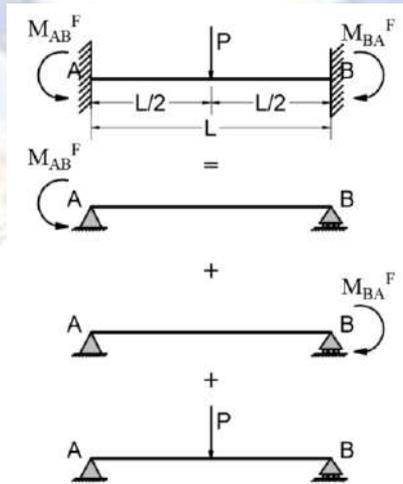
الشكل (4-4 ب) نماذج عزوم وثق

### 3-4 عزوم الوثق Fixed End Moment

إنّ عزوم الوثق الناتجة عن الأحمال الخارجية تعاكس جهة دوران العنصر حيث تحاول إعادة العنصر إلى وضعه الأصلي، الشكل (4-4).

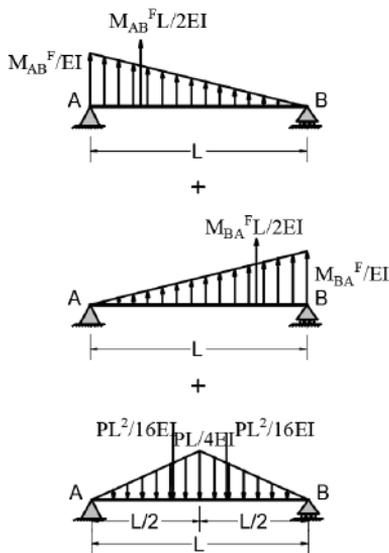
### 1-3-4 عزم وثق حمولة مركزة في وسط المجاز:

بحسب تنصّد الآثار يتم دراسة كل من عزمي الوثق في النهايتين والقوة المركزة  $P$  على حدة، الشكل (5-4).



الشكل (5-4)

بالاعتماد على طريقة الجائز البديل يمكن إيجاد الدوران في النهايتين A,B ونعلم أن  $\theta_A = \theta_B = 0$  بسبب الوثاقات، وبحسب الجائز البديل ردود الأفعال للجائز المحمل بمخطط عزم الانعطاف مقسوماً على EI تمثل الدورانات وبالتالي يكون حسب الشكل (6-4).



الشكل (6-4)

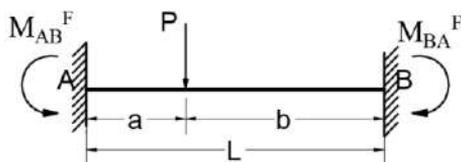
$$+\uparrow: \sum Fy = 0 \Rightarrow R_A + R_B = 0$$

$$\frac{M_{AB}^F L}{2EI} + \frac{M_{BA}^F L}{2EI} - \frac{2PL^2}{16EI} = 0$$

وبسبب التناظر يكون  $M_{AB}^F = M_{BA}^F$  فيكون:

$$M_{AB}^F = M_{BA}^F = \frac{PL}{8}$$

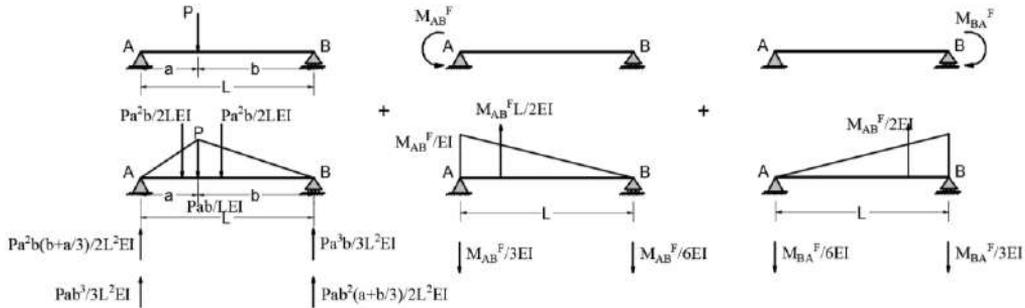
#### 2-3-4 حمولة مركزة في الحالة العامة:



الشكل (7-4)

بحسب تنصّد الآثار فإن الجهود الناتجة عن الجائز الأصلي تساوي مجموع الجهود الناتجة عن الحمولة المركزة وكل من عزمي وثق النهايتين A,B. ثم بحسب طريقة الجائز البديل يتم الحصول على

دوران النهايات، حيث يتم تحميل الجائز البديل بمخططات العزوم مقسومة على  $EI$  لكل من الأحمال التي تم ذكرها، الشكل (8-4). ثم حساب ردود الأفعال الشاقولية والتي تمثل الدورانات وتساوي إلى الصفر. فيتم الحصول على معادلتين بمجهولين هما عزما الوثاقتين.



الشكل (8-4)

$$EI\theta_A = 0$$

$$\frac{Pab^3}{3L^2} + \frac{Pa^2b\left(b + \frac{a}{3}\right)}{2L^2} = \frac{M_{AB}^F L}{3} + \frac{M_{BA}^F L}{6}$$

$$\frac{Pab}{L^3} \left[ \frac{b^2}{3} + \frac{ab}{2} + \frac{a^2}{6} \right] = \frac{M_{AB}^F}{3} + \frac{M_{BA}^F}{6} \quad (I)$$

$$EI\theta_B = 0$$

$$\frac{Pa^3b}{3L^2} + \frac{Pa^2b\left(a + \frac{b}{3}\right)}{2L^2} = \frac{M_{AB}^F L}{6} + \frac{M_{BA}^F L}{3}$$

$$\frac{Pab}{L^3} \left[ \frac{a^2}{3} + \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{6} \right] = \frac{M_{AB}^F}{6} + \frac{M_{BA}^F}{3} \quad (II)$$

بأخذ جداء المعادلة (II) بالرقم 2 والجمع مع المعادلة (I):

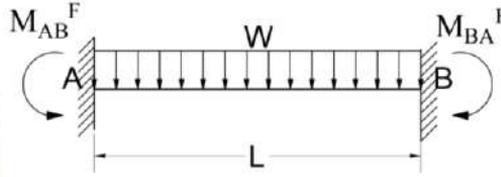
$$\frac{Pab}{L^3} \left[ -2\frac{a^2}{3} - ba - \frac{b^2}{3} + \frac{b^2}{3} + \frac{ab}{2} + \frac{a^2}{6} \right] = -\frac{M_{BA}^F}{2}$$

$$M_{BA}^F = \frac{Pab}{L^3} [a^2 + ab] = \frac{Pa^2b}{L^2}$$

$$M_{AB}^F = \frac{Pab}{L^3} [b^2 + ab] = \frac{Pab^2}{L^2}$$

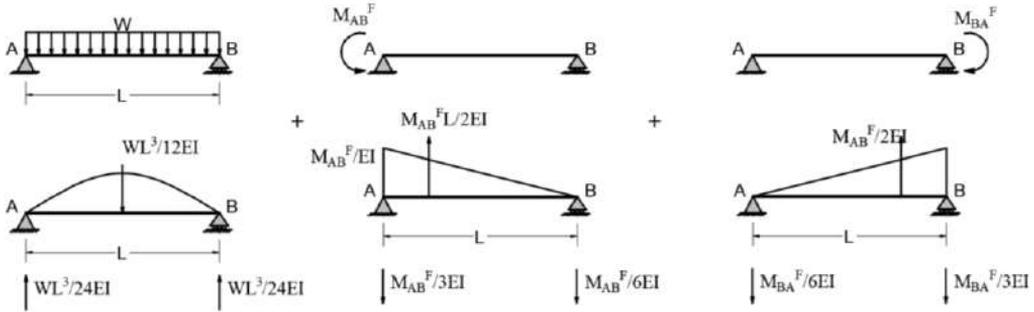
$$M_{BA}^F = \frac{Pa^2b}{L^2} \quad ; \quad M_{AB}^F = \frac{Pab^2}{L^2}$$

#### 3-3-4 حمولة موزعة بانتظام:



الشكل (9-4)

بحسب تتصد الأثار الجهود الناتجة عن الجائز الأصلي تساوي مجموع الجهود الناتجة عن الحمولة المركزة وكل من عزمي وثق النهايتين A,B، الشكل (10-4).

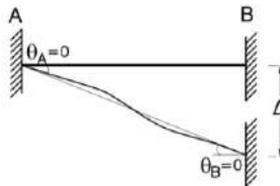


الشكل (10-4)

$$+ \uparrow: EI\theta_A = 0$$

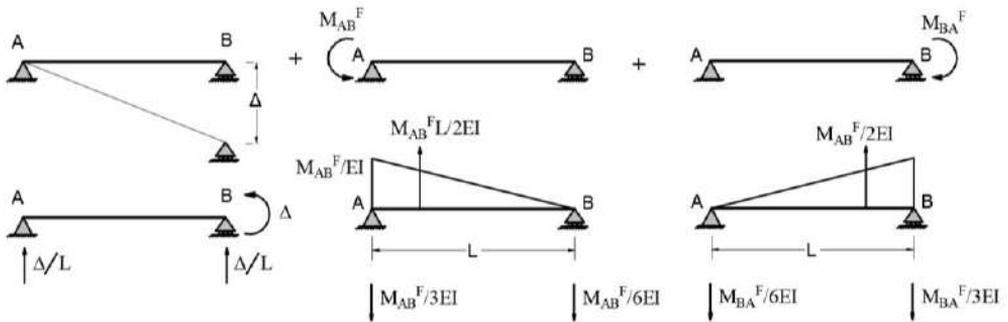
$$\frac{M_{AB}^F L}{3EI} + \frac{M_{BA}^F L}{6EI} - \frac{WL^3}{24EI} = 0 \quad ; \quad M_{AB}^F = M_{BA}^F = \frac{WL^2}{12}$$

#### 4-3-4 انتقال في إحدى الوثاقتين:



الشكل (11-4)

بحسب تنضد الآثار الجهود الناتجة عن الجائز الأصلي تساوي مجموع الجهود الناتجة عن الحمولة المركزة وكل من عزمي وثق النهايتين A, B، الشكل (12-4).



الشكل (12-4)

$$\theta_A = 0 \Rightarrow \frac{M_{AB}^F L}{3EI} - \frac{M_{BA}^F L}{6EI} - \frac{\Delta}{L} = 0 \quad (I)$$

$$\theta_B = 0 \Rightarrow \frac{M_{AB}^F L}{6EI} - \frac{M_{BA}^F L}{3EI} + \frac{\Delta}{L} = 0 \quad (II)$$

بأخذ جداء المعادلة (II) بالرقم (-2) الجمع مع المعادلة (I):

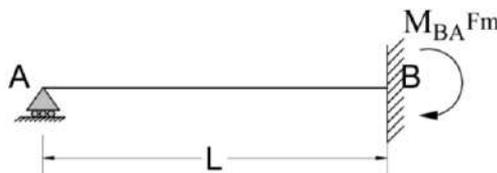
$$\frac{M_{BA}^F L}{2EI} - \frac{3\Delta}{L} = 0$$

$$M_{AB}^F = \frac{6EI\Delta}{L^2}$$

$$M_{BA}^F = \frac{6EI\Delta}{L^2}$$

#### 5-3-4 عزم الوثاقعة المعدل Modified Fixed End Moment

إن عزم الوثاقعة المعدل هو العزم في جائز موثوق ومسند، الشكل (13-4). بحسب مبدأ تنضد الآثار تكون عزوم الجائز AB مساوية مجموع عزوم كل من الجائزين A'B' و A''B''، الشكل (14-4).

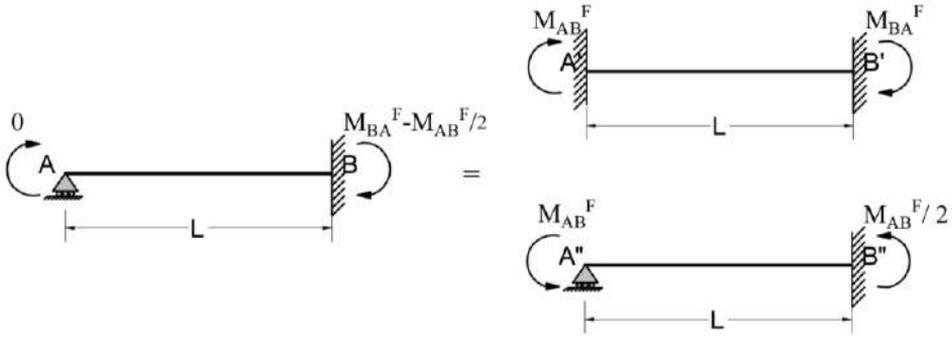


الشكل (13-4)

بحسب كاستليانو أو القوى الواحدة يكون العزم في الوثافة "B مساوياً:

$$M_{BA}^F = \frac{M_{AB}^F}{2}$$

وبالتالي بأخذ المجموع يكون  $M_{BA}^{FM} = M_{BA}^F - \frac{M_{AB}^F}{2}$

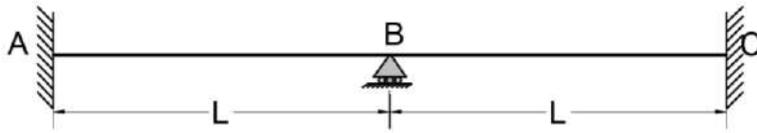


الشكل (14-4)

يمكن حساب عزوم الوثق المعدلة من أجل أي حمولة، كما في الجدول (1-4).

#### 4-4 تطبيق طريقة الانتقال والدوران على الجوائز المستمرة:

يتم تطبيق معادلات الانتقال والدوران على كل عنصر على حدة (3-4)؛ إن كل جزء بين مسندين يُعد عنصراً. فيتم الحصول على معادلة لكل عزم من عزمي نهائي العنصر. فمن أجل العنصر AB، الشكل (15-4) تُكتب معادلتان لكل من  $M_{AB}$ ،  $M_{BA}$  وهكذا لبقية العناصر.



الشكل (15-4)

الجدول (1-4)

عزم الوثق المعدل	الحمولة
$M_{BA}^{FM} = M_{BA}^F - \frac{M_{AB}^F}{2}$	
$M_{BA}^{FM} = \frac{PL}{8} - \left(-\frac{PL}{16}\right) = \frac{3PL}{16}$	

$M_{BA}^{FM} = M_{BA}^F - \frac{M_{AB}^F}{2}$ $M_{BA}^{FM} = \frac{WL^2}{12} - \left( -\frac{WL^2}{24} \right) = \frac{WL^2}{8}$	
$M_{BA}^{FM} = M_{BA}^F - \frac{M_{AB}^F}{2}$ $M_{BA}^{FM} = \frac{Pa^2b}{L^2} - \frac{1}{2} \left( -\frac{Pab^2}{L^2} \right) = \frac{Pab}{2L^2} (L+a)$	
$M_{BA}^{FM} = M_{BA}^F - \frac{M_{AB}^F}{2}$ $M_{BA}^{FM} = \frac{WL^2}{20} - \left( -\frac{WL^2}{60} \right) = \frac{WL^2}{15}$	
$M_{BA}^{FM} = M_{BA}^F - \frac{M_{AB}^F}{2}$ $M_{BA}^{FM} = \frac{Pa(a+b)}{L} - \left( -\frac{Pa(a+b)}{2L} \right)$ $M_{BA}^{FM} = \frac{3Pa(a+b)}{2L}$	

معادلات الانتقال والدوران:

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L} (2\theta_A + \theta_B - 3\psi) + M_{AB}^F \quad (3-4)$$

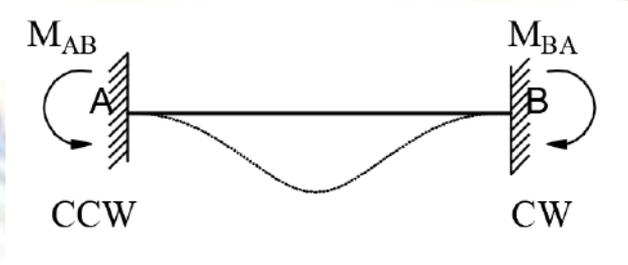
$$M_{BA} = \frac{2EI}{L} (\theta_A + 2\theta_B - 3\psi) + M_{BA}^F$$

إنَّ المعادلات الناتجة تكون بدلالة قيم الدوران في عقد الجائز (المساند)، ولحلّها لا بد من معادلات إضافية وهي معادلات التوازن في عقد الجائز الوسطية، حيث يكون مجموع العزمين في مسند داخلي يجب أن يساوي إلى الصفر،  $M_{BA} + M_{BA} = 0$  في المسند B من الجائز المبين بالشكل (4-15). عندها يتم الحصول على جملة من المعادلات المتزامنة وبحلّها تنتج قيم الدورانات في العقد، ثم بتعويض هذه القيم في معادلات عزوم النهايات تكون المسألة قد حُلّت. هناك شرطان يُسهّلان الحل إنَّ وُجدا في المسألة، أولهما أن الدوران في الوثيقة معدوم والثاني أن العزم معدوم في المساند الطرفية.

لا تسمح المساند في الجائز المبيّن بالشكل (4-15) بأي انتقالات وبالتالي تكون قيمة  $\psi = 0$  (الحد الخاص بالانتقال في معادلة الانتقال والدوران) معدومة، ولكن ليست هذه الحال دائماً، فقد يحدث انتقال معلوم في مسند ما من الجائز أو حتى في عدة مساند عندها تكون  $\psi \neq 0$ . تعتبر  $\psi$  موجبة عندما يدور العنصر مع عقارب الساعة بسبب الانتقال (بغض النظر عن موقع النهاية التي تخضع لانتقال، يمين أو يسار العنصر). عندما تكون أطوال المجازات واحدة ومقاطع العناصر واحدة في الجائز المستمر يمكن اختصار القيمة  $\frac{2EI}{L}$  من المعادلات. وقد يكون من المفيد في حال اختلاف قيم  $\frac{EI}{L}$  من عنصر إلى آخر التعبير عنها بدلالة قيم نسبية.

#### 4-4-1 اصطلاح الإشارة:

إن أكبر صعوبة في هذه الطريقة تكمن في استخدام الإشارات الصحيحة لذلك من المهم فهم هذه الإشارات قبل تطبيق المعادلات، الشكل (4-16). يتم اعتبار العزم الذي يدور مع عقارب الساعة موجباً Clockwise بينما يُعتبر العزم الذي يدور عكس عقارب الساعة Counter Clockwise سالباً. في حين أن القاعدة التي تتّبع بعدها أثناء رسم مخطط عزم الانعطاف هي قاعدة شد الألياف حيث يُعتبر العزم الموجب هو العزم الذي يشد الألياف السفلية.



الشكل (4-16)

#### 4-4-2 معادلة الانتقال والدوران من أجل عنصر موثوق ومسنود:

ليكن العنصر AB موثوق في B ومسنود في A فيكون العزم  $M_{AB}$  معدوماً، بتطبيق المعادلات (3-4) يكون:

$$0 = \frac{2EI}{L}(2\theta_A + \theta_B - 3\psi) + M_{AB}^F \quad (4-4)$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L}(\theta_A + 2\theta_B - 3\psi) + M_{BA}^F \quad (5-4)$$

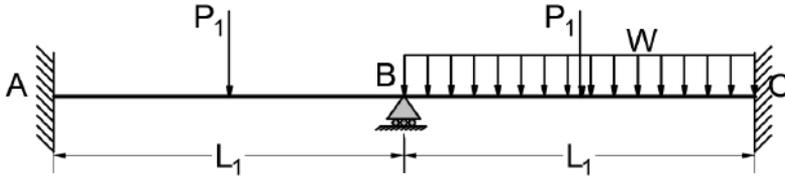
بأخذ جداء المعادلة (5-4) بالرقم 2 وطرح المعادلة (4-4) منها يتم الحصول على:

$$M_{BA} = \frac{3EI}{L}(\theta_B - \psi) + \left( M_{BA}^F - \frac{M_{AB}^F}{2} \right)$$

$$M_{BA} = \frac{3EI}{L}(\theta_B - \psi) + M_{BA}^{FM} \quad (6-4)$$

• مثال توضيحي:

أوجد الدورانات في عقد الجائز المبين بالشكل (17-4) بالاعتماد على طريقة الانتقال والدوران.



الشكل (17-4)

يُلاحظ أن الجائز غير مقرر ستاتيكيًا من الدرجة الثالثة (باستبعاد القوى الأفقية كونه محمّل شاقوليًا فقط). ودرجة عدم التقرير الستاتيكي تُحسب كما يلي  $m = r - 2 = 5 - 2 = 3$ . بينما درجة عدم التقرير الحركي فتساوي إلى الواحد والمجهول الوحيد هو الدوران في المسند B؛ ذلك لأن العقد الثلاث A, B, C لا تنتقل شاقوليًا والدوران معدوم في A, B والتشوهات الأفقية مهملة.

قيم عزوم الوثق للعناصر حسب الأحمال الموجودة موضحة بالشكل (18-4).

تطبيق المعادلات (3-4) على العناصر:

• العنصر AB، الطول  $L_1$ ، العطالة EI

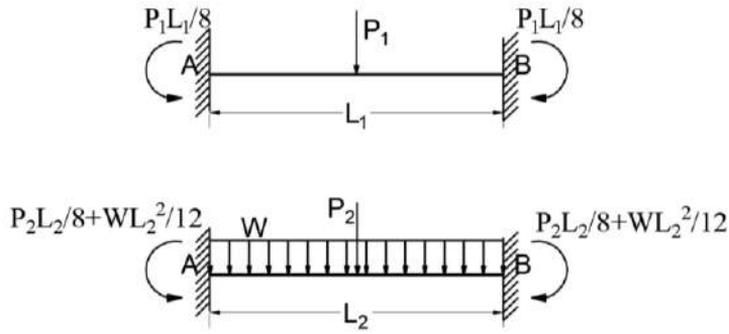
$$M_{AB} = \frac{4EI}{L_1} \theta_A + \frac{2EI}{L_1} \theta_B - \frac{P_1 L_1}{8}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L_1} \theta_A + \frac{4EI}{L_1} \theta_B + \frac{P_1 L_1}{8}$$

• العنصر BC، الطول  $L_2$ ، العطالة EI

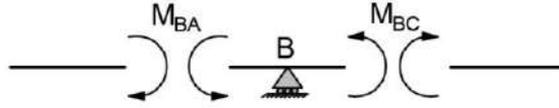
$$M_{BC} = \frac{4EI}{L_2} \theta_B + \frac{2EI}{L_2} \theta_C - \frac{P_2 L_2}{8} - \frac{W L_2^2}{12}$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{L_2} \theta_B + \frac{4EI}{L_2} \theta_C + \frac{P_2 L_2}{8} + \frac{W L_2^2}{12}$$



الشكل (18-4)

بما أن الدوران في A و C معدوم يكون قد تم الحصول على أربع معادلات بخمسة مجاهيل، وهي عزوم النهايات والدوران في B. لحل هذه المشكلة يتم اللجوء إلى توازن العزوم في العقدة B.



الشكل (19-4)

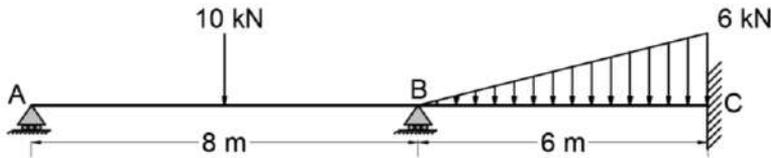
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -M_{BA} - M_{BC} = 0$$

$$\frac{4EI}{L_2} \theta_B - \frac{P_2 L_2}{8} - \frac{W L_2^2}{12} + \frac{4EI}{L_1} \theta_B + \frac{P_1 L_1}{8} = 0 \quad ; \quad \theta_B = \frac{\left[ -\frac{P_1 L_1}{8} + \frac{P_2 L_2}{8} + \frac{W L_2^2}{12} \right]}{\left[ \frac{4EI}{L_1} + \frac{4EI}{L_2} \right]}$$

4-5 أمثلة محلولة على تطبيق طريقة الانتقال والدوران على الجوائز:

مثال (1-4):

ارسم كلاً من مخطط الجهد القاطع ومخطط عزم الانعطاف والشكل المشوه للجوائز المبين بالشكل (20-4)، علماً بأن العطالة ثابتة.



الشكل (20-4)

1- عزوم الوثق:

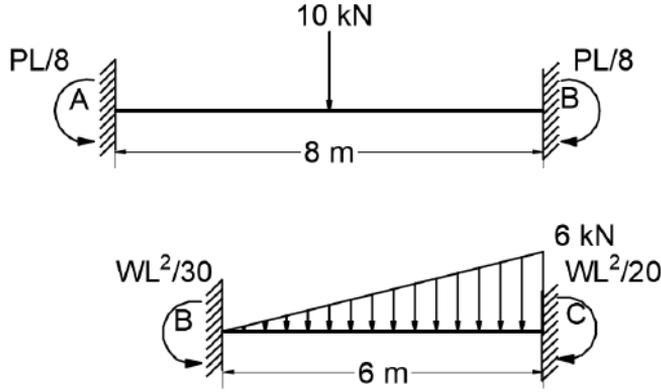
إنّ عزوم الوثق مبيّنة بالشكل (21-4) وهي تُحسب كما يلي:

$$M_{AB}^F = -\frac{PL}{8} = \frac{-10 \times 8}{8} = -10 \text{ kN.m}$$

$$M_{BA}^F = \frac{PL}{8} = \frac{10 \times 8}{8} = 10 \text{ kN.m}$$

$$M_{BC}^F = -\frac{WL^2}{30} = \frac{-6 \times 36}{30} = -7.2 \text{ kN.m}$$

$$M_{CB}^F = \frac{WL^2}{20} = \frac{6 \times 36}{20} = 10.8 \text{ kN.m}$$



الشكل (21-4)

2- تطبيق المعادلات (3-4) على العناصر:

• العنصر AB، الطول 8m، العطالة EI

$$M_{AB} = \frac{4EI}{8} \theta_A + \frac{2EI}{8} \theta_B - 10 \quad (1)$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{8} \theta_A + \frac{4EI}{8} \theta_B + 10 \quad (2)$$

• العنصر BC، الطول 6m، العطالة EI

$$M_{BC} = \frac{4EI}{6} \theta_B + \frac{2EI}{6} \theta_C - 7.2 \quad (3)$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{6} \theta_B + \frac{4EI}{6} \theta_C + 10.8 \quad (4)$$

إنّ العزم الطرفي  $M_{AB}$  معدوم، وبالتالي بأخذ جداء المعادلة (2) بالرقم 2 وطرح المعادلة (1) منها يتم الحصول على:

$$M_{BA} = \frac{3EI}{8} \theta_B + 15 \quad (5)$$

وتبقى المعادلات الثلاث التالية بعد حذف الدوران المعدوم في الوثيقة.

$$M_{BC} = \frac{4EI}{6} \theta_B - 7.2 \quad (3)$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{6} \theta_B + 10.8 \quad (4)$$

$$M_{BA} = \frac{3EI}{8} \theta_B + 15 \quad (5)$$

وهي عبارة عن ثلاث معادلات بأربع مجاهيل.

3- توازن العقد:

$$\sum^+ M_B = 0 \Rightarrow -M_{BA} - M_{BC} = 0$$

$$\left( \frac{4EI}{6} + \frac{3EI}{8} \right) \theta_B + 7.8 = 0 \Rightarrow \theta_B = \frac{-7.488}{EI}$$

بتعويض  $\theta_B$  في المعادلة (1) يتم الحصول على الدوران في A.

$$0 = \frac{4EI}{8} \theta_A + \frac{2EI}{8} \theta_B - 10 \Rightarrow \theta_A = \frac{23.744}{EI}$$

4- قيم العزوم في العقد:

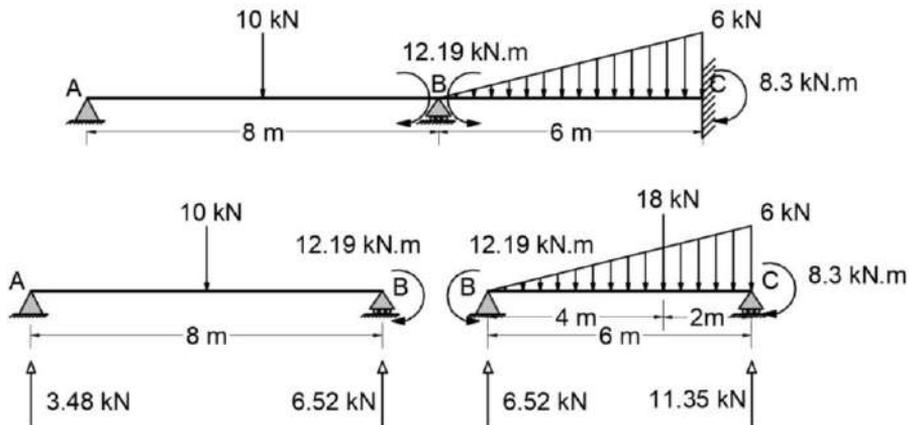
بتعويض  $\theta_A, \theta_B$  في المعادلات (3,4,5) يتم الحصول على عزوم النهايات.

$$M_{BA} = +12.19kN.m \quad M_{BC} = -12.19kN.m \quad M_{CB} = +8.3kN.m$$

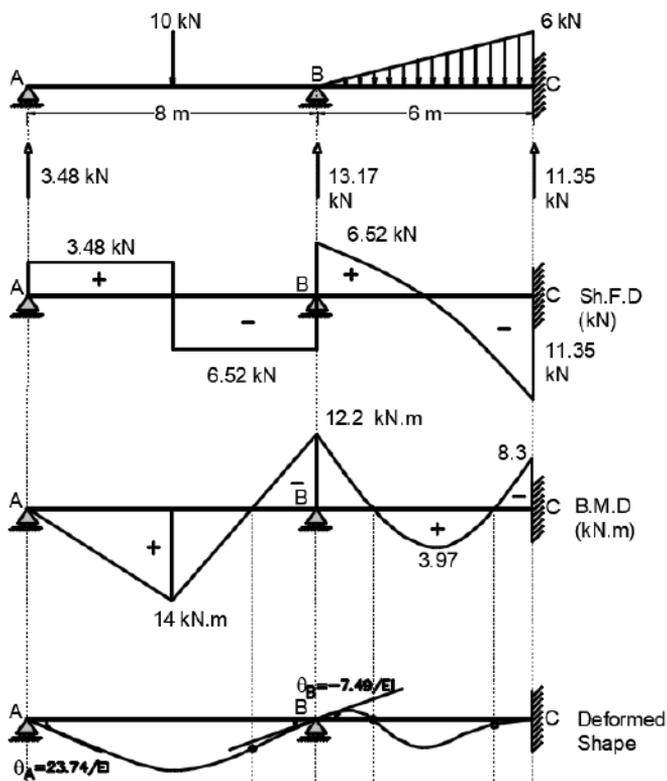
5- رسم المخططات:

يتم تنزيل عزوم العقد على الجانز ثم حساب قوى القص لكل عنصر على حدة، الشكل (4-22). ثم يتم

رسم المخططات بسهولة كما هو موضّح بالشكل (4-23).



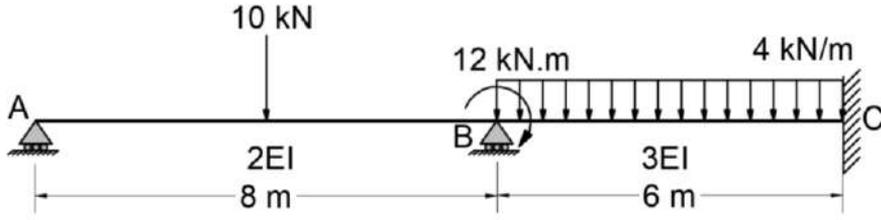
الشكل (22-4)



الشكل (23-4)

مثال (2-4):

ارسم مخطط القص ومخطط عزم الانعطاف والشكل المتشوه للجائز المبين بالشكل (24-4).



الشكل (24-4)

1- عزوم الوثق:

$$M_{AB}^F = -\frac{PL}{8} = \frac{-10 \times 8}{8} = -10 \text{ kN.m}$$

$$M_{BA}^F = \frac{PL}{8} = \frac{10 \times 8}{8} = 10 \text{ kN.m}$$

$$M_{BA}^{FM} = \frac{3PL}{16} = \frac{3 \times 10 \times 8}{16} = 15 \text{ kN.m}$$

$$M_{BC}^F = -\frac{WL^2}{12} = \frac{-4 \times 36}{12} = -12 \text{ kN.m}$$

$$M_{CB}^F = \frac{WL^2}{12} = \frac{4 \times 36}{12} = 12 \text{ kN.m}$$

2- تطبيق معادلات العزوم (3-4) على العناصر:

• العنصر AB، الطول 8m، العطالة 2EI

$$M_{AB} = \frac{4(2EI)}{8} \theta_A + \frac{2(2EI)}{8} \theta_B - 10 \quad (1)$$

$$M_{BA} = \frac{2(2EI)}{8} \theta_A + \frac{4(2EI)}{8} \theta_B + 10 \quad (2)$$

• العنصر BC، الطول 6m، العطالة 3EI

$$M_{BC} = \frac{4(3EI)}{6} \theta_B + \frac{2(3EI)}{6} \theta_C - 12 \quad (3)$$

$$M_{CB} = \frac{2(3EI)}{6} \theta_B + \frac{4(3EI)}{6} \theta_C + 12 \quad (4)$$

إنّ العزم الطرفي  $M_{AB}$  معدوم، وبالتالي بأخذ جداء المعادلة (2) بالرقم 2 وطرح المعادلة (1) منها يتم الحصول على:

$$M_{BA} = \frac{6EI}{8} \theta_B + 15 \quad (5)$$

وتبقى المعادلات الثلاث التالية بعد حذف الدوران المعلوم في الوثيقة.

$$M_{BC} = 2EI\theta_B - 12 \quad (3)$$

$$M_{CB} = EI\theta_B + 12 \quad (4)$$

$$M_{BA} = \frac{3EI}{4} \theta_B + 15 \quad (5)$$

وهي عبارة عن ثلاث معادلات بأربع مجاهيل.

- من الممكن إيجاد المعادلة (5) بطريقة أخرى وذلك بالاعتماد على عزم الوثيقة المعدل بدلاً من عزم الوثيقة التامة باستعمال المعادلة (4-6).

$$M_{BA} = \frac{3EI}{L} (\theta_B - \psi) + M_{BA}^{FM} = \frac{3(2EI)}{8} \theta_B + 15$$

وهي المعادلة (5) أعلاه ذاتها.

3- معادلات توازن العقد:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -M_{BA} - M_{BC} + 12 = 0$$

$$\left( \frac{3}{4} EI + 2EI \right) \theta_B - 9 = 0 \Rightarrow \theta_B = \frac{3.273}{EI}$$

بتعويض  $\theta_B$  في المعادلة (1) يتم الحصول على الدوران في A.

$$0 = EI\theta_A + \frac{EI}{2} \theta_B - 10 \Rightarrow \theta_A = \frac{8.364}{EI}$$

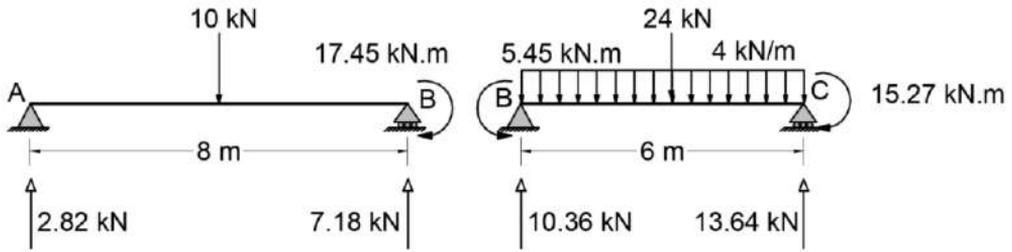
4- قيم العزوم في العقد:

بتعويض  $\theta_A, \theta_B$  في المعادلات (3,4,5) يتم الحصول على عزوم النهايات.

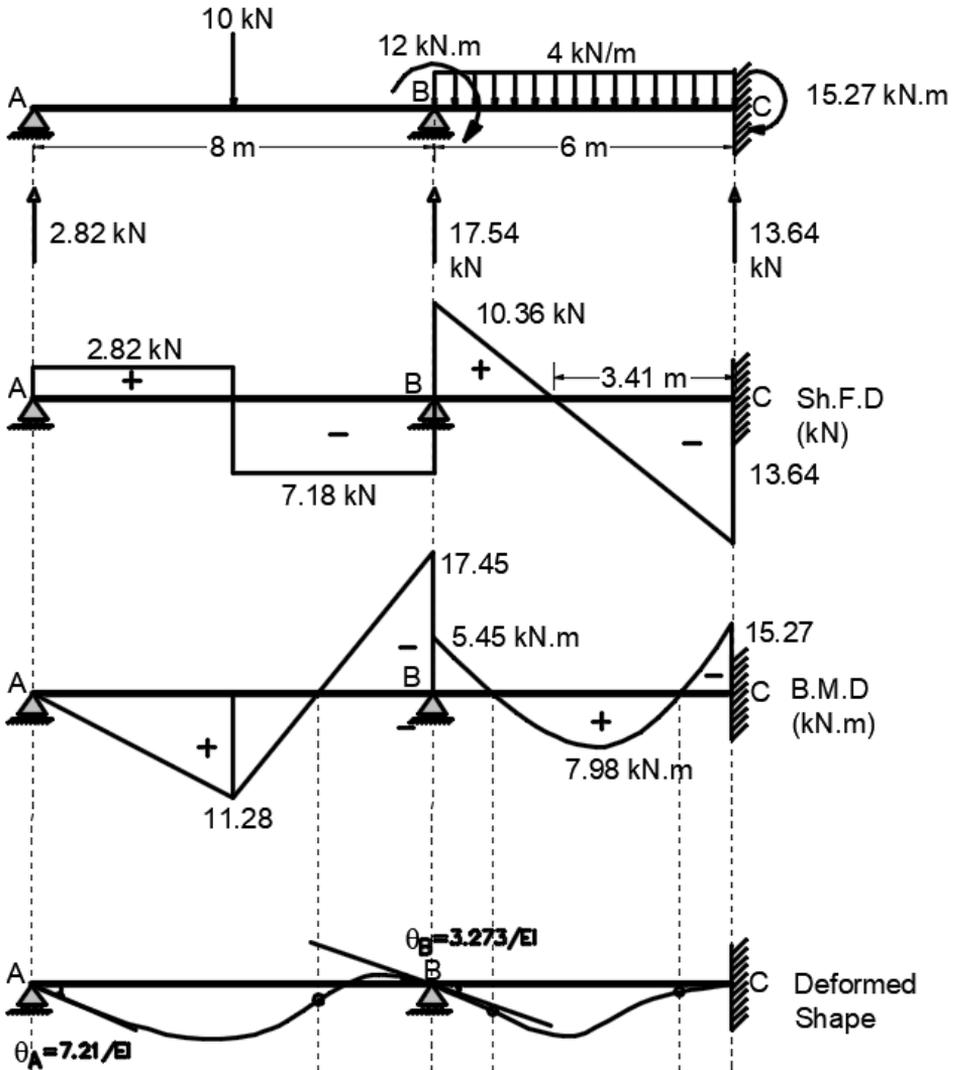
$$M_{BA} = +17.45kN.m \quad M_{BC} = -5.45kN.m \quad M_{CB} = +15.27kN.m$$

5- رسم المخططات:

يتم تنزيل عزوم العقد على الجائز ثم حساب قوى القص لكل عنصر على حدة، الشكل (4-25). ثم يتم رسم المخططات بسهولة كما هو موضح بالشكل (4-26).



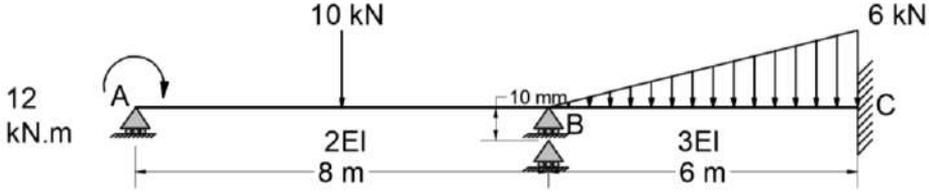
الشكل (25-4)



الشكل (26-4)

### مثال (3-4):

ارسم كلاً من مخطط القص ومخطط عزم الانعطاف والشكل المشوه في الجائز المبين بالشكل (27-4) علماً بأن المسند B يهبط بالمقدار 10mm، حيث  $E = 200GPa$ ،  $I = 200 \times 10^6 mm^4$ .



الشكل (27-4)

1- عزوم الوتق:

إنّ الصلابة الانحنائية تساوي  $EI = (200 \times 10^6 kPa)(200 \times 10^{-6} m^4) = 40000 kN.m^2$  وتكون عزوم الوتق مبيّنة بالشكل (28-4) وهي تُحسب كما يلي:

$$M_{AB}^F = -\frac{6(2EI)0.01}{8^2} = -75 kN.m$$

$$M_{BA}^F = -\frac{6(2EI)0.01}{8^2} = -75 kN.m$$

$$M_{AB}^F = -\frac{PL}{8} = \frac{-10 \times 8}{8} = -10 kN.m$$

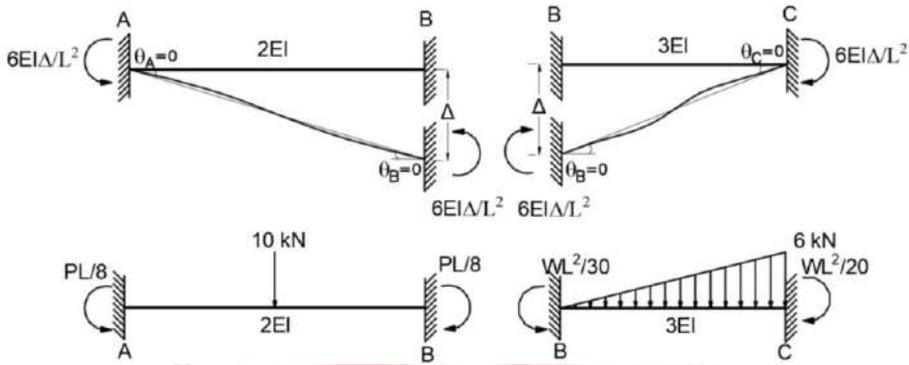
$$M_{BA}^F = \frac{PL}{8} = \frac{10 \times 8}{8} = 10 kN.m$$

$$M_{BC}^F = +\frac{6(3EI)0.01}{6^2} = 200 kN.m$$

$$M_{CB}^F = +\frac{6(3EI)0.01}{6^2} = 200 kN.m$$

$$M_{BC}^F = -\frac{WL^2}{30} = \frac{-6 \times 36}{30} = -7.2 kN.m$$

$$M_{CB}^F = \frac{WL^2}{20} = \frac{6 \times 36}{20} = 10.8 kN.m$$



الشكل (28-4)

2- تطبيق المعادلات (3-4) على العناصر:

• العنصر AB، الطول 8m، العطالة  $2EI$

$$+12 = \frac{4(2EI)}{8}\theta_A + \frac{2(2EI)}{8}\theta_B - 75 - 10 \Rightarrow 0 = EI\theta_A + \frac{EI}{2}\theta_B - 97 \quad (1)$$

$$M_{BA} = \frac{2(2EI)}{8}\theta_A + \frac{4(2EI)}{8}\theta_B - 75 + 10 \Rightarrow M_{BA} = \frac{EI}{2}\theta_A + EI\theta_B - 65 \quad (2)$$

• العنصر BC، الطول 6m، العطالة  $3EI$

$$M_{BC} = \frac{4(3EI)}{6}\theta_B + \frac{2(3EI)}{6}\theta_C + 200 - 7.2 \Rightarrow M_{BC} = 2EI\theta_B + 192.8 \quad (3)$$

$$M_{CB} = \frac{2(3EI)}{6}\theta_B + \frac{4(3EI)}{6}\theta_C + 200 + 10.8 \Rightarrow M_{CB} = EI\theta_B + 210.8 \quad (4)$$

بأخذ جداء المعادلة (2) بالرقم 2 و طرح المعادلة (1) منها يتم الحصول على:

$$M_{BA} = \frac{3}{4}EI\theta_B - 16.5 \quad (5)$$

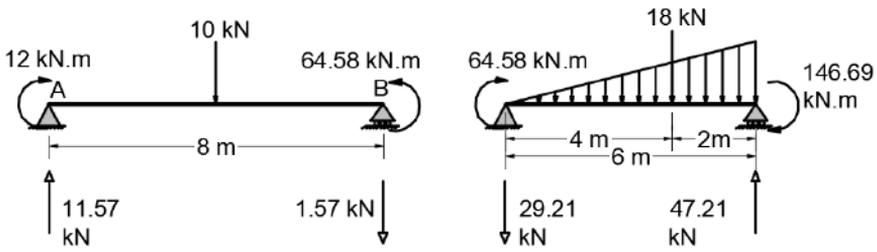
3- توازن العقد:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -M_{BA} - M_{BC} = 0$$

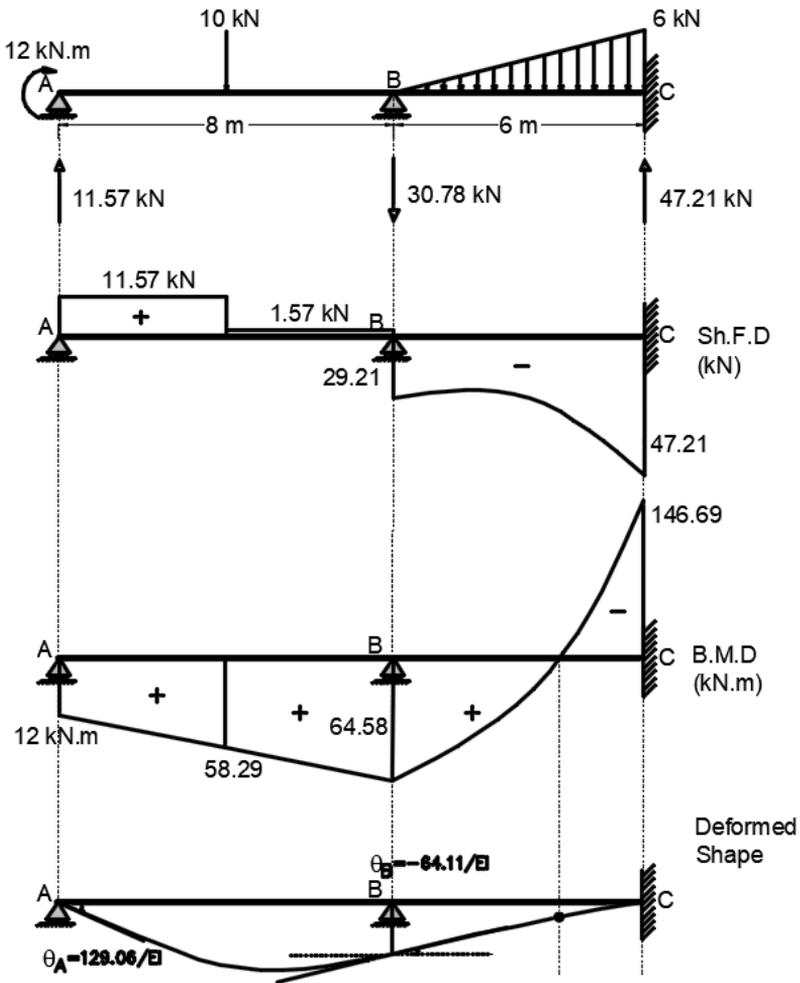
$$\left(\frac{3}{4} + 2\right)EI\theta_B - 16.5 + 192.8 = 0 \Rightarrow \theta_B = \frac{-64.109}{EI}$$

بتعويض  $\theta_B$  في المعادلة (1) يتم الحصول على الدوران في A.

$$\theta_A = \frac{+129.06}{EI}$$



الشكل (29-4)



الشكل (30-4)

4- قيم العزوم في العقد:

بتعويض  $\theta_A, \theta_B$  في المعادلات (3،4،5) يتم الحصول على عزوم النهايات.

$$M_{BA} = -64.58kN.m \quad M_{BC} = 64.58kN.m \quad M_{CB} = 146.69kN.m$$

6- رسم المخططات:

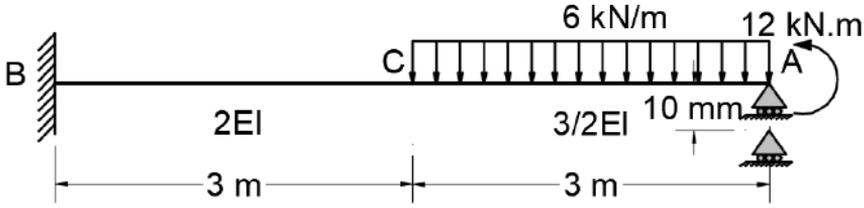
يتم تنزيل عزوم العقد على الجائز ثم حساب قوى القص لكل عنصر على حدة، الشكل (4-29). ثم يتم رسم المخططات بسهولة كما هو موضَّح بالشكل (4-30).

**مثال (4-4):**

استخدم طريقة الانتقال والدوران في الجائز المبيّن بالشكل (4-31) من أجل:

- حساب قيم الدوران في المساند.
- إيجاد ردود أفعال المساند.
- رسم مخططات القص والانعطاف والشكل المتشوه.

علماً بأن المسند A يهبط بالمقدار 10mm. اعتبر  $E = 200GPa$ ,  $I = 50 \times 10^6 mm^4$ .



الشكل (4-31)

1- عزوم الوثق:

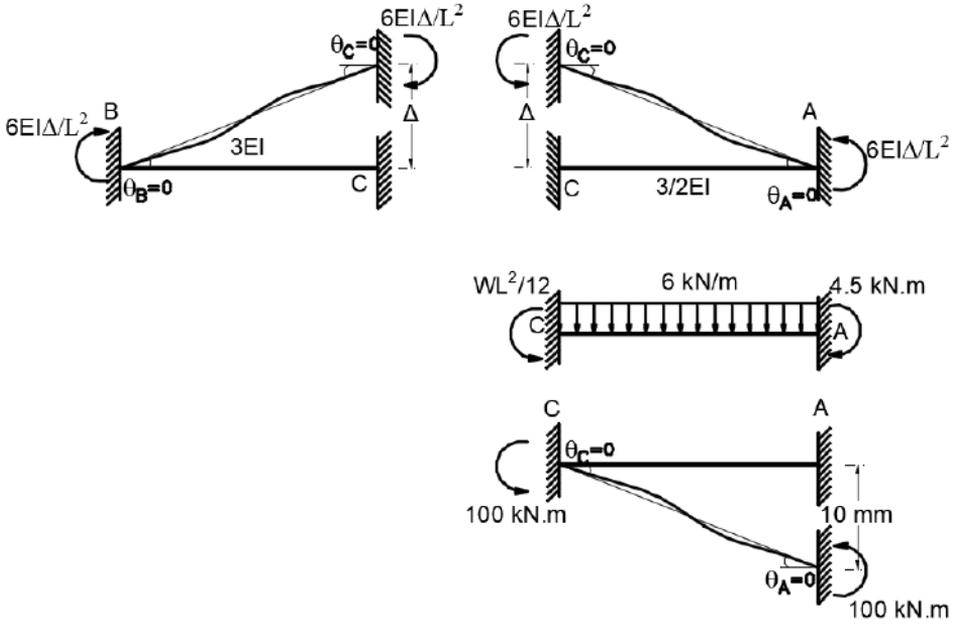
إنّ الصلابة الانحنائية تساوي  $EI = (200 \times 10^6 kPa)(50 \times 10^{-6} m^4) = 10000kN.m^2$  وتكون عزوم الوثق مبيّنة بالشكل (4-32) وهي تُحسب كما يلي:

$$M_{BC}^F = \frac{6(2EI)\Delta_C}{3^2} = \frac{4EI\Delta_C}{3} = M_{CB}^F$$

$$M_{CA}^F = -\frac{6\left(\frac{3}{2}EI\right)\Delta_C}{3^2} = -EI\Delta_C = M_{AC}^F$$

$$M_{CA}^F = -\frac{WL^2}{12} = \frac{-6 \times 9}{12} = -4.5 \text{ kN.m}, M_{AC}^F = +4.5 \text{ kN.m}$$

$$M_{CA}^F = -\frac{6\left(\frac{3}{2}EI\right)0.01}{3^2} = -100 = M_{AC}^F$$



الشكل (32-4)

يتم الحصول على النتيجة ذاتها عن طريق إدخال أثر الانتقال في معادلات الانتقال والدوران عن طريق القيمة  $1/2$  حيث تُعتبر في العنصر BC سالبة وفي العنصر CA موجبة (ذلك لأن العنصر BC يدور عكس عقارب الساعة فتكون  $\Delta$  سالبة، بينما يدور العنصر AC مع عقارب الساعة فتعتبر  $\Delta$  موجبة).

2- تطبيق المعادلات (3-4) على العناصر:

• العنصر BC، الطول 3m، العطالة 2EI

$$M_{BC} = \frac{2(2EI)}{3} \theta_C + \frac{4EI}{3} \Delta_C \quad (1)$$

$$M_{CB} = \frac{4(2EI)}{3} \theta_C + \frac{4EI}{3} \Delta_C \quad (2)$$

• العنصر CA، الطول 3m، العطالة 3/2EI

$$M_{CA} = \frac{4(1.5EI)}{3}\theta_C + \frac{2(1.5EI)}{3}\theta_A - EI\Delta_C - 4.5 - 100 \quad (3)$$

$$-12 = \frac{2(1.5EI)}{3}\theta_C + \frac{4(1.5EI)}{3}\theta_A - EI\Delta_C + 4.5 - 100 \quad (4)$$

بأخذ جداء المعادلة (3) بالرقم 2 وطرح المعادلة (4) منها يتم الحصول على:

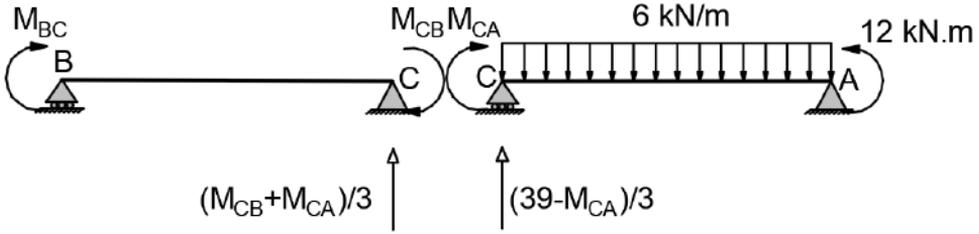
$$M_{CA} = \frac{3}{4}EI\theta_C - \frac{1}{2}EI\Delta_C - 62.75 \quad (5)$$

3- توازن العقدة C:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow -M_{CB} - M_{CA} = 0$$

$$4.167EI\theta_C + 0.833EI\Delta_C = 62.75 \quad (I)$$

وهي معادلة بمجهولين، وبالتالي هناك حاجة إلى معادلة أخرى، وبما أنه لا توجد قوة مركزة في C فإن مجموع قوى القص في C معدوم، الشكل (4-33).



الشكل (4-33)

ويكون:

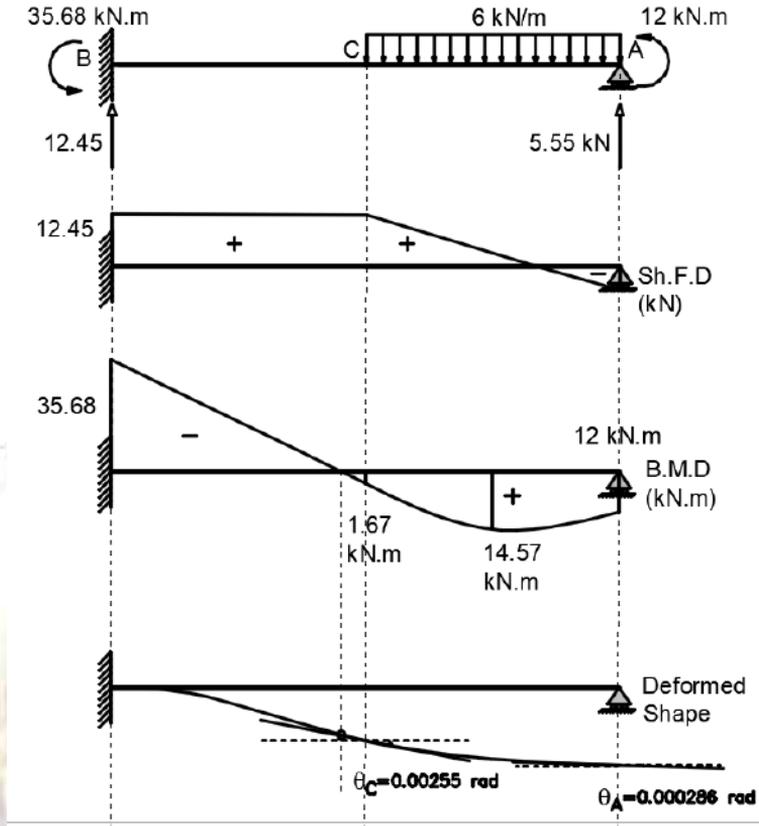
$$\sum V_C = 0 \Rightarrow \frac{M_{BC} + M_{CB}}{3} + \frac{39 - M_{CA}}{3} = 0 \Rightarrow M_{BC} + M_{CB} + 39 - M_{CA} = 0$$

بتعويض معادلات العزوم:

$$\frac{4EI}{3}\theta_C + \frac{4EI}{3}\Delta_C + \frac{8EI}{3}\theta_C + \frac{4EI}{3}\Delta_C + 39 - \frac{3}{4}EI\theta_C + \frac{1}{2}EI\Delta_C + 62.75 = 0$$

$$2.5EI\theta_C + 3.167EI\Delta_C = -101.75 \quad (II)$$

والآن بحل جملة المعادلتين (I) و (II) يتم الحصول على الانتقال والدوران في C.



الشكل (34-4)

$$\theta_C = \frac{25.512}{EI} = 0.00255 \text{ rad}, \Delta_C = \frac{-52.275}{EI} = -5.227 \text{ mm} \downarrow$$

بالتعويض في (4) يتم الحصول على الدوران في A.

$$\theta_A = \frac{2.86}{EI} = 0.00286 \text{ rad}$$

4- قيم العزوم في العقد:

بالتعويض في المعادلات (1، 2، 5) يتم الحصول على عزوم النهايات.

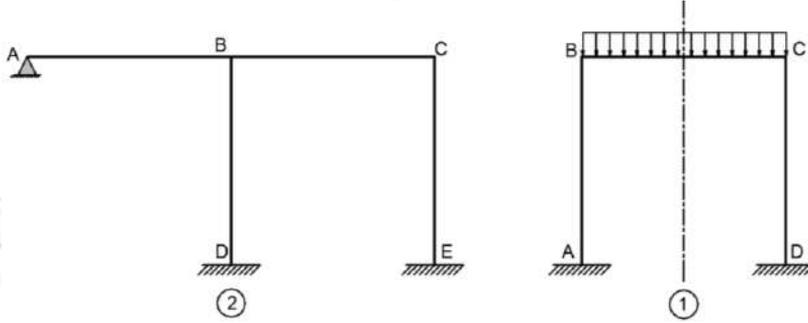
$$M_{BC} = -35.68 \text{ kN.m} \quad M_{CB} = -1.67 \text{ kN.m} \quad M_{CA} = 1.67 \text{ kN.m}$$

7- رسم المخططات:

يتم تنزيل عزوم العقد على الجائز ثم حساب ردود الأفعال، ثم يتم رسم المخططات بسهولة كما هو موضح بالشكل (34-4).

#### 6-4 تحليل الإطارات التي لا تخضع إلى حركة جانبية Frames with no Sidesway

يمكن تطبيق طريقة الانتقال والدوران على الإطارات غير المقررة بالطريقة المتبعة في الجوائز غير المقررة نفسها ، وذلك إذا لم يكن في الإطار أي إمكانية للانزياح الجانبي، ونظرياً لن ينزاح الإطار جانبياً إذا تحقق أحد الشرطين. فإما أن يكون الإطار متناظراً تماماً بالنسبة إلى محور مركزي بالنسبة لكل من الأبعاد وعزوم العطالة والحمولات، وإما أن يكون الإطار ممنوعاً من الحركة بسبب شروط الاستناد.



الشكل (4-35)

مثلاً في الإطار رقم (1) من الشكل (4-35) لن تحدث أي حركة جانبية بسبب التناظر، بينما يلاحظ في الإطار رقم (2) أن المسند A يمنع الانتقال أفقياً (علماً بأنه تم إهمال التشوهات المحورية والقصية)، في هاتين الحالتين ينعدم الحد الخاص بالانتقال في معادلات الانتقال والدوران (4-3) أي  $\psi = 0$  وتصبح المعادلات.

$$M_{AB} = \frac{2EI}{L}(2\theta_A + \theta_B) + M_{AB}^F$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{L}(\theta_A + 2\theta_B) + M_{BA}^F$$
(7-4)

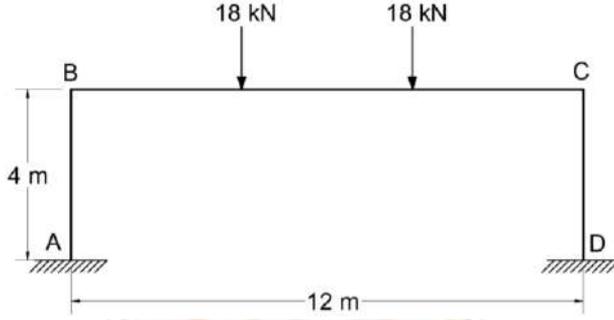
#### • مثال توضيحي:

أوجد العزوم في عقد الإطار المبين بالشكل (4-36) باستعمال طريقة الانتقال والدوران علماً بأن الصلابة الانحنائية EI ثابتة.

1- عزوم الوثق:

$$M_{BC}^F = \frac{-Pa(a+b)}{L} = \frac{-18 \times 4 \times 8}{12} = -48kN.m$$

$$M_{CB}^F = \frac{Pa(a+b)}{L} = 48kN.m$$



الشكل (36-4)



الشكل (37-4)

2- تطبيق معادلات العزوم (7-4) على العناصر:

• العنصر AB، الطول 4m، العطالة EI

$$M_{AB} = \frac{4EI}{4} \theta_A + \frac{2EI}{4} \theta_B \quad (1)$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{4} \theta_A + \frac{4EI}{4} \theta_B \quad (2)$$

• العنصر BC، الطول 12m، العطالة EI

$$M_{BC} = \frac{4EI}{12} \theta_B + \frac{2EI}{12} \theta_C - 48 \quad (3)$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{12} \theta_B + \frac{4EI}{12} \theta_C + 48 \quad (4)$$

• العنصر CD، الطول 4m، العطالة EI

$$M_{CD} = \frac{4EI}{4} \theta_C + \frac{2EI}{4} \theta_D \quad (5)$$

$$M_{DC} = \frac{2EI}{4} \theta_C + \frac{4EI}{4} \theta_D \quad (6)$$

3- توازن العقد:

$$\uparrow: \sum M_B = 0 \Rightarrow -M_{BA} - M_{BC} = 0 \quad \text{العقدة B:}$$

$$EI\theta_B + \frac{2EI}{12}(2\theta_B + \theta_C) - 48 = 0 \Rightarrow 1.333\theta_B + 0.1667\theta_C = \frac{48}{EI} \quad (I)$$

$$\uparrow: \sum M_C = 0 \Rightarrow -M_{CB} - M_{CD} = 0 \quad \text{العقدة C:}$$

$$EI\theta_C + \frac{2EI}{12}(2\theta_C + \theta_B) + 48 = 0 \Rightarrow 1.333\theta_C + 0.1667\theta_B = -\frac{48}{EI} \quad (II)$$

بالحل المشترك للمعادلتين (I) و (II):

$$\theta_B = -\theta_C = \frac{41.143}{EI}$$

4- قيم العزوم في العقد:

بتعويض  $\theta_B, \theta_C$  في معادلات العزوم يتم الحصول على عزوم النهايات.

$$M_{AB} = 20.6 \text{ kN.m} \quad M_{BC} = -41.1 \text{ kN.m} \quad M_{CD} = -41.1 \text{ kN.m}$$

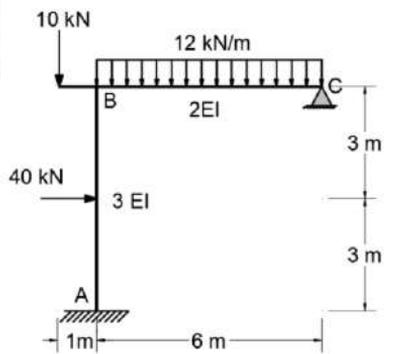
$$M_{BA} = 41.1 \text{ kN.m} \quad M_{CB} = 41.1 \text{ kN.m} \quad M_{DC} = -20.6 \text{ kN.m}$$

4-7 أمثلة محلولة على تطبيق طريقة الانتقال والدوران على الإطارات بدون حركة جانبية:

مثال (4-5):

استخدم طريقة الانتقال والدوران في الإطار المبين بالشكل (4-38) من أجل:

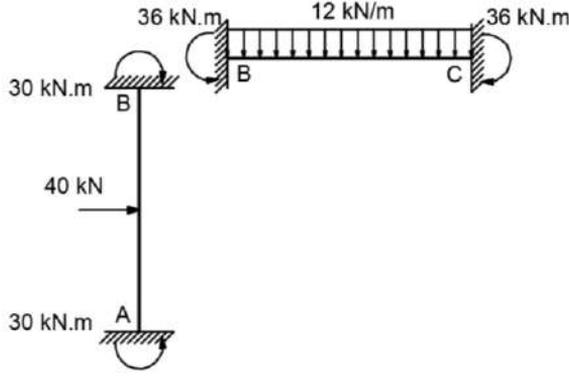
- حساب قيمة الدوران في العقدة B.
- إيجاد ردود أفعال المساند.
- رسم مخطط عزم الانعطاف والشكل المتشوه.



الشكل (38-4)

إنّ المسند B يمنع الحركة الجانبية في الإطار وبالتالي  $\psi = 0$  في المعادلات.

1- إيجاد عزوم الوتق:



الشكل (39-4)

$$M_{AB}^F = -\frac{PL}{8} = \frac{-40 \times 6}{8} = -30 \text{ kN.m}$$

$$M_{BA}^F = \frac{PL}{8} = \frac{40 \times 6}{8} = 30 \text{ kN.m}$$

$$M_{BC}^F = -\frac{WL^2}{12} = \frac{-12 \times 36}{12} = -36 \text{ kN.m}$$

$$M_{CB}^F = \frac{WL^2}{12} = \frac{12 \times 36}{12} = 36 \text{ kN.m}$$

2- تطبيق معادلات العزوم (7-4) على العناصر:

• العنصر AB، الطول 6m، العطالة  $3EI$

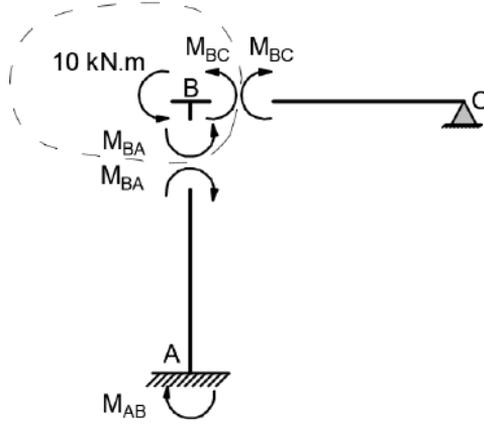
$$M_{AB} = \frac{2(3EI)}{6} \theta_B - 30 \Rightarrow M_{AB} = EI\theta_B - 30 \quad (1)$$

$$M_{BA} = \frac{4(3EI)}{6} \theta_B + 30 \Rightarrow M_{BA} = 2EI\theta_B + 30 \quad (2)$$

• العنصر BC، الطول 6m، العطالة  $2EI$ ، معادلة عنصر موثوق ومسند.

$$M_{BC} = \frac{3(2EI)}{6} \theta_B - 36 - 18 \Rightarrow M_{BC} = EI\theta_B - 54 \quad (3)$$

3- معادلات توازن العقد:



الشكل (4-4)

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -M_{BA} - M_{BC} - 10 = 0$$

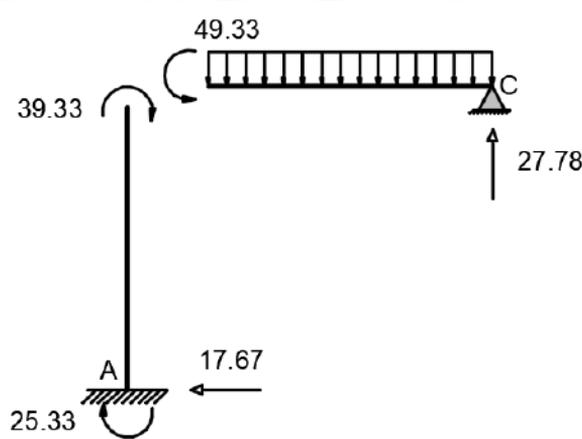
$$3EI\theta_B + 30 - 54 + 10 = 0 \Rightarrow \theta_B = \frac{4.667}{EI}$$

4- قيم العزوم في العقد:

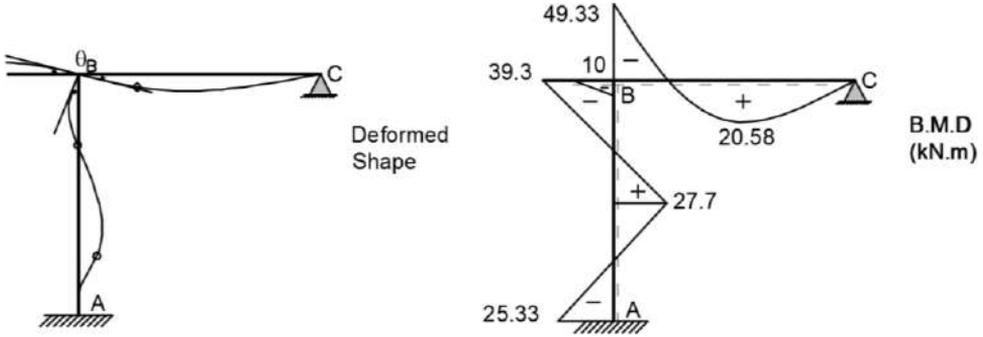
$$M_{AB} = -25.33 \text{ kN.m} \quad M_{BA} = 39.33 \text{ kN.m} \quad M_{BC} = -49.33 \text{ kN.m}$$

6- رسم المخططات:

يتم تنزيل عزوم العقد على الإطار ثم حساب قوى القص لكل عنصر على حدة، الشكل (4-41). ثم يتم رسم مخطط عزم الانعطاف والشكل المنشوه كما هو موضَّح بالشكل (4-42).



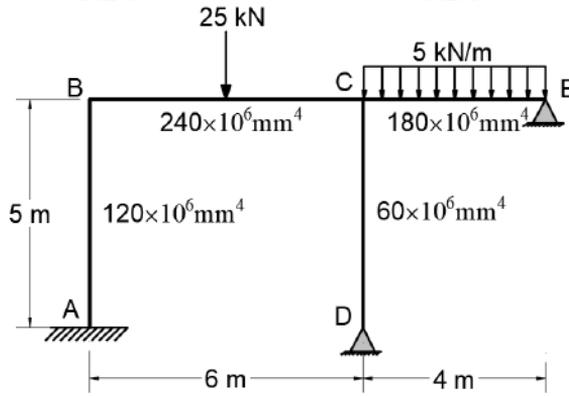
الشكل (41-4)



الشكل (42-4)

### مثال (6-4):

ارسم كلاً من مخطط القص، عزم الانعطاف والشكل المتشوه للإطار المبين بالشكل (43-4)، علماً بأن  $E = 200GPa$  وقيم عزوم العتالة لجميع العناصر موضحة على الشكل.



الشكل (43-4)

1- قيم عزوم الوثق:

$$M_{BC}^F = -\frac{PL}{8} = -18.75kN.m$$

$$M_{CB}^F = \frac{PL}{8} = 18.75kN.m$$

$$M_{CE}^{FM} = \frac{WL^2}{12} + \frac{WL^2}{24} = 6.667 + 3.333 = 10kN.m$$

2- معادلات الانتقال والدوران باعتبار  $I = 60 \times 10^6 mm^4$

• العنصر AB، الطول 5m، العطالة 2EI

$$M_{AB} = \frac{4(2EI)}{5}\theta_A + \frac{2(2EI)}{5}\theta_B \quad (1)$$

$$M_{BA} = \frac{2(2EI)}{5}\theta_A + \frac{4(2EI)}{5}\theta_B \quad (2)$$

• العنصر BC، الطول 6m، العطالة 4EI

$$M_{BC} = \frac{4(4EI)}{6}\theta_B + \frac{2(4EI)}{6}\theta_C - 18.75 \quad (3)$$

$$M_{CB} = \frac{2(4EI)}{6}\theta_B + \frac{4(4EI)}{6}\theta_C + 18.75 \quad (4)$$

• العنصر CD، الطول 5m، العطالة EI

$$M_{CD} = \frac{3EI}{5}\theta_C \quad (5)$$

• العنصر CE، الطول 4m، العطالة 3EI

$$M_{CE} = \frac{3(3EI)}{4}\theta_C - 10 \quad (6)$$

5- توازن العقد:

العقدة B:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -M_{BA} - M_{BC} = 0$$

$$4.267EI\theta_B + 1.333EI\theta_C = 18.75 \quad (I)$$

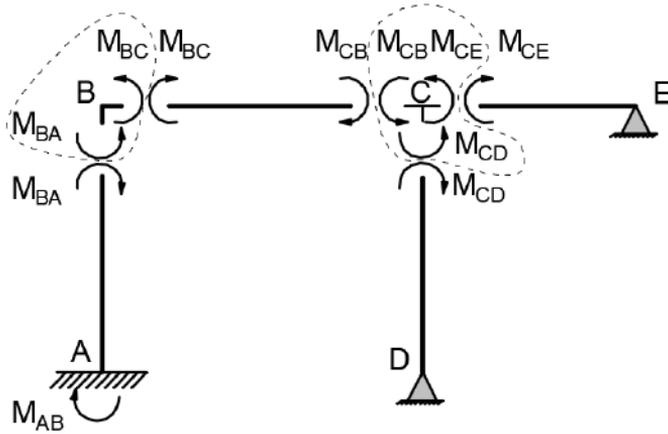
العقدة C:

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow -M_{CB} - M_{CD} - M_{CE} = 0$$

$$1.333EI\theta_B + 5.517EI\theta_C = -8.75 \quad (II)$$

بحل جملة المعادلتين (I) و (II):

$$\theta_B = \frac{5.29}{EI}, \theta_C = \frac{-2.864}{EI}$$



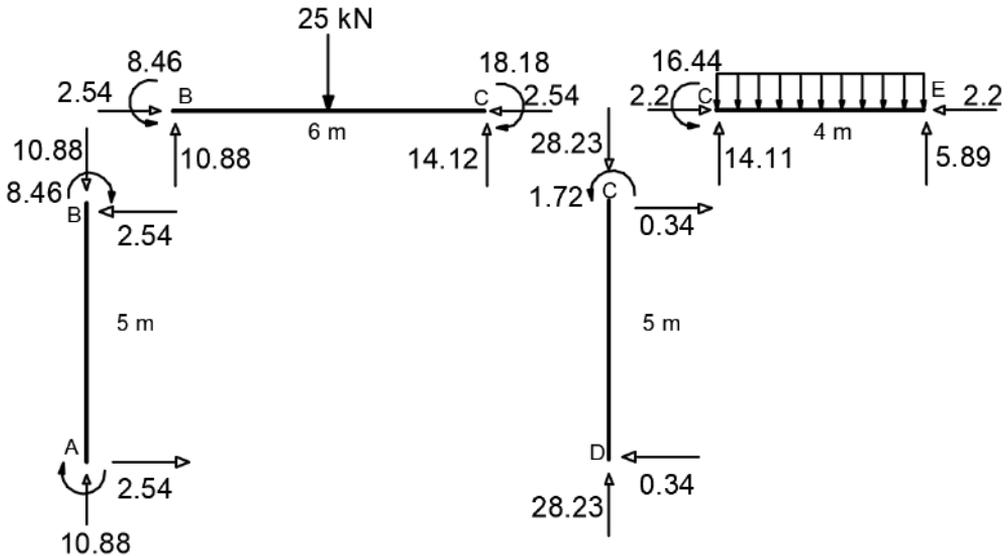
الشكل (44-4)

5- قيم العزوم في العقد:

$$\begin{aligned}
 M_{AB} &= 4.23 \text{ kN.m} & M_{BC} &= -8.46 \text{ kN.m} & M_{CD} &= -1.72 \text{ kN.m} \\
 M_{BA} &= 8.46 \text{ kN.m} & M_{CB} &= 18.18 \text{ kN.m} & M_{CE} &= -16.44 \text{ kN.m}
 \end{aligned}$$

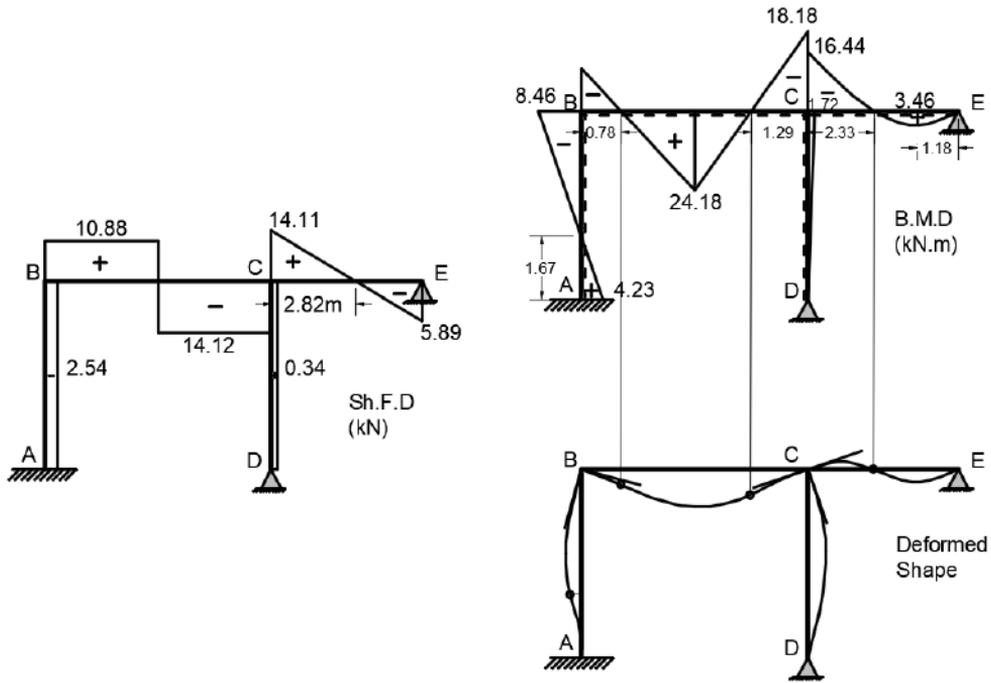
7- قوى القص لكل عنصر:

يتم تنزيه عزوم العقد على الإطار ثم حساب قوى القص لكل عنصر على حدة، الشكل (45-4).



الشكل (45-4)

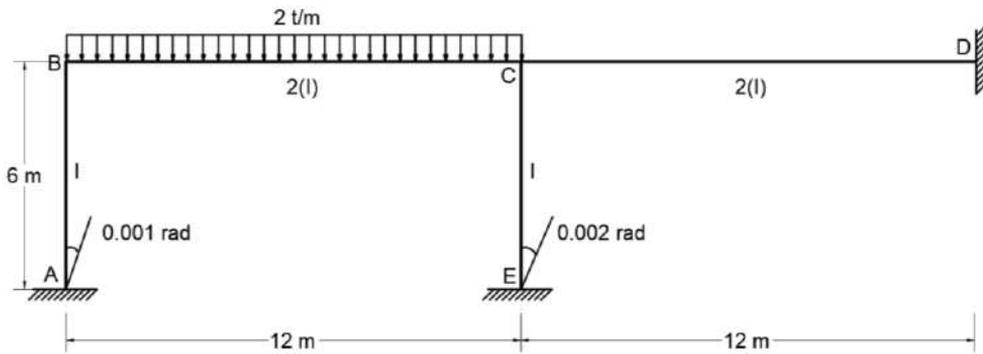
8- مخططات قوى القص وعزم الانعطاف والشكل المتشوه:



الشكل (46-4)

مثال (7-4):

تخضع الوثاقعة في A من المنشأ المبين بالشكل (47-4) إلى دوران قدره  $\theta_A = 0.001 \text{ rad}$ ، بينما تخضع الوثاقعة في E إلى دوران قدره  $\theta_A = 0.002 \text{ rad}$ ، والمطلوب إيجاد العزوم في عقد المنشأ بالاعتماد على طريقة الانتقال والدوران وذلك بفرض  $EI = 60000 \alpha . m^2$ .



الشكل (47-4)

إنّ الوثاقعة في D تمنع الانتقال الجانبي في الإطار للعقدتين C, B فيبقى لدينا مجهولان فقط هما  $\theta_B, \theta_C$

1. عزوم الوثق:

$$M_{BC}^F = -\frac{WL^2}{12} = -24t.m, M_{CB}^F = \frac{WL^2}{12} = 24t.m$$

2. معادلات الانتقال والدوران باعتبار  $I = 60 \times 10^6 mm^4$

• العنصر AB، الطول 6m، العطالة EI

$$M_{AB} = \frac{4EI}{6} \cdot 0.001 + \frac{2EI}{6} \theta_B \Rightarrow M_{AB} = \frac{EI}{3} \theta_B + 40 \quad (1)$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{6} \cdot 0.001 + \frac{4EI}{6} \theta_B \Rightarrow M_{BA} = \frac{2EI}{3} \theta_B + 20 \quad (2)$$

• العنصر BC، الطول 12m، العطالة 2EI

$$M_{BC} = \frac{2EI}{3} \theta_B + \frac{EI}{3} \theta_C - 24 \quad (3)$$

$$M_{CB} = \frac{EI}{3} \theta_B + \frac{2EI}{3} \theta_C + 24 \quad (4)$$

• العنصر CD، الطول 12m، العطالة 2EI

$$M_{CD} = \frac{2EI}{3} \theta_C \quad (5), M_{DC} = \frac{EI}{3} \theta_C \quad (6)$$

• العنصر CE، الطول 6m، العطالة EI

$$M_{CE} = \frac{2EI}{3} \theta_C + \frac{EI}{3} \cdot 0.002 \Rightarrow M_{CE} = \frac{2EI}{3} \theta_C + 40 \quad (7)$$

$$M_{EC} = \frac{EI}{3} \cdot 2 \times 0.002 + \frac{2EI}{3} \theta_C \Rightarrow M_{EC} = \frac{EI}{3} \theta_C + 80 \quad (8)$$

3. توازن العقد:

$$\sum^+ M_B = 0 \Rightarrow -M_{BA} - M_{BC} = 0 \quad \text{العقدة B}$$

$$4EI\theta_B + EI\theta_C = 12 \quad (I)$$

$$\sum^+ M_C = 0 \Rightarrow -M_{CB} - M_{CD} - M_{CE} = 0 \quad \text{العقدة C}$$

$$EI\theta_B + 6EI\theta_C = -192 \quad (II)$$

بحل جملة المعادلتين (I) و (II):

$$\theta_B = \frac{11.478}{EI}, \theta_C = \frac{-33.913}{EI}$$

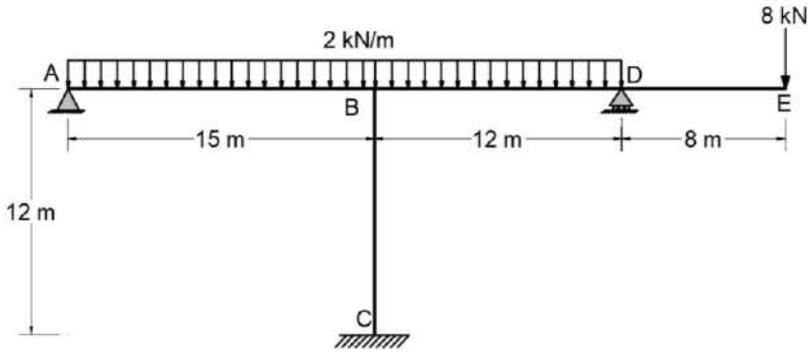
4. قيم العزوم في العقد:

$$M_{AB} = 43.826t.m \quad M_{BC} = -27.652t.m \quad M_{CD} = -22.608t.m \quad M_{CE} = 17.392t.m$$

$$M_{BA} = 27.652t.m \quad M_{CB} = 5.218t.m \quad M_{DC} = -11.304t.m \quad M_{EC} = 68.692t.m$$

مثال (8-4):

أوجد العزوم في عقد الإطار المبين بالشكل (48-4)، ثم ارسم مخطط عزم الانعطاف، وذلك بالاعتماد على طريقة الانتقال والدوران. حيث  $EI$  ثابتة على كامل المنشأ.



الشكل (48-4)

1. عزوم الوثق:

$$M_{BD}^F = -\frac{WL^2}{12} = -24kN.m, M_{DB}^F = \frac{WL^2}{12} = 24kN.m$$

$$M_{BA}^{FM} = \frac{WL^2}{8} = 56.25kN.m$$

2. معادلات الانتقال والدوران:

• العنصر AB، الطول 15m، العطالة  $EI$  موثوق ومسند:

$$M_{BA} = \frac{3EI}{15} \theta_B + 56.25 \Rightarrow M_{BA} = 0.2EI\theta_B + 56.25 \quad (1)$$

• العنصر BD، الطول 12m، العطالة  $EI$  موثوق من الطرفين:

$$M_{BD} = \frac{4EI}{12} \theta_B + \frac{2EI}{12} \theta_D - 24 \Rightarrow M_{BD} = 0.333EI\theta_B + 0.167EI\theta_D - 24 \quad (2)$$

$$M_{DB} = \frac{2EI}{12}\theta_B + \frac{4EI}{12}\theta_D + 24 \Rightarrow M_{DB} = 0.167EI\theta_B + 0.333EI\theta_D + 24 \quad (3)$$

• العنصر BC، الطول 12m، العطالة EI

$$M_{BC} = \frac{4EI}{12}\theta_B \Rightarrow M_{BC} = 0.333EI\theta_B \quad (4)$$

• العنصر CE، الطول 6m، العطالة EI

$$M_{CB} = \frac{2EI}{12}\theta_B \Rightarrow M_{CB} = 0.167EI\theta_B \quad (5)$$

3. توازن العقد:

$$\uparrow \sum M_B = 0 \Rightarrow -M_{BA} - M_{BC} - M_{BD} = 0 \quad \text{العقدة B:}$$

$$(0.2 + 0.333 + 0.333)EI\theta_B + 0.167EI\theta_D + 56.25 - 24 = 0$$

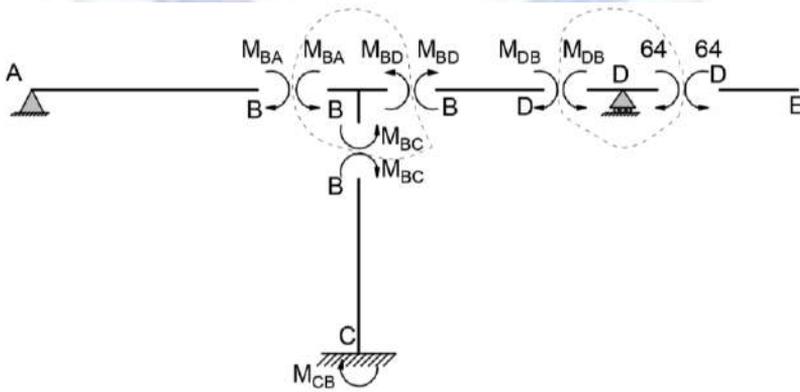
$$0.8663EI\theta_B + 0.167EI\theta_D = -32.25 \quad (I)$$

$$\uparrow \sum M_D = 0 \Rightarrow -M_{DB} + 64 = 0 \quad \text{العقدة D:}$$

$$0.333EI\theta_B + 0.1667EI\theta_D = 88 \quad (II)$$

بحل جملة المعادلتين (I) و (II):

$$\theta_B = \frac{-66.7}{EI}, \theta_D = \frac{153.35}{EI}$$

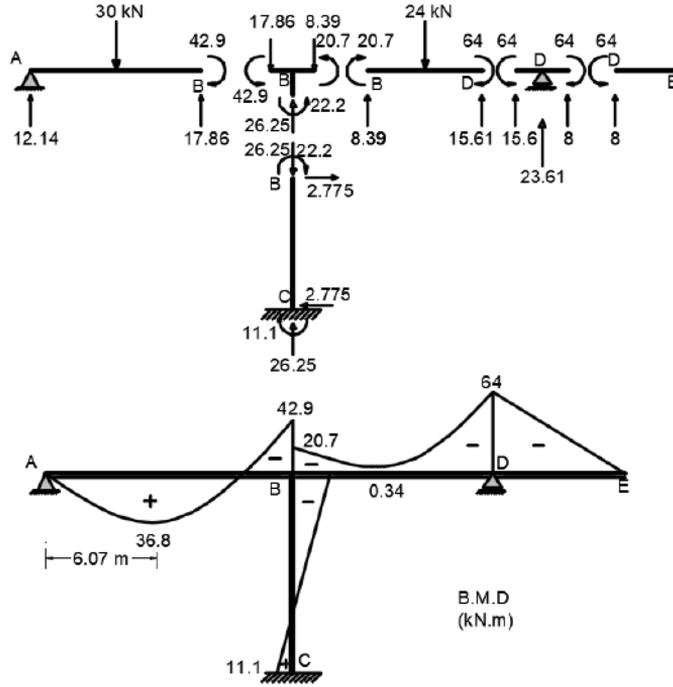


الشكل (4-49)

4. قيم العزوم في العقد:

$$M_{AB} = 42.9 \text{ kN.m} \quad M_{BD} = -20.7 \text{ kN.m} \quad M_{DB} = 64 \text{ kN.m}$$

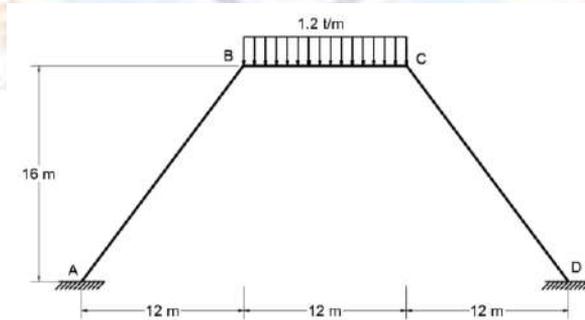
$$M_{BC} = -22.2 \text{ kN.m} \quad M_{CB} = -11.1 \text{ kN.m}$$



الشكل (4-50)

مثال (4-9):

أوجد العزوم في عقد الإطار المتناظر الميّن بالشكل (4-51) ثم ارسم مخطط عزم الانعطاف، وذلك بالاعتماد على طريقة الانتقال والدوران. حيث ثابتة على كامل المنشأ.



الشكل (4-51)

1. عزوم الوثق:

$$M_{BC}^F = -\frac{WL^2}{12} = -14.4t.m, M_{CB}^F = \frac{WL^2}{12} = 14.4t.m$$

2. معادلات الانتقال والدوران:

• العنصر AB، الطول 20m، العطالة EI موثوق من الطرفين:

$$M_{AB} = \frac{2EI}{20} \theta_B \quad (1)$$

$$M_{BA} = \frac{4EI}{20} \theta_B \quad (2)$$

• العنصر BC، الطول 12m، العطالة EI موثوق من الطرفين:

$$M_{BC} = \frac{4EI}{12} \theta_B + \frac{2EI}{12} \theta_C - 14.4 \quad (3)$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{12} \theta_B + \frac{4EI}{12} \theta_C + 14.4 \quad (4)$$

• العنصر CD، الطول 20m، العطالة EI

$$M_{CD} = \frac{4EI}{20} \theta_C \quad (5)$$

$$M_{DC} = \frac{2EI}{20} \theta_C \quad (6)$$

3. توازن العقد:

$$\sum^+ M_B = 0 \Rightarrow -M_{BA} - M_{BC} = 0 \quad \text{العقدة B:}$$

$$\frac{4}{20} EI \theta_B + \frac{2EI}{12} (2\theta_B + \theta_C) - 14.4 = 0 \Rightarrow 0.5333EI \theta_B + 0.1667\theta_C = 14.4 \quad (I)$$

$$\sum^+ M_C = 0 \Rightarrow -M_{CD} - M_{CB} = 0 \quad \text{العقدة C:}$$

$$\frac{4}{20} EI \theta_C + \frac{2EI}{12} (2\theta_C + \theta_B) + 14.4 = 0 \Rightarrow 0.5333EI \theta_C + 0.1667\theta_B = -14.4 \quad (II)$$

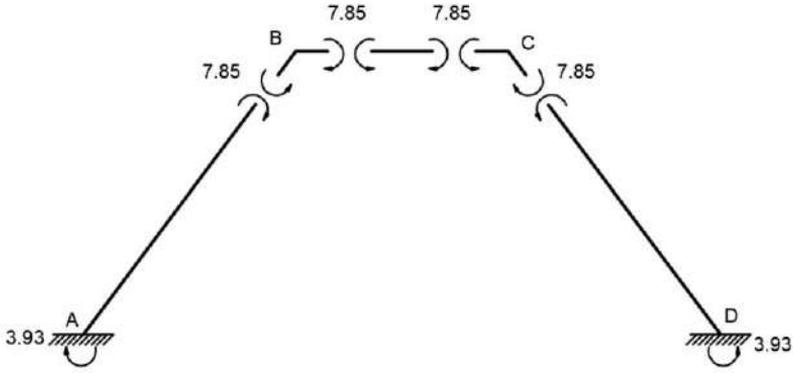
بحل جملة المعادلتين (I) و (II):

$$\theta_B = -\theta_C = \frac{39.27}{EI}$$

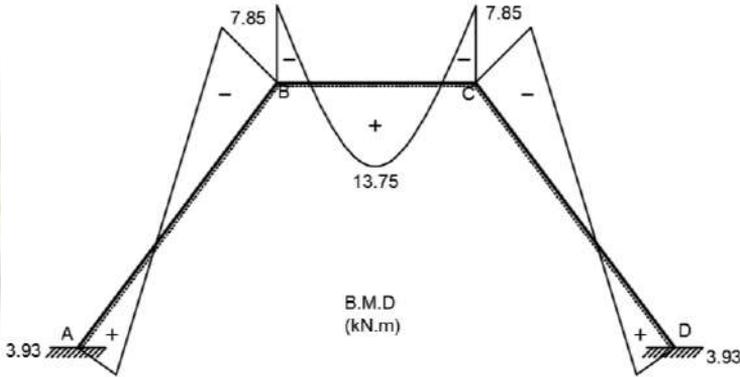
4. قيم العزوم في العقد:

$$M_{AB} = 3.93t.m \quad M_{BC} = -7.85t.m \quad M_{CD} = -7.85t.m$$

$$M_{BA} = 7.85t.m \quad M_{CB} = 7.85t.m \quad M_{DC} = -3.93t.m$$



الشكل (52-4)



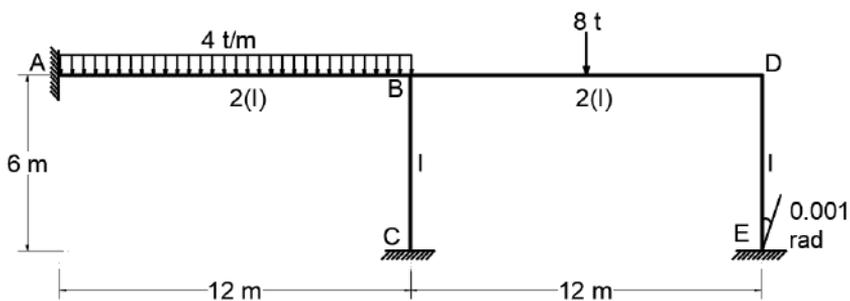
الشكل (53-4)

مثال (10-4):

أوجد قيم العزوم في عقد الإطار المبين بالشكل (54-4) علماً بأن الوثاقة E تدور بمقدار 0.001rad، حيث  $EI = 60000t.m^2$ .

1. عزوم الوثق:

$$M_{AB}^F = -48t.m, M_{BA}^F = 48t.m \quad M_{BD}^F = -12t.m, M_{DB}^F = 12t.m$$



الشكل (54-4)

2. معادلات الانتقال والدوران:

• العنصر AB، الطول 12m، العطالة 2EI:

$$M_{AB} = \frac{4EI}{12} \theta_B - 48 \quad (1)$$

$$M_{BA} = \frac{8EI}{12} \theta_B + 48 \quad (2)$$

• العنصر BD، الطول 12m، العطالة 2EI:

$$M_{BD} = \frac{8EI}{12} \theta_B + \frac{4EI}{12} \theta_D - 12 \quad (3)$$

$$M_{DB} = \frac{4EI}{12} \theta_B + \frac{8EI}{12} \theta_D + 12 \quad (4)$$

• العنصر BC، الطول 6m، العطالة EI

$$M_{BC} = \frac{4EI}{6} \theta_B \quad (5)$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{6} \theta_B \quad (6)$$

• العنصر ED، الطول 6m، العطالة EI

$$M_{DE} = \frac{4EI}{6} (\theta_D + 0.001) = \frac{2}{3} EI \theta_D + 20 \quad (7)$$

$$M_{ED} = \frac{2EI}{6} (\theta_D + 0.001 \times 2) = \frac{1}{3} EI \theta_D + 40 \quad (8)$$

3. توازن العقد:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -M_{BA} - M_{BC} - M_{BD} = 0 \quad \text{العقدة B:}$$

$$2EI\theta_B + \frac{1}{3}EI\theta_D + 36 = 0 \quad (I)$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow -M_{DB} - M_{DE} = 0 \quad \text{العقدة D:}$$

$$\frac{1}{3}EI\theta_B + \frac{4}{3}EI\theta_D + 32 = 0 \quad (II)$$

بحل جملة المعادلتين (I) و (II):

$$\theta_B = \frac{-14.608}{EI}, \theta_D = \frac{-20.34}{EI}$$

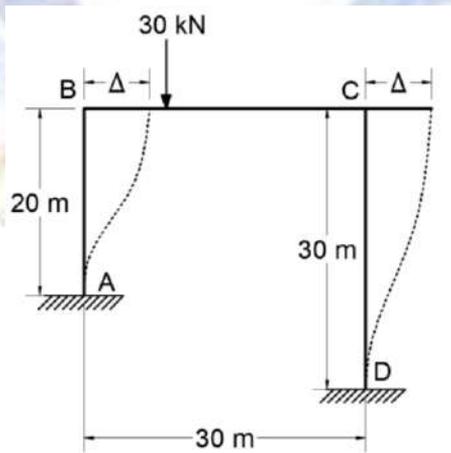
4. قيم العزوم في العقد:

$$M_{AB} = -52.87t.m \quad M_{BC} = -9.74t.m \quad M_{BD} = -28.52t.m \quad M_{DE} = 6.44t.m$$

$$M_{BA} = 38.25t.m \quad M_{CB} = -4.86t.m \quad M_{DB} = -6.44t.m \quad M_{ED} = 33.21t.m$$

#### 8-4 تحليل الإطارات ذات الحركة الجانبية Frames with Sidesway

عندما تكون أبعاد الإطار وحمولاته غير متناظرة كما في الشكل (4-55). فإن الإطار سوف يتحرك أفقياً إلى أحد الجانبين. إن العقدة B والعقدة C تتحركان نحو اليمين مما يؤدي إلى دوران العنصر AB، CD. بإهمال التشوهات المحورية في العنصر BC فإن كلاً من العقدتين سوف تنتقل أفقياً مسافة واحدة تساوي  $\Delta$ .

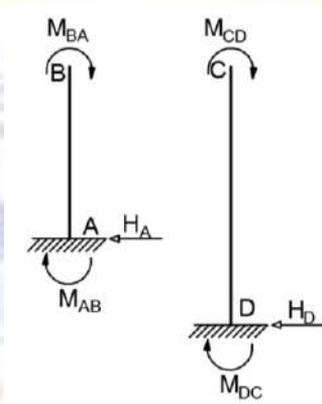


الشكل (4-55)

يُلاحظ أن الدوران الوترى Chord Rotation في العنصرين AB، CD الناتج عن الانتقال الجانبي يساوي  
 $\psi_{CD} = \frac{\Delta}{L_{CD}}$ ،  $\psi_{AB} = \frac{\Delta}{L_{AB}}$  وبما أن قيمة الانتقال  $\Delta$  متساوية فإنّ دوران العنصر الأقصر أكبر وبالتالي  
 يكون العزم الناتج عن هذا الدوران أكبر. من الممكن استعمال قيم نسبية بين  $\psi_{CD}$ ،  $\psi_{AB}$  بحسب أطوال  
 العناصر فمثلاً  $\psi_{AB} = \frac{3}{2}\psi_{CD}$  في الشكل (4-55). وبما أن  $\theta_A = \theta_D = 0$  فإنّه تبقى ثلاثة مجاهيل  
 هي  $\theta_B$ ،  $\theta_C$ ،  $\psi$ . بينما معادلات توازن العقد تُعطي معادلتين فقط في B و C وهاتان المعادلتان لا تكفيان  
 من أجل إيجاد المجاهيل الثلاثة  $\theta_B$ ،  $\theta_C$ ،  $\psi$ ، وبالتالي هناك حاجة إلى معادلة ثالثة وهي معادلة توازن  
 القوى الأفقية. إنّ القوة الأفقية الموجودة في الإطار السابق هي عبارة عن ردود الأفعال الأفقية في الوتائقتين  
 A، D وهي متساوية بالشدّة ومتعاكسة بالجهة. بأخذ توازن كل عمود على حدة يتم إيجاد كل من رد الفعل  
 الأفقي في A ورد الفعل الأفقي في D:

$$H_A = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{L_{AB}}$$

$$H_D = \frac{M_{CD} + M_{DC}}{L_{DC}}$$

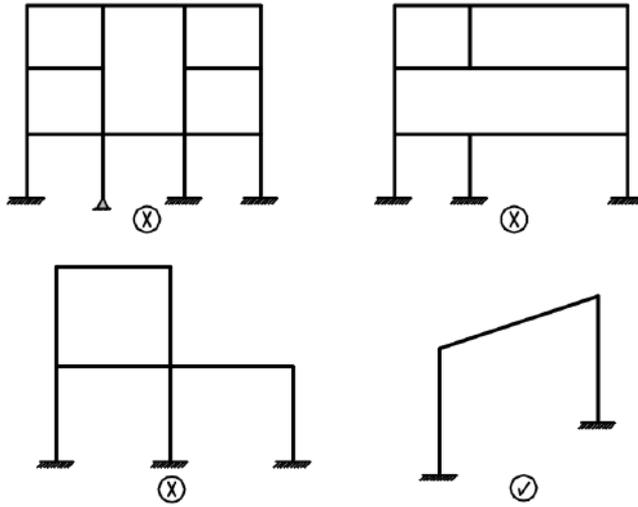


الشكل (4-56)

ومن أجل توازن الإطار كاملاً فإنّ مجموع ردّي الفعل يساوي إلى الصفر.

$$\sum H = 0 \Rightarrow \frac{M_{AB} + M_{BA}}{L_{AB}} + \frac{M_{CD} + M_{DC}}{L_{DC}} = 0$$

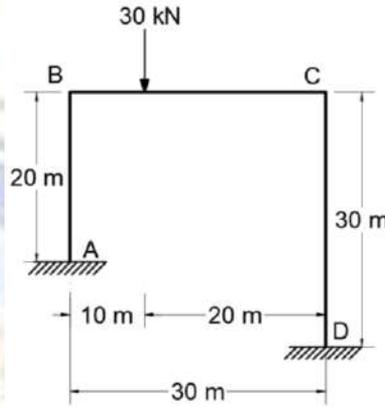
يُشترط كون العناصر الشاقولية (الأعمدة) غير مائلة، ويُشترط عدم وجود انقطاع في العناصر الشاقولية  
 أو الأفقية بين الطوابق، الشكل (4-57).



الشكل (57-4)

• مثال تطبيقي:

أوجد العزوم في عقد الإطار المبيّن بالشكل (58-4) بالاعتماد على طريقة الانتقال والدوران علماً بأنّ العطالة ثابتة في كل عناصر الإطار.



الشكل (58-4)

يتم استخدام قيم نسبية للانتقال النسبي (الدوران الوتري) أي:

$$\psi_{AB} = \frac{\Delta}{20}, \psi_{CD} = \frac{\Delta}{30} \Rightarrow \frac{\psi_{AB}}{\psi_{CD}} = \frac{3}{2}$$

$$\psi_{AB} = \psi \Rightarrow \psi_{CD} = \frac{2}{3}\psi$$

بفرض:

$$\theta_A = \theta_D = \psi_{BC} = 0$$

1. عزوم الوثق:

$$M_{BC}^F = -133kN.m, M_{CB}^F = 66.7kN.m$$

2. معادلات الانتقال والدوران:

• العنصر AB، الطول 20m، العطالة EI:

$$M_{AB} = \frac{2EI}{20}(\theta_B - 3\psi) = \frac{1}{10}EI\theta_B - \frac{3}{10}EI\psi \quad (1)$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{20}(2\theta_B - 3\psi) = \frac{2}{10}EI\theta_B - \frac{3}{10}EI\psi \quad (2)$$

• العنصر BC، الطول 30m، العطالة EI:

$$M_{BC} = \frac{4EI}{30}\theta_B + \frac{2EI}{30}\theta_C - 133 \quad (3)$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{30}\theta_B + \frac{4EI}{30}\theta_C + 66.7 \quad (4)$$

• العنصر CD، الطول 30m، العطالة EI:

$$M_{CD} = \frac{2EI}{30}\left(2\theta_C - 3\frac{2}{3}\psi\right) = \frac{4}{30}EI\theta_C - \frac{4}{30}EI\psi \quad (5)$$

$$M_{DC} = \frac{2EI}{30}\left(\theta_C - 3\frac{2}{3}\psi\right) = \frac{2}{30}EI\theta_C - \frac{4}{30}EI\psi \quad (6)$$

3. توازن العقد:

$$\uparrow: \sum M_B = 0 \Rightarrow -M_{BA} - M_{BC} = 0 \quad \text{العقدة B:}$$

$$\frac{EI}{30}(6\theta_B + 4\theta_B + 2\theta_C - 9\psi) - 133 = 0 \Rightarrow \frac{EI}{30}(10\theta_B + 2\theta_C - 9\psi) = 133 \quad (I)$$

$$\uparrow: \sum M_C = 0 \Rightarrow -M_{CB} - M_{CD} = 0 \quad \text{العقدة C:}$$

$$\frac{EI}{30}(2\theta_B + 4\theta_C + 4\theta_C - 4\psi) + 66.7 = 0 \Rightarrow \frac{EI}{30}(2\theta_B + 8\theta_C - 4\psi) = -66.7 \quad (I)$$

4. توازن القوى الأفقية:

$$\sum H = 0; H_A + H_D = 0 \Rightarrow \frac{M_{AB} + M_{BA}}{L_{AB}} + \frac{M_{CD} + M_{DC}}{L_{DC}} = 0$$

$$\frac{EI}{30} \left[ \frac{(3\theta_B - 9\psi + 6\theta_B - 9\psi)}{20} + \frac{(4\theta_C - 4\psi + 2\theta_C - 4\psi)}{30} \right] = 0$$

$$EI[27\theta_B + 12\theta_C - 70\psi] = 0 \quad (III)$$

بحل جملة المعادلات (I) و (II) و (III):

$$\theta_B = \frac{633.087}{EI}, \theta_C = \frac{-313.142}{EI}, \psi = \frac{190.51}{EI}$$

5. قيم العزوم في العقد:

$$M_{AB} = 6kN.m \quad M_{BC} = -69.4kN.m \quad M_{CD} = -67.4kN.m$$

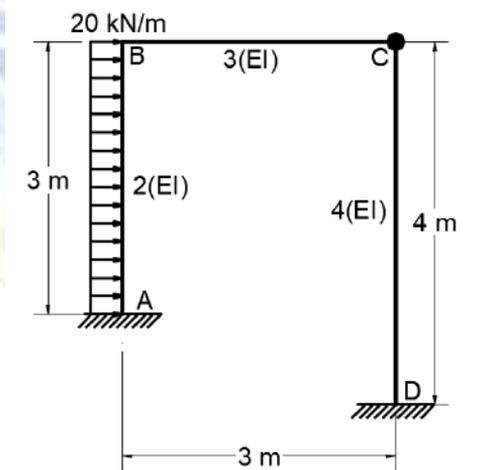
$$M_{BA} = 69.4kN.m \quad M_{CB} = 67.4kN.m \quad M_{DC} = -46.4kN.m$$

9-4 أمثلة محلولة على تطبيق طريقة الانتقال والدوران على الإطارات ذات الحركة الجانبية:

مثال (4-11):

استخدم طريقة الانتقال والدوران في المنشأ المبين بالشكل (4-59) من أجل:

- إيجاد ردود أفعال المساند.
- رسم كل من مخطط القص وعزم الانعطاف والشكل المتشوه.



الشكل (4-59)

إنّ المجاهيل في هذه المسألة هي الانتقال الأفقي والدوران في B.

1. عزوم الوثق:

$$M_{AB}^F = -15kN.m, M_{BA}^F = 15kN.m$$

2. معادلات الانتقال والدوران:

• العنصر AB، الطول 3m، العطالة 2EI:

$$M_{AB} = \frac{4(2EI)}{3}\theta_A + \frac{2(2EI)}{3}\theta_B - \frac{4}{3}EI\Delta - 15 = \frac{4}{3}EI\theta_B - \frac{4}{3}EI\Delta - 15 \quad (1)$$

$$M_{BA} = \frac{2(2EI)}{3}\theta_A + \frac{4(2EI)}{3}\theta_B - \frac{4}{3}EI\Delta + 15 = \frac{8}{3}EI\theta_B - \frac{4}{3}EI\Delta + 15 \quad (2)$$

• العنصر BC، الطول 3m، العطالة 3EI موثوق ومسنود:

$$M_{BC} = \frac{3(3EI)}{3}\theta_B = 3EI\theta_B \quad (3)$$

• العنصر CD، الطول 4m، العطالة 4EI موثوق ومسنود:

$$M_{DC} = \frac{3(4EI)}{4}\theta_D - \frac{3}{4}EI\Delta = \frac{-3}{4}EI\Delta \quad (4)$$

3. توازن العقد:

$$\sum^+ M_B = 0 \Rightarrow -M_{BA} - M_{BC} = 0$$

العقدة B:

$$5.667EI\theta_B - 1.333EI\Delta = -15 \quad (I)$$

توازن القوى الأفقية:

$$\sum H = 0 \Rightarrow 60 - H_A - H_D = 0, H_A = \frac{-M_{AB} - M_{BA} + 60 \times 1.5}{3}, H_D = \frac{-M_{DC}}{4}$$

$$H_A = -1.333EI\theta_B + 0.889EI\Delta + 30$$

$$H_D = 0.188EI\Delta$$

$$1.333EI\theta_B - 1.077EI\Delta = -30 \quad (II)$$

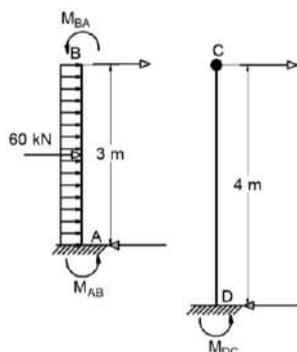
بحل جملة المعادلات (I) و (II):

$$\theta_B = \frac{5.51}{EI}, \Delta = \frac{34.67}{EI}$$

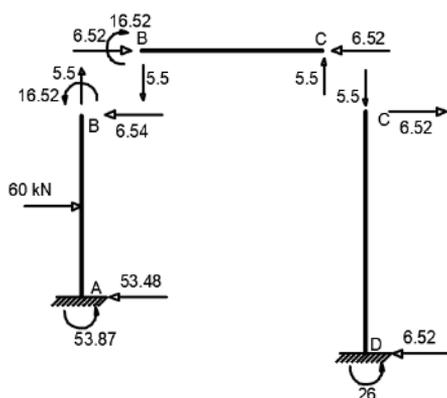
1. قيم العزوم في العقد:

$$M_{AB} = -53.87 \text{ kN.m} \quad M_{BC} = 16.52 \text{ kN.m} \quad H_A = 53.48 \text{ kN}$$

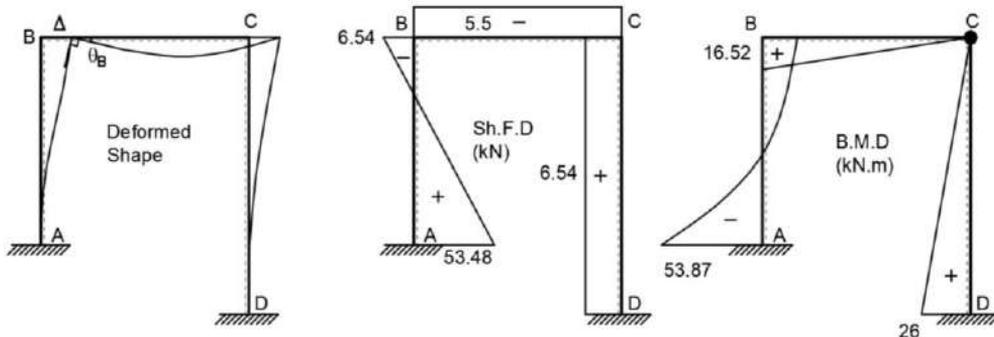
$$M_{BA} = -16.52 \text{ kN.m} \quad M_{DC} = -26 \text{ kN.m} \quad H_D = 6.52 \text{ kN}$$



الشكل (60-4)



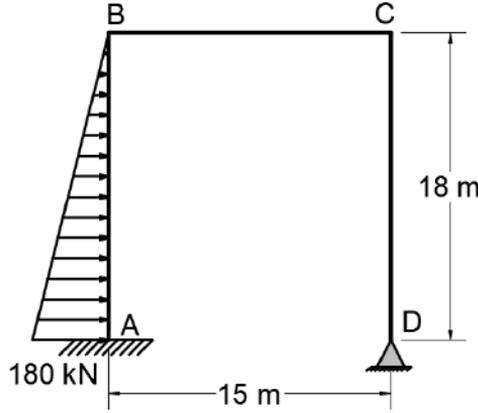
الشكل (61-4)



الشكل (62-4)

مثال (4-12):

يتعرض الإطار المبين بالشكل (4-63) إلى حمولة هيدروستاتيكية، أوجد العزوم في كل عقدة علماً بأن EI ثابتة ثم ارسم الشكل المشوه:



الشكل (4-63)

1. عزوم الوثق:

$$M_{AB}^F = -\frac{180(18)^2}{20} = -2916 \text{ kN.m}, M_{BA}^F = \frac{180(18)^2}{30} = 1944 \text{ kN.m}$$

$$\psi_{AB} = \psi_{DC} = \psi$$

2. معادلات الانتقال والدوران:

• العنصر AB، الطول 18m، العطالة EI:

$$M_{AB} = \frac{2EI}{18}(\theta_B - 3\psi) - 2916 = 0.1111EI\theta_B - 0.3333EI\psi - 2916 \quad (1)$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{18}(2\theta_B - 3\psi) + 1944 = 0.2222EI\theta_B - 0.3333EI\psi + 1944 \quad (2)$$

• العنصر BC، الطول 15m، العطالة EI:

$$M_{BC} = \frac{2EI}{15}(2\theta_B + \theta_C) = 0.2667EI\theta_B + 0.1333EI\theta_C \quad (3)$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{15}(\theta_B + 2\theta_C) = 0.1333EI\theta_B + 0.2667EI\theta_C \quad (4)$$

• العنصر CD، الطول 18m، العطالة EI موثوق ومسند:

$$M_{CD} = \frac{3EI}{18}(\theta_C - \psi) = 0.1667EI\theta_C - 0.1667EI\psi \quad (5)$$

3. توازن العقد:

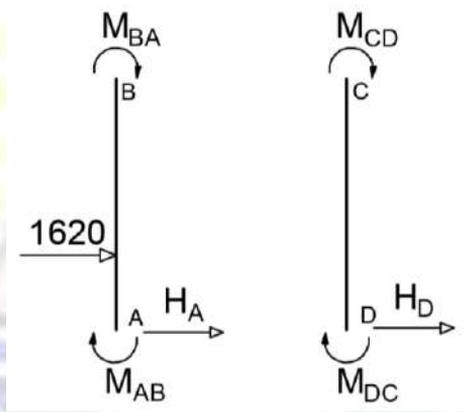
$$\uparrow: \sum M_B = 0 \Rightarrow -M_{BA} - M_{BC} = 0 \quad \text{العقدة B:}$$

$$0.489EI\theta_B + 0.1333EI\theta_C - 0.333EI\psi = -1944 \quad (I)$$

$$\uparrow: \sum M_C = 0 \Rightarrow -M_{CB} - M_{CD} = 0 \quad \text{العقدة C:}$$

$$0.1333EI\theta_B + 0.4333EI\theta_C - 0.1667EI\psi = 0 \quad (II)$$

توازن القوى الأفقية:



الشكل (4-64)

$$\sum H = 0 \Rightarrow 1620 + H_A + H_D = 0, H_A = \frac{M_{AB} + M_{BA} - 1620 \times 12}{18}, H_D = \frac{M_{CD}}{18}$$

$$0.333EI\theta_B + 0.1667EI\theta_C - 0.833EI\psi = -8748 \quad (III)$$

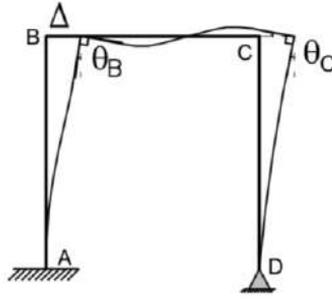
$$\theta_B = \frac{3654}{EI}, \theta_C = \frac{3766}{EI}, \psi = \frac{12712}{EI} \quad \text{بحل جملة المعادلات:}$$

1. قيم العزوم في العقد:

$$M_{AB} = -6750 \text{ kN.m} \quad M_{BC} = 1477 \text{ kN.m}$$

$$M_{BA} = -1479 \text{ kN.m} \quad M_{CB} = 1491 \text{ kN.m}$$

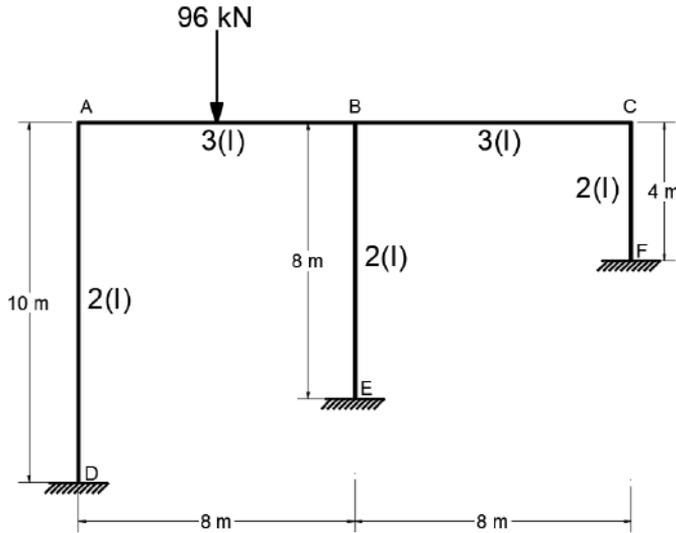
$$M_{CD} = -1491 \text{ kN.m}$$



الشكل (4-65)

مثال (4-13):

ارسم مخطط عزم الانعطاف للإطار المبيّن بالشكل (4-66) بالاعتماد على طريقة الانتقال والدوران.



الشكل (4-66)

هناك ثلاثة انتقالات في كل من C,B,A وهي متساوية وتساوي  $\Delta$  ، وهناك ثلاثة دورانات في C,B,A وهي  $\theta_A, \theta_B, \theta_C$  . تُكتب قيم الدوران الوتري كما يلي:

$$\psi_{DA} = \frac{\Delta}{10}, \psi_{EB} = \frac{\Delta}{8}, \psi_{FC} = \frac{\Delta}{4}$$

1. عزوم الوتق:

$$M_{AB}^F = -96kN.m, M_{BA}^F = 96kN.m$$

2. معادلات الانتقال والدوران:

• العنصر AB، الطول 8m، العطالة 3EI:

$$M_{AB} = \frac{2E.3I}{8}(2\theta_A + \theta_B) - 96 = 1.5EI\theta_A + 0.75EI\theta_B - 96 \quad (1)$$

$$M_{BA} = \frac{2E.3I}{8}(\theta_A + 2\theta_B) + 96 = 0.75EI\theta_A + 1.5EI\theta_B + 96 \quad (2)$$

• العنصر BC، الطول 8m، العطالة 3EI:

$$M_{BC} = \frac{2E.3I}{8}(2\theta_B + \theta_C) = 1.5EI\theta_B + 0.75EI\theta_C \quad (3)$$

$$M_{CB} = \frac{2E.3I}{8}(\theta_B + 2\theta_C) = 0.75EI\theta_B + 1.5EI\theta_C \quad (4)$$

• العنصر AD، الطول 10m، العطالة 2EI:

$$M_{AD} = \frac{2E.2I}{10}\left(2\theta_A + \theta_D - 3\frac{\Delta}{10}\right) = 0.8EI\theta_A - 0.12EI\Delta \quad (5)$$

$$M_{DA} = \frac{2E.2I}{10}\left(\theta_A + 2\theta_D - 3\frac{\Delta}{10}\right) = 0.4EI\theta_A - 0.12EI\Delta \quad (6)$$

• العنصر BE، الطول 8m، العطالة 2EI:

$$M_{BE} = \frac{2E.2I}{8}\left(2\theta_B + \theta_E - 3\frac{\Delta}{8}\right) = EI\theta_B - 0.19EI\Delta \quad (7)$$

$$M_{EB} = \frac{2E.2I}{8}\left(\theta_B + 2\theta_E - 3\frac{\Delta}{8}\right) = 0.5EI\theta_B - 0.19EI\Delta \quad (8)$$

• العنصر FC، الطول 4m، العطالة 2EI:

$$M_{CF} = \frac{2E.2I}{4}\left(2\theta_C + \theta_F - 3\frac{\Delta}{4}\right) = 2EI\theta_C - 0.75EI\Delta \quad (9)$$

$$M_{FC} = \frac{2E.2I}{4}\left(\theta_C + 2\theta_F - 3\frac{\Delta}{4}\right) = EI\theta_C - 0.75EI\Delta \quad (10)$$

3. توازن العقد والقوى الأفقية في الإطار:

$$\sum^+ M_A = 0 \Rightarrow -M_{AB} - M_{AD} = 0 \quad \text{العقدة A:}$$

$$2.3EI\theta_A + 0.75EI\theta_B + 0EI\theta_C - 0.12EI\Delta = 0 \quad (I)$$

$$\uparrow: \sum M_B = 0 \Rightarrow -M_{BA} - M_{BE} - M_{BC} = 0 \quad \text{العقدة B:}$$

$$0.75EI\theta_A + 4EI\theta_B + 0.75EI\theta_C - 0.19EI\Delta = 0 \quad (II)$$

$$\uparrow: \sum M_C = 0 \Rightarrow -M_{CB} - M_{CF} = 0 \quad \text{العقدة C:}$$

$$0EI\theta_A + 0.75EI\theta_B + 3.5EI\theta_C - 75EI\Delta = 0 \quad (III)$$

توازن القوى الأفقية:

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_D + H_E + H_F = 0,$$

$$H_D = \frac{M_{DA} + M_{AD}}{10}, H_E = \frac{M_{EB} + M_{BE}}{8}, H_F = \frac{M_{FC} + M_{CF}}{4}$$

$$EI\theta_A - 0.19EI\theta_B + 0.75EI\theta_C + 0.45EI\Delta = 0 \quad (IV)$$

بحل جملة المعادلات:

$$\theta_A = \frac{54.33}{EI}, \theta_B = \frac{-35.48}{EI}, \theta_C = \frac{11.79}{EI}, \Delta = \frac{19.53}{EI}$$

4. قيم العزوم في العقد:

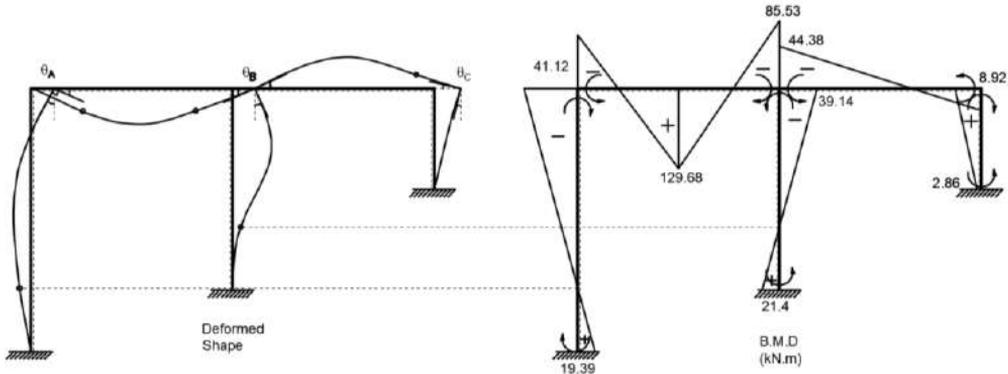
$$M_{AB} = -41.12 \text{ kN.m} \quad M_{BC} = -44.38 \text{ kN.m} \quad M_{AD} = 41.12 \text{ kN.m}$$

$$M_{BA} = 85.53 \text{ kN.m} \quad M_{CB} = -8.92 \text{ kN.m} \quad M_{DA} = 19.39 \text{ kN.m}$$

$$M_{BE} = -39.14 \text{ kN.m} \quad M_{CF} = 8.93 \text{ kN.m}$$

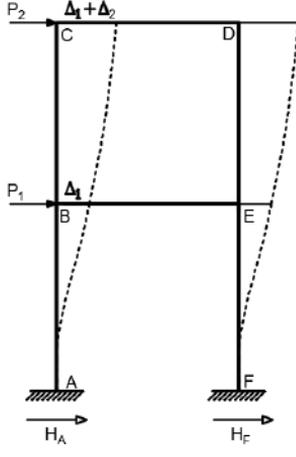
$$M_{EB} = -21.4 \text{ kN.m} \quad M_{FC} = -2.86 \text{ kN.m}$$

بغية التحقق من صحة الحل يجب أن يكون المجموع الجبري للعزوم في كل عقدة مساوياً للصفر.



الشكل (67-4)

#### 4-10 تطبيق طريقة الانتقال والدوران من أجل أكثر من انتقال جانبي واحد:



الشكل (4-68)

يُمكن تطبيق طريقة الانتقال والدوران - Slope Deflection من أجل أكثر من انتقال جانبي واحد كما في الإطار الطابقي المبين بالشكل (4-68). من المفيد معرفة طريقة تطبيق الانتقال والدوران على هذا النوع من الإطارات من أجل فهم طريقة توزيع العزوم Moment Distribution. إنّ القوى الأفقية تجعل الإطار ينزاح إلى اليمين، تتحرك العقدتان B,E نحو اليمين بالمقدار  $\Delta_1$ ، بينما تتحرك العقدتان D,C نحو اليمين بالمقدار  $\Delta_2$ ، ويكون الدوران الوتري Chord Rotation للعمودين AB,BC مساوياً:

$$\psi_1 = \frac{\Delta_1}{L_{AB}}$$

الطابق العلوي

$$\psi_2 = \frac{\Delta_2}{L_{BC}}$$

الطابق السفلي

معادلات توازن العقد هي:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow -M_{BA} - M_{BE} - M_{BC} = 0$$

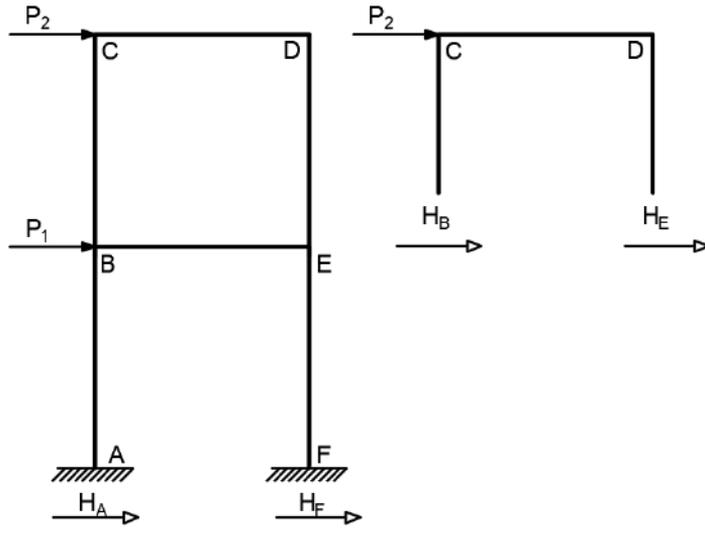
$$\sum M_C = 0 \Rightarrow -M_{CD} - M_{CB} = 0$$

$$\sum M_D = 0 \Rightarrow -M_{DC} - M_{DE} = 0$$

$$\sum M_E = 0 \Rightarrow -M_{ED} - M_{EB} - M_{EF} = 0$$

تتضمن هذه المعادلات ستة مجاهيل هي  $\theta_B, \theta_C, \theta_D, \theta_E, \psi_1, \psi_2$  علماً بأن  $\theta_A = \theta_F = 0$  وبالتالي هناك حاجة إلى معادلتين إضافيتين من أجل حساب المجاهيل، ويتم الحصول عليها عن طريق توازن القوى الأفقية أو القص في الإطار.

من الواضح أنّ مجموع القوى الأفقية عند أي منسوب يساوي ويعاكس القوى الأفقية الخارجية عند ذلك المنسوب، الشكل (4-69).



الشكل (4-69)

$$\sum H = 0 \Rightarrow H_B + H_E = -P_2, H_A + H_F = -(P_1 + P_2)$$

$$H_A = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{L_{AB}}, H_B = \frac{M_{BC} + M_{CB}}{L_{BC}},$$

$$H_E = \frac{M_{ED} + M_{DE}}{L_{DE}}, H_F = \frac{M_{EF} + M_{FE}}{L_{FE}}$$

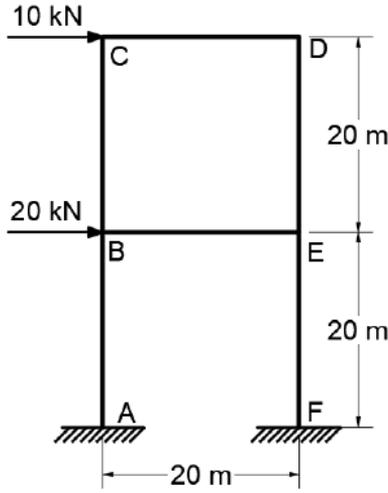
$$\frac{M_{AB} + M_{BA}}{L_{AB}} + \frac{M_{EF} + M_{FE}}{L_{FE}} = -(P_1 + P_2)$$

$$\frac{M_{BC} + M_{CB}}{L_{BC}} + \frac{M_{ED} + M_{DE}}{L_{DE}} = -P_2$$

بالإضافة إلى توازن العقد يصبح المجموع ست معادلات شرطية، وهي كافية من أجل إيجاد المجاهيل الستة. أياً كان عدد طوابق الإطار يمكن كتابة معادلة إضافية لقوى القص لكل طابق، فمن أجل إطار بستة طوابق وأربعة مجازات هناك ستة مجاهيل للانتقال وثلاثون مجهول للدورانات وتتوفر ست وثلاثون معادلة كافية لحل الجملة.

#### • مثال تطبيقي:

أوجد العزوم في عقد الإطار المبين بالشكل (4-70) باستخدام طريقة الانتقال والدوران.



الشكل (70-4)

إنّ العنصران BE, CD لا يدوران بينما تدور العناصر AB, BC, DE, EF ويكون:

$$\psi_{AB} = \psi_{EF} = \psi_1, \psi_{BC} = \psi_{DE} = \psi_2$$

إنّ عزوم الوثق معدومة لأن القوى مطبقة على العقد، وبما أن أطوال العناصر واحدة و EI ثابتة يمكن إخراج  $\frac{EI}{L}$  عاملاً مشتركاً واختصارها.

1. معادلات الانتقال والدوران:

• العنصر AB، الطول 20m، العطالة EI:

$$M_{AB} = \frac{2EI}{20}(\theta_B - 3\psi_1) \quad (1)$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{20}(2\theta_B - 3\psi_1) \quad (2)$$

• العنصر BC، الطول 20m، العطالة EI:

$$M_{BC} = \frac{2EI}{20}(2\theta_B + \theta_C - 3\psi_2) \quad (3)$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{20}(\theta_B + 2\theta_C - 3\psi_2) \quad (4)$$

• العنصر BE، الطول 20m، العطالة EI:

$$M_{BE} = \frac{2EI}{20}(2\theta_B + \theta_E) \quad (5)$$

$$M_{EB} = \frac{2EI}{20}(\theta_B + 2\theta_E) \quad (6)$$

• العنصر CD، الطول 20m، العطالة EI:

$$M_{CD} = \frac{2EI}{20}(2\theta_C + \theta_D) \quad (7)$$

$$M_{DC} = \frac{2EI}{20}(\theta_C + 2\theta_D) \quad (8)$$

• العنصر DE، الطول 20m، العطالة EI:

$$M_{DE} = \frac{2EI}{20}(2\theta_D + \theta_E - 3\psi_2) \quad (9)$$

$$M_{ED} = \frac{2EI}{20}(\theta_D + 2\theta_E - 3\psi_2) \quad (10)$$

• العنصر EF، الطول 20m، العطالة EI:

$$M_{EF} = \frac{2EI}{20}(2\theta_E - 3\psi_1) \quad (11)$$

$$M_{FE} = \frac{2EI}{20}(\theta_E - 3\psi_1) \quad (12)$$

2. توازن العقد والقوى الأفقية في الإطار:

$$\overset{+}{\curvearrowleft} \sum M_B = 0 \Rightarrow -M_{BA} - M_{BE} - M_{BC} = 0 \quad \text{العقدة B:}$$

$$6\theta_B + \theta_C + \theta_E - 3\psi_1 - 3\psi_2 = 0 \quad (I)$$

$$\overset{+}{\curvearrowleft} \sum M_C = 0 \Rightarrow -M_{CB} - M_{CD} = 0 \quad \text{العقدة C:}$$

$$\theta_B + 4\theta_C + \theta_D - 3\psi_2 = 0 \quad (II)$$

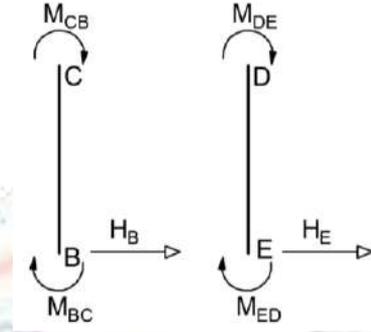
$$\overset{+}{\curvearrowleft} \sum M_D = 0 \Rightarrow -M_{DC} - M_{DE} = 0 \quad \text{العقدة D:}$$

$$\theta_C + 4\theta_D + \theta_E - 3\psi_2 = 0 \quad (III)$$

$$\overset{+}{\curvearrowleft} \sum M_E = 0 \Rightarrow -M_{ED} - M_{EB} - M_{EF} = 0 \quad \text{العقدة E:}$$

$$\theta_B + \theta_D + 6\theta_E - 3\psi_2 - 3\psi_1 = 0 \quad (IV)$$

توازن القوى الأفقية:



الشكل (71-4)

الطابق العلوي:

$$\sum H = -10 \Rightarrow H_B + H_E = -10,$$

$$\frac{M_{BC} + M_{CB}}{20} + \frac{M_{DE} + M_{ED}}{20} = -10$$

$$M_{BC} = \frac{2EI}{20} \left[ \frac{(2\theta_B + \theta_C - 3\psi_2) + (\theta_B + 2\theta_C - 3\psi_2) + (2\theta_D + \theta_E - 3\psi_2) + (\theta_D + 2\theta_E - 3\psi_2)}{20} \right] = -10$$

$$3\theta_B + 3\theta_C + 3\theta_D + 3\theta_E - 12\psi_2 = \frac{-2000}{EI} \quad (V)$$

الطابق السفلي:

$$\sum H = -30 \Rightarrow H_B + H_E = -30,$$

$$\frac{M_{AB} + M_{BA}}{20} + \frac{M_{EF} + M_{FE}}{20} = -30$$

$$M_{BC} = \frac{2EI}{20} \left[ \frac{(\theta_B - 3\psi_1) + (2\theta_B - 3\psi_1) + (2\theta_E - 3\psi_1) + (\theta_E - 3\psi_1)}{20} \right] = -30$$

$$3\theta_B + 3\theta_E - 12\psi_1 = \frac{-6000}{EI} \quad (VI)$$

بحل جملة المعادلات:

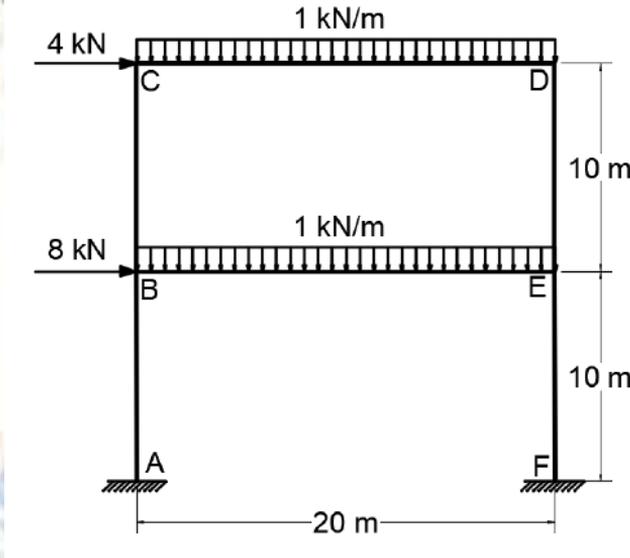
$$\theta_B = \theta_E = \frac{527.27}{EI}, \theta_C = \theta_D = \frac{218.18}{EI}, \psi_1 = \frac{763.636}{EI}, \psi_2 = \frac{539.394}{EI}$$

3. قيم العزوم النهائية في العقد:

$$\begin{aligned}
M_{AB} = M_{FE} &= -176.4 \text{ kN.m} & M_{BA} = M_{EF} &= -123.6 \text{ kN.m} \\
M_{BC} = M_{ED} &= -34.6 \text{ kN.m} & M_{BE} = M_{EB} &= 158.2 \text{ kN.m} \\
M_{CB} = M_{DE} &= -65.5 \text{ kN.m} & M_{CD} = M_{DC} &= 65.5 \text{ kN.m}
\end{aligned}$$

4-11 أمثلة محلولة على تطبيق طريقة الانتقال والدوران على الإطارات الطابقية:  
مثال (4-14):

أوجد العزوم وردود الأفعال في الإطار المبين بالشكل (4-72)، ثم ارسم مخطط عزم الانعطاف حيث EI ثابتة.



الشكل (4-72)

هناك ستة مجاهيل وهي  $\theta_E, \theta_D, \theta_C, \theta_B, \Delta_1, \Delta_2$ . تكتب قيم الدوران الوتري كما يلي:

$$\psi_1 = \frac{\Delta_1}{10}, \psi_2 = \frac{\Delta_2}{10}$$

1. عزوم الوثق:

$$M_{CD}^F = M_{BE}^F = -33.33 \text{ kN.m}, M_{DC}^F = M_{EB}^F = 33.33 \text{ kN.m}$$

2. معادلات الانتقال والدوران:

• العنصر AB، الطول 10m، العطالة EI:

$$M_{AB} = \frac{2EI}{10} (\theta_B - 3\psi_1) = 0.2EI\theta_B - 0.6EI\psi_1 \quad (1)$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{10}(2\theta_B - 3\psi_1) = 0.4EI\theta_B - 0.6EI\psi_1 \quad (2)$$

• العنصر BC، الطول 10m، العطالة EI:

$$M_{BC} = \frac{2EI}{10}(2\theta_B + \theta_C - 3\psi_2) = 0.4EI\theta_B + 0.2EI\theta_C - 0.6EI\psi_2 \quad (3)$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{10}(\theta_B + 2\theta_C - 3\psi_2) = 0.2EI\theta_B + 0.4EI\theta_C - 0.6EI\psi_2 \quad (4)$$

• العنصر CD، الطول 20m، العطالة EI:

$$M_{CD} = \frac{2EI}{10}(2\theta_C + \theta_D) - 33.33 = 0.2EI\theta_C + 0.1EI\theta_D - 33.33 \quad (5)$$

$$M_{DC} = \frac{2EI}{10}(\theta_C + 2\theta_D) + 33.33 = 0.1EI\theta_C + 0.2EI\theta_D + 33.33 \quad (6)$$

• العنصر DE، الطول 10m، العطالة EI:

$$M_{DE} = \frac{2EI}{10}(2\theta_D + \theta_E - 3\psi_2) = 0.4EI\theta_D + 0.2EI\theta_E - 0.6EI\psi_2 \quad (7)$$

$$M_{ED} = \frac{2EI}{10}(\theta_D + 2\theta_E - 3\psi_2) = 0.2EI\theta_D + 0.4EI\theta_E - 0.6EI\psi_2 \quad (8)$$

• العنصر EB، الطول 20m، العطالة EI:

$$M_{EB} = \frac{2EI}{10}(2\theta_E + \theta_B) + 33.33 = 0.2EI\theta_E + 0.1EI\theta_B + 33.33 \quad (9)$$

$$M_{BE} = \frac{2EI}{10}(\theta_E + 2\theta_B) - 33.33 = 0.1EI\theta_E + 0.2EI\theta_B - 33.33 \quad (10)$$

• العنصر EF، الطول 10m، العطالة EI:

$$M_{EF} = \frac{2EI}{10}(2\theta_E - 3\psi_1) = 0.4EI\theta_E - 0.6EI\psi_1 \quad (11)$$

$$M_{FE} = \frac{2EI}{10}(\theta_E - 3\psi_1) = 0.2EI\theta_E - 0.6EI\psi_1 \quad (12)$$

3. توازن العقد والقوى الأفقية في الإطار:

$$\sum M_B^+ = 0 \Rightarrow -M_{BA} - M_{BE} - M_{BC} = 0 \quad \text{العقدة B:}$$

$$EI\theta_B + 0.2EI\theta_C + 0EI\theta_D + 0.1EI\theta_E - 0.6EI\psi_1 - 0.6EI\psi_2 = 33.33 \quad (I)$$

$$\uparrow: \sum M_C = 0 \Rightarrow -M_{CB} - M_{CD} = 0 \quad \text{:العقدة C}$$

$$0.2EI\theta_B + 0.6EI\theta_C + 0.1EI\theta_D + 0EI\theta_E - 0EI\psi_1 - 0.6EI\psi_2 = 33.33 \quad (II)$$

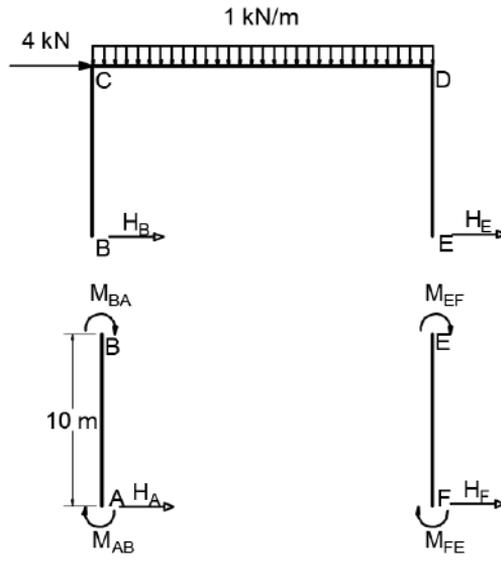
$$\uparrow: \sum M_D = 0 \Rightarrow -M_{DC} - M_{DE} = 0 \quad \text{:العقدة D}$$

$$0.1EI\theta_B + 0EI\theta_C + 0.6EI\theta_D + 0.2EI\theta_E - 0EI\psi_1 - 0.6EI\psi_2 = -33.33 \quad (III)$$

$$\uparrow: \sum M_E = 0 \Rightarrow -M_{ED} - M_{EB} - M_{EF} = 0 \quad \text{:العقدة E}$$

$$0.1EI\theta_B + 0EI\theta_C + 0.2EI\theta_D + EI\theta_E - 0.6EI\psi_1 - 0.6EI\psi_2 = -33.33 \quad (IV)$$

توازن القوى الأفقية لكامل الإطار:



الشكل (73-4)

$$\sum H = -4 - 8 \Rightarrow H_A + H_F = -12,$$

$$\frac{M_{AB} + M_{BA}}{10} + \frac{M_{EF} + M_{FE}}{10} = -12$$

$$M_{AB} + M_{BA} + M_{EF} + M_{FE} = -120$$

$$0.6EI\theta_B + 0EI\theta_C + 0EI\theta_D + 0.6EI\theta_E - 2.4EI\psi_1 - 0EI\psi_2 = -120 \quad (V)$$

توازن القوى الأفقية في الطابق الأعلى من الإطار:

$$\sum H = -4 \Rightarrow H_B + H_E = -4,$$

$$\frac{M_{BC} + M_{CB}}{10} + \frac{M_{ED} + M_{DE}}{10} = -4$$

$$M_{BC} + M_{CB} + M_{ED} + M_{DE} = -40$$

$$0.6EI\theta_B + 0.6EI\theta_C + 0.6EI\theta_D + 0.6EI\theta_E + 0EI\psi_1 - 2.4EI\psi_2 = -40 \quad (VI)$$

بحل جملة المعادلات:

$$\theta_B = \frac{113.86}{EI}, \theta_C = \frac{104.28}{EI},$$

$$\theta_D = \frac{-9.54}{EI}, \theta_E = \frac{65.08}{EI},$$

$$\psi_1 = \frac{94.737}{EI}, \psi_2 = \frac{85.088}{EI},$$

$$EI\Delta_1 = 947.3 \quad EI\Delta_2 = 850.88$$

1. قيم العزوم النهائية في العقد:

$$M_{AB} = -34.07kN.m \quad M_{BC} = 15.35kN.m \quad M_{CD} = -13.43kN.m$$

$$M_{BA} = -11.3kN.m \quad M_{CB} = 13.43kN.m \quad M_{DC} = 41.85kN.m$$

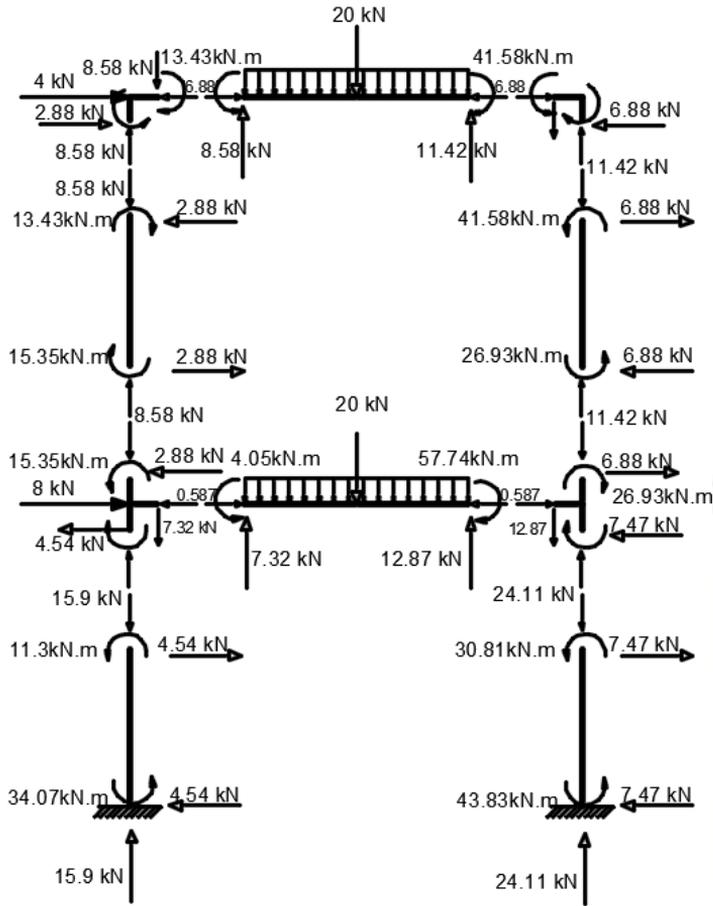
$$M_{DE} = -41.85kN.m \quad M_{EF} = -30.81kN.m \quad M_{BE} = -4.05kN.m$$

$$M_{ED} = -26.93kN.m \quad M_{FE} = -43.83kN.m \quad M_{EB} = 57.74kN.m$$

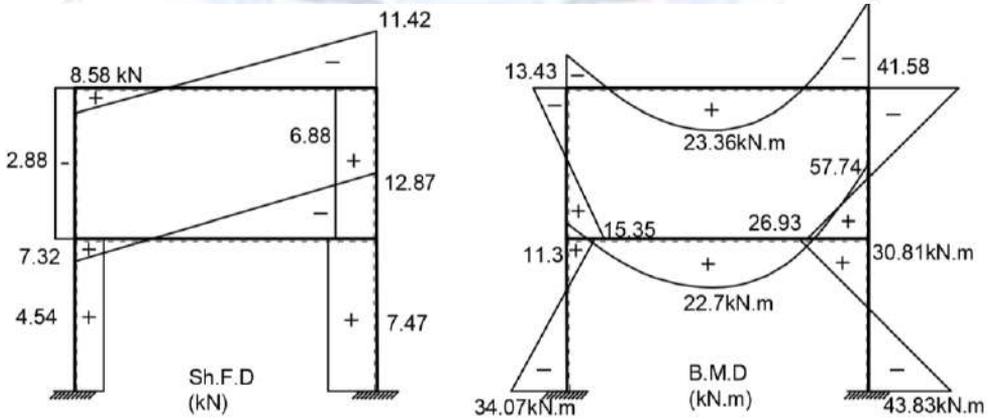
$$H_A = -4.54kN \quad H_F = -7.47kN$$

$$H_B = 2.88kN \quad H_E = 6.88kN$$

بحساب قوى القص والقوى النازمية يتم الحصول على القيم في الشكل (4-74). وتكون مخططات القص والانعطاف مبيّنة بالشكل (4-75).



الشكل (74-4)



الشكل (75-4)



• العنصر CA، الطول 6.4m، العطالة 2EI:

$$M_{AC} = \frac{4EI}{6.4} \left( 2\theta_A + \theta_C - 3\frac{\Delta_2}{6.4} \right) = 1.25EI\theta_A + 0.625EI\theta_C - 0.293EI\Delta_2 \quad (5)$$

$$M_{CA} = \frac{4EI}{6.4} \left( \theta_A + 2\theta_C - 3\frac{\Delta_2}{6.4} \right) = 0.625EI\theta_A + 1.25EI\theta_C - 0.293EI\Delta_2 \quad (6)$$

• العنصر BD، الطول 6.4m، العطالة 2EI:

$$M_{BD} = \frac{4EI}{6.4} \left( 2\theta_B + \theta_D - 3\frac{\Delta_2}{6.4} \right) = 1.25EI\theta_B + 0.625EI\theta_D - 0.293EI\Delta_2 \quad (7)$$

$$M_{DB} = \frac{4EI}{6.4} \left( \theta_D + 2\theta_B - 3\frac{\Delta_2}{6.4} \right) = 0.625EI\theta_D + 1.25EI\theta_B - 0.293EI\Delta_2 \quad (8)$$

• العنصر EC، الطول 6.4m، العطالة 4EI:

$$M_{EC} = \frac{8EI}{6.4} \left( 2\theta_E + \theta_C - 3\frac{\Delta_1}{6.4} \right) = 1.25EI\theta_C - 0.5859EI\Delta_1 \quad (9)$$

$$M_{CE} = \frac{8EI}{6.4} \left( \theta_E + 2\theta_C - 3\frac{\Delta_1}{6.4} \right) = 2.5EI\theta_C - 0.5859EI\Delta_1 \quad (10)$$

• العنصر DF، الطول 3.2m، العطالة 2EI:

$$M_{DF} = \frac{4EI}{3.2} \left( 2\theta_D + \theta_F - 3\frac{\Delta_1}{3.2} \right) = 2.5EI\theta_D - 1.172EI\Delta_1 \quad (11)$$

$$M_{FD} = \frac{4EI}{3.2} \left( 2\theta_F + \theta_D - 3\frac{\Delta_1}{3.2} \right) = 1.25EI\theta_D - 1.172EI\Delta_1 \quad (12)$$

4. توازن العقد والقوى الأفقية في الإطار:

$$\uparrow: \sum M_A = 0 \Rightarrow -M_{AC} - M_{AB} = 0 \quad \text{العقدة A:}$$

$$3.75EI\theta_A + 1.25EI\theta_B + 0.625EI\theta_C + 0EI\theta_D + 0EI\theta_E + 0EI\Delta_1 - 0.293EI\Delta_2 = 0 \quad (I)$$

$$\uparrow: \sum M_B = 0 \Rightarrow -M_{BA} - M_{BD} = 0 \quad \text{العقدة B:}$$

$$1.25EI\theta_A + 3.75EI\theta_B + 0EI\theta_C + 0.625EI\theta_D + 0EI\theta_E + 0EI\Delta_1 - 0.293EI\Delta_2 = 0 \quad (II)$$

$$\uparrow: \sum M_C = 0 \Rightarrow -M_{CA} - M_{CD} - M_{CE} = 0 \quad \text{العقدة C:}$$

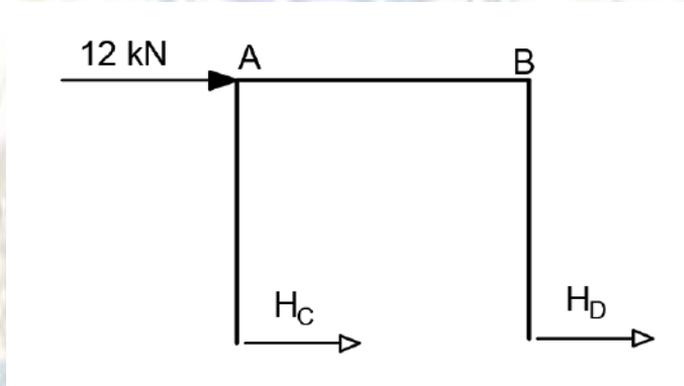
$$0.625EI\theta_A + 0EI\theta_B + 6.25EI\theta_C + 1.25EI\theta_D + 0EI\theta_E \\ - 0.586EI\Delta_1 - 0.293EI\Delta_2 = 0 \quad (III)$$

$$\uparrow: \sum M_D = 0 \Rightarrow -M_{DC} - M_{DB} - M_{DF} = 0 \quad \text{العقدة D:}$$

$$0.625EI\theta_A + 0EI\theta_B + 1.25EI\theta_C + 6.25EI\theta_D + 0EI\theta_E \\ - 0.172EI\Delta_1 - 0.293EI\Delta_2 = 0 \quad (IV)$$

توازن القوى الأفقية لكامل الإطار:

معادلة توازن القوى الأفقية في الطابق العلوي:



الشكل (4-77)

$$\sum H = -12 \Rightarrow H_C + H_D = -12,$$

$$\frac{M_{AC} + M_{CA}}{6.4} + \frac{M_{BD} + M_{DB}}{6.4} = -12$$

$$-0.293EI\theta_A + 0.293EI\theta_B + 0.293EI\theta_C + 0.293EI\theta_D \\ + 0EI\theta_E + 0EI\Delta_1 + 0.183EI\Delta_2 = -12 \quad (V)$$

توازن القوى الأفقية لكامل الإطار:

$$\sum H = -12 - 24 \Rightarrow H_E + H_F = -36,$$

$$\frac{M_{CE} + M_{EC}}{6.4} + \frac{M_{FD} + M_{DF}}{3.2} = -36$$

$$0EI\theta_A + 0EI\theta_B + 0.586EI\theta_C + 1.172EI\theta_D \\ + 0EI\theta_E + 0.916EI\Delta_1 + 0EI\Delta_2 = -36 \quad (VI)$$

بحل جملة المعادلات:

$$\theta_A = \frac{6.619}{EI}, \theta_B = \frac{4.667}{EI}, \theta_C = \frac{7.93}{EI}, \theta_D = \frac{15.74}{EI},$$

$$\Delta_1 = \frac{64.52}{EI}, \Delta_2 = \frac{121.56}{EI}$$

1. قيم العزوم النهائية في العقد:

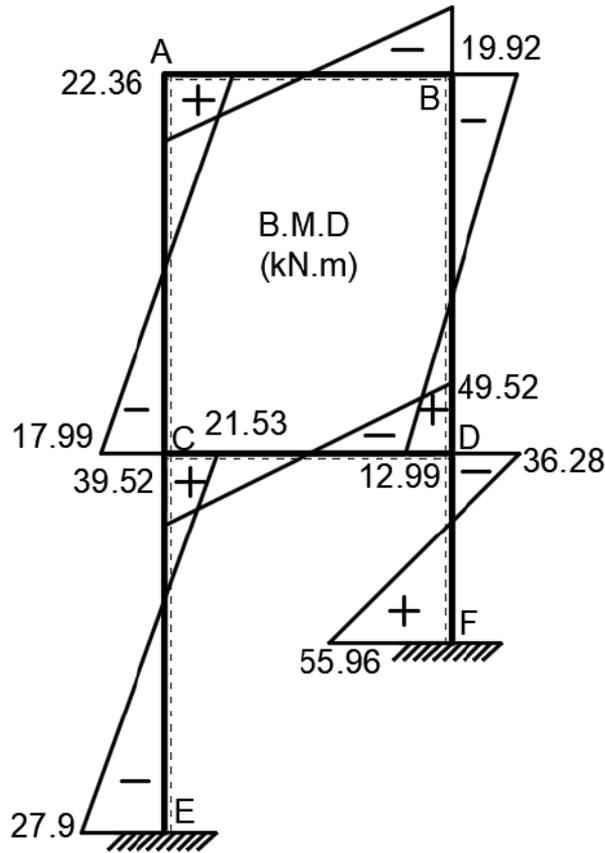
$$M_{AB} = 22.36kN.m \quad M_{CD} = 39.52kN.m \quad M_{AC} = -22.36kN.m$$

$$M_{BA} = 19.92kN.m \quad M_{DC} = 49.28kN.m \quad M_{CA} = -17.99kN.m$$

$$M_{BD} = -19.92kN.m \quad M_{CE} = -21.53kN.m \quad M_{DF} = -36.28kN.m$$

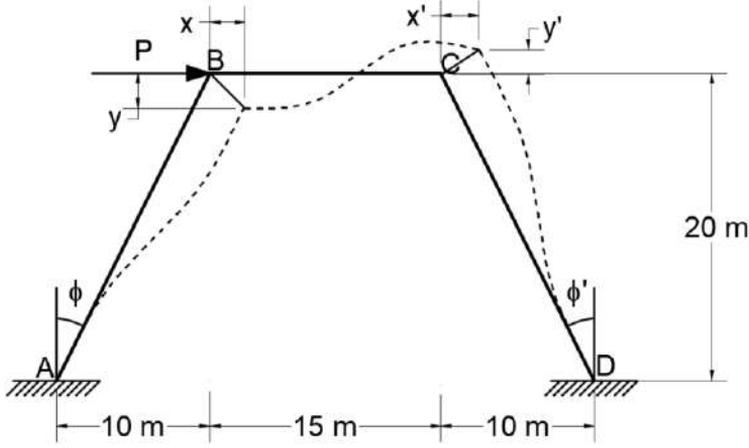
$$M_{DB} = -12.99kN.m \quad M_{EC} = -27.9kN.m \quad M_{FD} = -55.96kN.m$$

ويكون مخطط عزم الانعطاف مبيّناً بالشكل (78-4).



الشكل (78-4)

#### 12-4 تحليل الإطارات ذات الأعمدة المائلة:



الشكل (79-4)

عند وجود إطار ذي أعمدة مائلة فإن العناصر الأفقية سوف تتحرك شاقولياً بالإضافة إلى الحركة الأفقية كما هو مبين بالشكل (79-4)، كذلك الأمر فإن ردود الأفعال الشاقولية يجب أن تؤخذ بالحسبان في معادلات القص في العناصر المائلة. بإهمال التشوهات المحورية فإن العنصر الأفقي ينتقل بنفس المسافة  $z = z'$  (في الحقيقة فإن العقد تتحرك بشكل قوسي وليس بشكل مستقيم، ولكن بما أن المسافة صغيرة فإنه يمكن القبول بكونها استقامة ويبقى التعامد بين العناصر محققاً).

إن كل عنصر من العناصر الثلاث له دوران ناتج عن الانتقال يجب أن يؤخذ بالحسبان ويمكن بالاستعانة بالمثلثات بغيّة تبسيط طريقة حساب القيم الثلاث للدوران النسبي  $\psi$ . بفرض أن العقدة B تنتقل أفقياً مسافة  $x$  وشاقولياً مسافة  $y$  وبفرض الزاوية بين العنصر AB والشاقول هي  $\phi$  تصبح قيم  $z$  و  $y$  كما يلي:

$$z = \frac{x}{\cos \phi}; \quad y = x \cdot \text{tg } \phi$$

وبالتالي يكون:

$$\psi_{AB} = \frac{z}{L_{AB}} = \frac{x / \cos \phi}{h / \cos \phi} = \frac{x}{h}$$

كذلك الأمر:

$$z' = \frac{x'}{\cos \phi'}; \quad y' = x' \cdot \text{tg } \phi'$$

$$\psi_{CD} = \frac{x'}{h}$$

$$\psi_{BC} = \frac{y + y'}{L_{BC}} = \frac{x(\text{tg}\phi + \text{tg}\phi')}{L_{BC}}$$

ولكن:

$$\text{tg}\phi = \frac{a}{h}; \quad \text{tg}\phi' = \frac{b}{h}$$

$$\psi_{BC} = \frac{x\left(\frac{a}{h} + \frac{b}{h}\right)}{L_{BC}} = \frac{x(a+b)}{h.L_{BC}}$$

بتعويض الأطوال الموضحة بالشكل يكون:

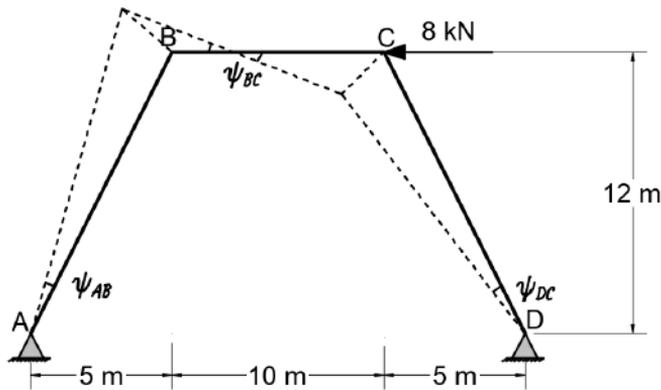
$$\psi_{AB} = \frac{x}{h} = \frac{x}{20}$$

$$\psi_{BC} = \frac{x(a+b)}{h.L_{BC}} = \frac{x}{15}$$

$$\psi_{CD} = \frac{x}{20}$$

• مثال تطبيقي /1/:

أوجد العزوم في عقد الإطار المبين بالشكل (4-80) بالاعتماد على طريقة الانتقال والدوران، ثم ارسم الشكل المنتسوه.



الشكل (4-80)

1- قيم الدوران النسبي:

تُحسب قيم الدوران النسبي  $\psi$  للعناصر الثلاث بدلالة الانتقال الأفقي  $x$  كما يلي:

$$\psi_{AB} = \frac{x}{h} = \frac{x}{12}$$

$$\psi_{BC} = \frac{x(5+5)}{12 \times 10} = \frac{x}{12}$$

$$\psi_{CD} = \frac{x}{12}$$

$$\psi_{AB} = \psi_{BC} = \psi_{CD} = \psi$$

وبالتالي يكون

2- معادلات العزوم:

• العنصر AB، الطول 13m، العطالة EI، موثوق ومسنود:

$$M_{BA} = \frac{3EI}{13}(\theta_B + \psi) = 0.2308EI\theta_B + 0.2308EI\psi \quad (1)$$

إنّ إشارة  $\psi_{AB}, \psi_{DC}$  سالبة لأن العناصر تدور عكس عقارب الساعة بينما  $\psi_{BC}$  فهي موجبة لأنه يدور مع عقارب الساعة.

• العنصر BC، الطول 10m، العطالة EI، موثوق من الطرفين:

$$M_{BC} = \frac{2EI}{10}(2\theta_B + \theta_C - 3\psi) = 0.4EI\theta_B + 0.2EI\theta_C - 0.6EI\psi \quad (2)$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{10}(2\theta_C + \theta_B - 3\psi) = 0.2EI\theta_B + 0.4EI\theta_C - 0.6EI\psi \quad (3)$$

• العنصر CD، الطول 13m، العطالة EI، موثوق ومسنود:

$$M_{CD} = \frac{3EI}{13}(\theta_C + \psi) = 0.2308EI\theta_C + 0.2308EI\psi \quad (4)$$

3- توازن العقد والقوى الأفقية في الإطار:

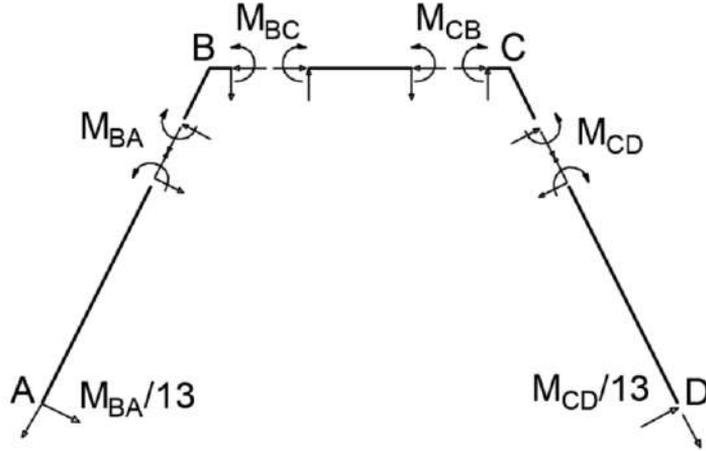
$$\uparrow \sum M_B = 0 \Rightarrow -M_{BC} - M_{BA} = 0 \quad \text{العقدة B:}$$

$$0.63EI\theta_B + 0.2EI\theta_C - 0.369EI\psi = 0 \quad (I)$$

$$\uparrow: \sum M_C = 0 \Rightarrow -M_{CD} - M_{CB} = 0$$

العقدة C:

$$0.2EI\theta_B + 0.63EI\theta_C - 0.369EI\psi = 0 \quad (II)$$

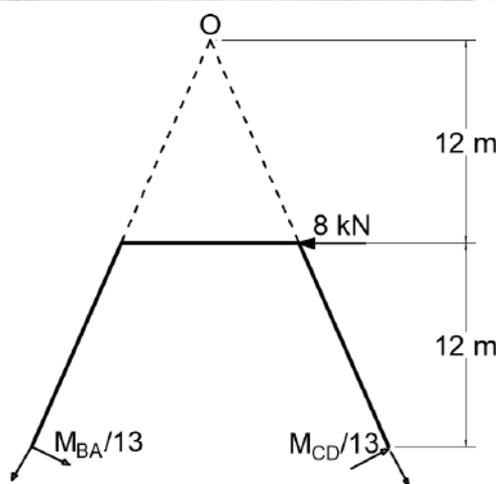


الشكل (4-81)، مخطط الجسم الحر Free Body Diagram

بأخذ العزوم حول النقطة O في الشكل (4-82) يكون:

$$\uparrow: \sum M_o = 0 \Rightarrow -\frac{M_{BA}}{13}(26) - \frac{M_{CD}}{13}(26) + 8 \times 12 = 2M_{BA} + 2M_{CD} - 96 = 0$$

$$0.4616EI\theta_B + 0.4616EI\theta_C + 0.9232EI\psi = 0 \quad (III)$$



الشكل (4-82)

بحل جملة المعادلات:

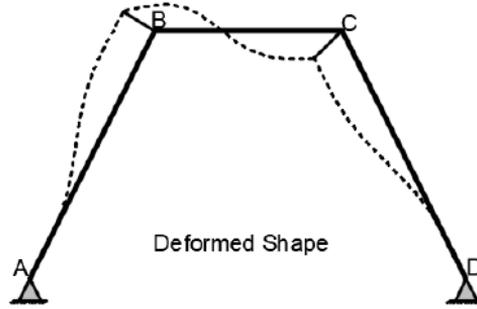
$$\theta_B = \theta_C = \frac{32}{EI}, \psi = \frac{72}{EI}$$

1. قيم العزوم النهائية في العقد:

$$M_{BA} = 24kN.m \quad M_{BC} = -24kN.m$$

$$M_{CB} = -24kN.m \quad M_{CD} = 24kN.m$$

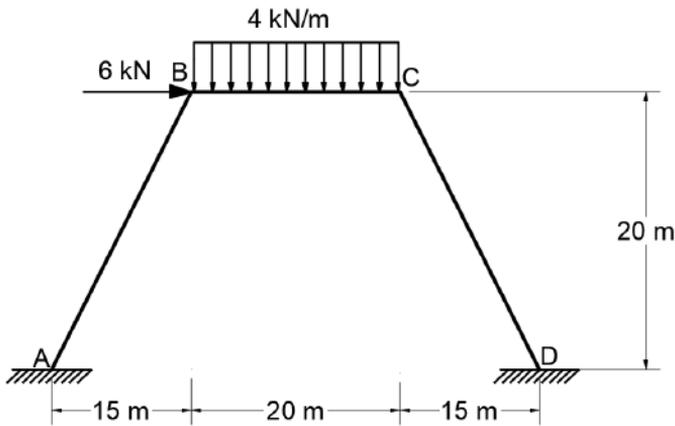
ويكون الشكل المتشوه مبيناً بالشكل (83-4).



الشكل (83-4)

• مثال تطبيقي /2/:

أوجد العزوم في عقد الإطار ذي الأعمدة المائلة المبين بالشكل (84-4)، ثم ارسم الشكل المتشوه علماً بأن EI ثابتة.



الشكل (84-4)

1- عزوم الوثق:

$$M_{BC}^F = -133.33kN.m \quad M_{CB}^F = 133.33kN.m$$

2- قيم الدوران النسبي:

تُحسب قيم الدوران النسبي  $\psi$  للعناصر الثلاث بدلالة الانتقال الأفقي  $x$  كما يلي:

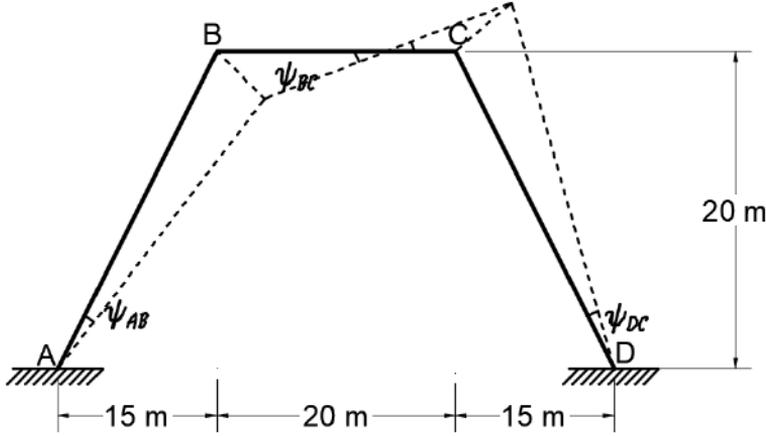
$$\psi_{AB} = \frac{x}{h} = \frac{x}{20}$$

$$\psi_{BC} = \frac{x(a+b)}{h.L_{BC}} = \frac{x(15+15)}{20 \times 20} = 3 \frac{x}{40}$$

$$\psi_{CD} = \frac{x'}{h} = \frac{x}{20}$$

$$\psi_{AB} = \psi_{CD} = 0.667\psi_{BC} = 0.667\psi$$

وبالتالي يكون



الشكل (4-85)

3- معادلات العزوم:

• العنصر AB، الطول 25m، العطالة EI:

$$M_{BA} = \frac{2EI}{25} (\theta_B - 3\psi_{AB}) = 0.08EI\theta_B - 0.16EI\psi \quad (1)$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{25} (2\theta_B - 3\psi_{AB}) = 0.16EI\theta_B - 0.16EI\psi \quad (2)$$

• العنصر BC، الطول 20m، العطالة EI:

$$M_{BC} = \frac{2EI}{20}(2\theta_B + \theta_C + 3\psi_{AB}) - 133.5 = 0.2EI\theta_B + 0.1EI\theta_C + 0.3EI\psi - 133.5 \quad (3)$$

$$M_{CB} = \frac{2EI}{20}(\theta_B + 2\theta_C + 3\psi_{AB}) + 133.5 = 0.1EI\theta_B + 0.2EI\theta_C + 0.3EI\psi + 133.5 \quad (4)$$

• العنصر CD، الطول 25m:

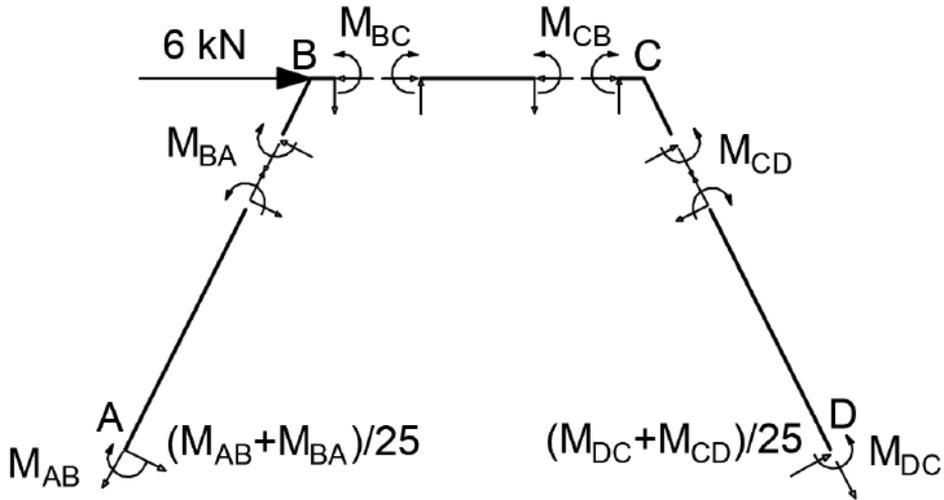
$$M_{CD} = \frac{2EI}{25}(2\theta_C + 3\psi_{DC}) = 0.16EI\theta_C - 0.16EI\psi \quad (5)$$

$$M_{DC} = \frac{2EI}{25}(\theta_C - 3\psi_{DC}) = 0.08EI\theta_C - 0.16EI\psi \quad (6)$$

4- توازن العقد والقوى الأفقية في الإطار:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow M_{BC} + M_{BA} = 0 \quad (I) \quad \text{العقدة B:}$$

$$\sum M_C = 0 \Rightarrow M_{CD} + M_{CB} = 0 \quad (II) \quad \text{العقدة C:}$$



الشكل (4-86)، مخطط الجسم الحر Free Body Diagram

بأخذ العزوم حول النقطة O في الشكل (4-87) يكون:

$$\sum M_o = 0 \Rightarrow \frac{(M_{BA} + M_{AB})}{25}(41.667) + \frac{(M_{DC} + M_{CD})}{25}(41.667)$$

$$-M_{AB} - M_{DC} + 6(13.333) = 0$$

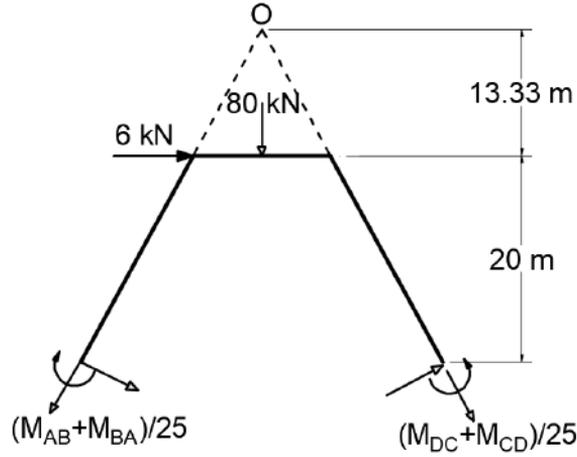
$$0.667M_{AB} + 0.1667M_{BA} + 1.667M_{CD} + 0.667M_{DC} = -80 \quad (III)$$

بحل جملة المعادلات:

$$\theta_B = \frac{487}{EI}, \theta_C = \frac{-538.7}{EI}, \psi_{AB} = \psi_{CD} = \frac{56.65}{EI}, \psi_{BC} = \frac{84.98}{EI}$$

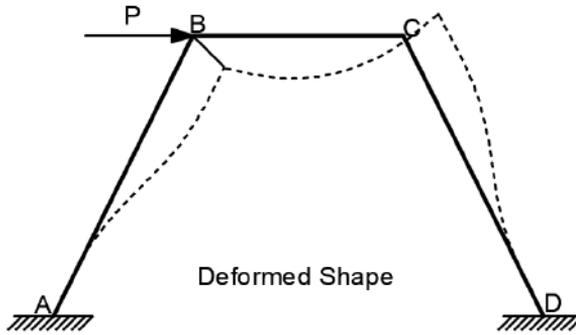
5- قيم العزوم النهائية في العقد:

$$\begin{aligned} M_{AB} &= 25.4kN.m & M_{BA} &= 64.3kN.m & M_{BC} &= -64.3kN.m \\ M_{CB} &= 99.8kN.m & M_{CD} &= -99.8kN.m & M_{DC} &= -56.69kN.m \end{aligned}$$



الشكل (87-4)

ويكون الشكل المتشوه مبيناً بالشكل (88-4).



الشكل (88-4)، الشكل المتشوه للإطار المدروس



## الفصل الخامس

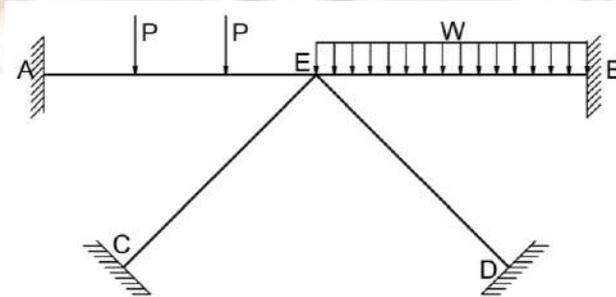
### طريقة توزيع العزوم Moment Distribution Method

#### 1-5 مقدمة:

تم نشر هذه الطريقة من قبل Hardy Cross في أيار عام 1930 بعد أن قام بتدريسها لطلابه في جامعة Illinois ابتداءً من عام 1924. عُدَّت طريقته هذه بدايةً لمرحلة جديدة في تحليل الإطارات غير المقررة ستاتيكيًا ووسَّعت استخدامها، فعلى الرغم من أنها تتطلب جهداً أكبر من الطرائق الأخرى إلا أنها تُعطي نتائجاً أكثر دقةً وأقرب إلى الطرائق الدقيقة التي تتطلب جهداً حسابياً أكبر بكثير. اعتمدت الطرائق التقريبية السابقة على حل جملة من المعادلات لإيجاد المجاهيل التي تقرر المنشآت غير المقررة ستاتيكيًا، بينما نادراً ما تستخدم طريقة توزيع العزوم هذا المبدأ وذلك في حالات الإطارات المعقدة. تتطلب طريقة Hardy Cross إجراء حلقات متتالية من الحسابات، حيث تقترب كل حلقة من الحل الدقيق قليلاً، قد يتوقف الحل بعد حلقتين أو ثلاث حيث يتم الحصول على تحليل تقريبي معقول، أو يتم الاستمرار حتى الوصول إلى الدقة المرغوبة. بالنظر إلى الدقة التي نحصل عليها بتطبيق هذه الطريقة فهي تعدُّ سريعة وعملية نسبياً.

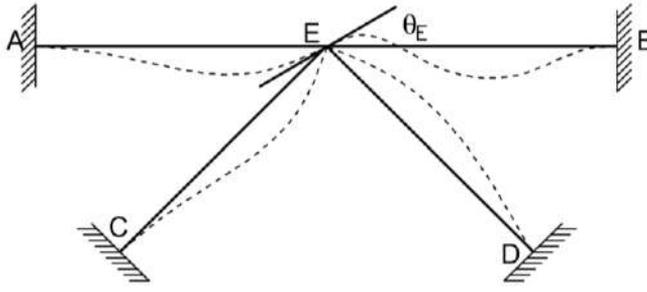
#### 2-5 مبدأ الطريقة:

تختص الطريقة بالمنشآت ذات المقاطع العرضية الثابتة على طول العنصر (عناصر موشورية)، لنأخذ المثال المبين بالشكل (1-5)، يُفترض ألا يحصل انتقال في العقدة E، ولكن هناك دوران في هذه العقدة، أي أن العناصر سوف تدور كمجموعة ولكن لن تنتقل بالنسبة لبعضها. أيضاً يُفترض إهمال التشوهات المحورية.



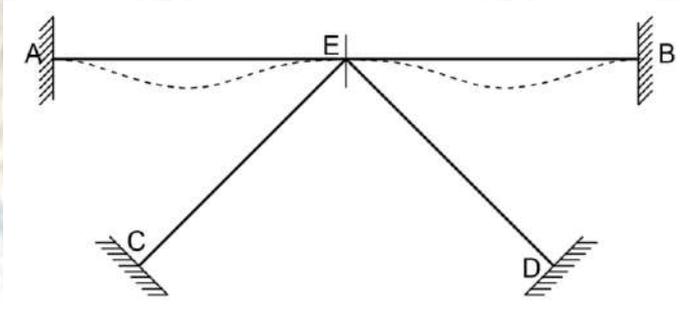
الشكل (1-5)

إن الدوران في العقدة E تحت تأثير الحمولات سيؤدي إلى الشكل المنشوه المبين بالشكل (2-5).



الشكل (2-5)

إذا كانت العقدة E موثوقة فإن الشكل المتشوه سوف سيكون كما هو مبين بالشكل (3-5)، إن الدورانات معدومة في النقطة E والعزوم في العقد تحت تأثير الحملات هي عزوم الوثق Fixed End Moments. بإزالة الوثافة تدور العقدة بشكل طفيف وبالتالي تدور نهايات العناصر الملتقية فيها مما يسبب إعادة توزيع العزوم في نهايات العناصر. إن تغير العزوم في E سيؤدي إلى تغيرات العزوم في النهايات الأخرى للعناصر A,B,C,D.



الشكل (3-5)

بعد حساب عزوم الوثق تؤول المسألة إلى حساب العزوم الناشئة في E بسبب الدوران في هذه النقطة E وبالتالي تكون العزوم في النهاية E عبارة عن مجموع كل من عزوم الوثق والعزم الناتج عن الدوران في E. إن العزم في النهاية الأخرى بسبب الدوران في E يسمى العزم المنقول Carry-Over Moment. يجب الإجابة على السؤالين التاليين قبل تطبيق هذه الطريقة على المنشآت الحقيقية:

- ما هي العزوم المتولدة في النهايات الأخرى (العزوم المتولدة في نهاية موثوقة إذا تعرّضت النهاية الأخرى (E) إلى عزم ما)؟.
- عندما تدور العقدة غير الموثوقة، ما هي نسبة العزم التي يأخذها كل عنصر من العناصر الملتقية فيها؟.

### 5-2-1 العزم المنقول إلى النهاية الأخرى Carry-Over Moment:

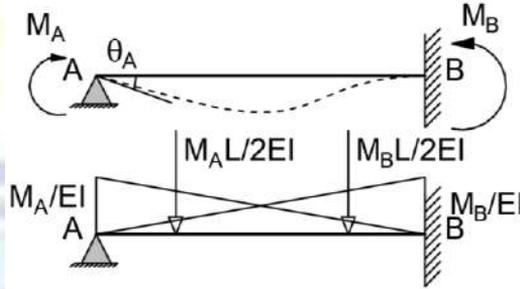
عند تطبيق عزم  $M_A$  في النهاية اليسرى من الجائز المبين بالشكل (5-4) فإن هذا العزم يؤدي إلى دوران العقدة A بالمقدار  $\theta_A$ . لن يكون هناك انتقال في النهاية اليسرى بالنسبة إلى النهاية اليمنى أي  $\delta_A = 0$ . باستعمال طريقة الجائز البديل Conjugate Beam تكون قيمة الانتقال في النقطة A.

$$\delta_A = \frac{\left(\frac{1}{2} M_A L\right)\left(\frac{1}{3} L\right) + \left(\frac{1}{2} M_B L\right)\left(\frac{2}{3} L\right)}{EI} = 0 \Rightarrow \frac{M_A L^2}{6EI} + \frac{M_B L^2}{3EI} = 0$$

$$M_B = -\frac{1}{2} M_A \quad (1-5)$$

والإشارة السالبة تعني أنّ العزم  $M_B$  يعاكس الجهة المفروضة. يعرف عامل النقل لعنصر ما Carry-Over Factor (COF) على أنّه النسبة بين العزم المتولد في الوثافة إلى العزم المطبق في العقدة A وهذه النسبة تساوي إلى نصف.

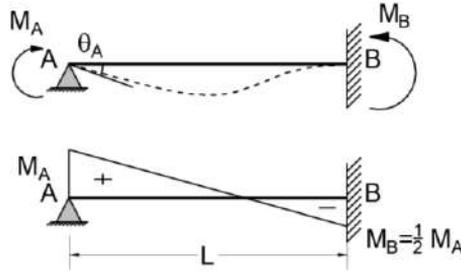
$$(COF)_{AB} = \frac{M_B}{M_A} \quad (2-5)$$



الشكل (5-4)

### 5-2-2 عوامل التوزيع Distribution Factors:

غالباً ما تكون العناصر الملتقطة في عقدة ما ذات صلابات مختلفة EI، عندما تدور العقدة فإن حصّة كل عنصر تختلف عن الآخر. السؤال المطروح هو ما هي حصّة كل عنصر؟. منطقياً يجب أنّ تكون متناسبة مع دوران نهاية كل عنصر، الشكل (5-5).

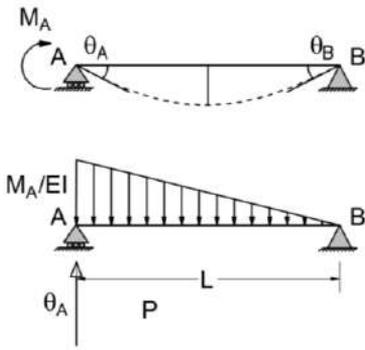


الشكل (5-5)

بحسب طريقة الجائز البديل يكون:

$$\theta_A = \frac{\left(\frac{1}{2}M_A\right)\left(\frac{2}{3}L\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M_A\right)\left(\frac{1}{3}L\right)}{EI} = \frac{M_A L}{4EI}$$

$$M_A = \frac{4EI}{L}\theta_A \quad (3-5)$$



الشكل (6-5)

يُلاحظ أنّ المتغيّرات الوحيدة التي تؤثر على الدوران هي الطول وعزم العطالة  $L$ ،  $I$  وبافتراض أنّ المادة هي ذاتها فإن عامل المرونة الطولاني  $E$  هو نفسه، أي أنّ مقدار الدوران الحاصل في نهاية كل عنصر يتغيّر بشكل مباشر بحسب  $\frac{L}{I}$  كلما نقصت  $\frac{L}{I}$  حصلت زيادة في الدوران. يتغيّر العزم بحسب تغيّر الدوران وبالتالي يجب حساب المعامل  $\frac{I}{L}$

ويسمّى عامل الصلابة Stiffness Factor.

$$K = \frac{I}{L} \quad (4-5)$$

حتى الآن تم تعريف عامل الصلابة  $k$  وعامل النقل COF للعنصر AB الموثوق في النقطة B، ولكن ما هي قيمة هذه العوامل في حالة وجود استناد بسيط في النقطة B بدلاً من الوثاقفة. من أجل ذلك تتم دراسة الجائز البسيط ذي العطالة الثابتة المبين بالشكل (6-5).

$$\text{إن } M_B = 0 \text{ وبالتالي يكون } (COF)_{AB} = \frac{M_B}{M_A} = 0$$

ومن أجل تحديد عامل الصلابة فإنه يتم حساب الدوران في النقطة A باستعمال طريقة الجائز البديل.

$$\theta_A = -\frac{\left(\frac{1}{2}M_A\right)(L)\left(\frac{2}{3}L\right)}{EIL} = \frac{M_A L}{3EI}$$

$$M_A = \frac{3EI}{L}\theta_A \quad (6-5)$$

ويكون عامل الصلابة لجانز بسيط مساوياً إلى ثلاثة أرباع عامل الصلابة لجانز موثوق ومسند.

$$K = \frac{3}{4} \frac{I}{L} \quad (7-5)$$

ويتم حساب عوامل الصلابة لجميع العناصر الملتقية في العقدة ثم جمعها، وتحسب حصة كل عنصر من العزم بحسب نسبة عامل صلابته إلى مجموع عوامل صلابات العناصر الملتقية في العقدة، يسمى هذا العامل عامل التوزيع Distribution Factor.

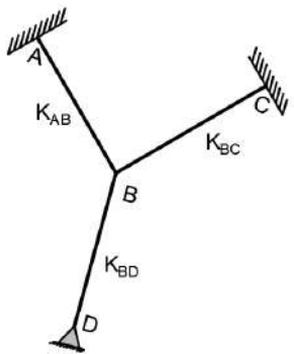
مثلاً بحساب عوامل التوزيع لعناصر المنشأ المبين في الشكل (8-5) يكون:

$$(DF)_{BA} = \frac{K_{BA}}{K_{BA} + K_{BC} + \frac{3}{4}K_{BD}}$$

$$(DF)_{BC} = \frac{K_{BC}}{K_{BA} + K_{BC} + \frac{3}{4}K_{BD}}$$

بالتعميم يكون:

$$(DF)_i = \frac{\sum K_i}{\sum K} \quad (8-5)$$



الشكل (7-5)

### 5-2-3 العزم غير المتوازن Unbalanced Moment:

تم افتراض كون العقد كلها موثوقة في الجملة المدروسة بداية الأمر، وبالتالي كان مجموع عزوم الوثق في العقدة لا يساوي إلى الصفر. بينما في الحقيقة تدور العقدة ومجموع العزوم في العقدة معدوم. إن العزم غير الموازن يمثل الفرق بين الصفر ومجموع عزوم الوثق في العقدة.

يسبب العزم غير الموازن Unbalanced Moment دوراناً في العقدة، ويؤدي هذا الدوران إلى تدوير نهايات العناصر عند العقدة وتغيير عزوم انعطافها، ويتعبّر آخر تتم مقاومة الدوران بوساطة العزوم وتتسأ عزوم انعطاف في النهايات الأخرى للعناصر بينما يستمر الدوران حتى يحصل التوازن أي تتساوى العزوم المقاومة مع العزوم غير الموازنة، وفي هذه اللحظة يصبح مجموع العزوم في العقدة معدوماً. إن عملية الدوران وتغيير العزوم تسمى بعملية توزيع العزوم وتستمر لعدة حلقات تكرارية حتى يحصل التوازن النهائي.

### 5-2-4 اصطلاح الإشارة:

يستخدم نفس اصطلاح الإشارة المتبع في طريقة الانتقال والدوران، أي تكون العزوم المقاومة موجبة عندما تدور مع عقارب الساعة، وتكون سالبة عندما تدور بعكس عقارب الساعة.

### 5-3 تطبيق طريقة توزيع العزوم في الجوائز المستمرة:

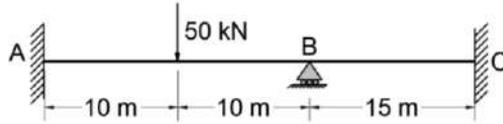
يمكن تلخيص مراحل الحسابات لتطبيق طريقة توزيع العزوم في الجوائز المستمرة وفقاً للخطوات التالية:

- 1- حساب عوامل توزيع العزوم لكل من عناصر الجائز.
- 2- حساب عزوم الوثاقات التامة والمعدلة.
- 3- تحديد عوامل النقل وتكتب في وسط المجازات.
- 4- تتم دراسة توازن كل عقدة على حدة، وذلك بإيجاد مجموع عزوم الوثاقات الموجودة على جوانب العقدة، ثم يتم تطبيق عزم مساوٍ ومعاكس لهذا المجموع Unbalanced Moment ويتم توزيعه بحسب عوامل التوزيع.
- 5- بعد الانتهاء من دراسة توازن جميع العقد يتم حساب العزوم المنقولة من كل عقدة إلى النهايات الأخرى للعناصر.
- 6- تُعاد عملية توازن العقد من جديد، وهكذا حتى يتم الحصول على عقد متوازنة في كل الجائز.
- 7- إن العزوم النهائية في كل عقدة تساوي إلى مجموع العزوم الناتجة في كل خطوة.

#### 4-5 أمثلة على تطبيق طريقة توزيع العزوم على الجوائز المستمرة:

مثال (1-5):

أوجد العزوم في نهايات الجائز المبين بالشكل (8-5) باستخدام طريقة توزيع العزوم، علماً بأن عتالة الجائز ثابتة على طوله.



الشكل (8-5)

بما أن الصلابة ثابتة تكون صلابات العناصر وعوامل توزيع العزوم.

$$K_1 = \frac{1}{20}, K_2 = \frac{1}{15} \quad (DF)_{BA} = 0.43, (DF)_{BC} = 0.57$$

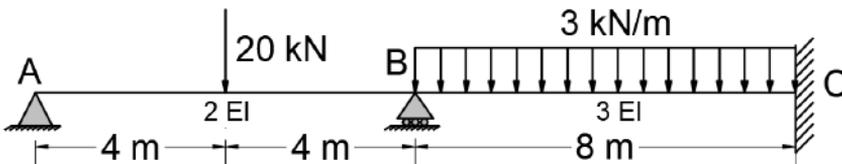
بتطبيق خطوات العمل السابقة يتم الحصول على القيم الواردة في الشكل (9-5)، ويلاحظ أنه يتم الوصول إلى العزوم النهائية بحلقة تكرارية واحدة.

FEM	A	125 kN.m	125	0	0	C
DF		-125	0.43	0.57		
Unb M			-125			
Unb M. D.			-53.8	-71.2		
① Co		-26.9				-35.6
Σ		-151.9	+71.2	-71.2		-35.6

الشكل (9-5)

مثال (2-5):

استخدم طريقة توزيع العزوم من أجل إيجاد العزوم في عقد الجائز المبين بالشكل (10-5) ثم ارسم مخطط الجهد القاطع وعزم الانعطاف والشكل المتشوه.



الشكل (10-5)

بحساب عزوم الوثق يكون:

$$M_{BA}^{FM} = 30kN.m \quad M_{BC}^F = -16kN.m \quad M_{CB}^F = 16kN.m$$

وعوامل التوزيع:

$$(DF)_{BA} = \frac{\frac{3}{4} 2EI}{\frac{3}{4} 2EI + 3EI} = 0.333 \quad (DF)_{BC} = \frac{3EI}{\frac{3}{4} 2EI + 3EI} = 0.667$$

الجدول (1-5)

COF	الاتجاه
0 ←	من وثاقة إلى مسند
$\frac{1}{2}$ ←	من مسند إلى وثاقة
0 ←	من مسند داخلي إلى مسند طرفي
$\frac{1}{2}$ ←	من مسند طرفي إلى مسند داخلي
$\frac{1}{2}$ ←	من مسند داخلي إلى مسند داخلي

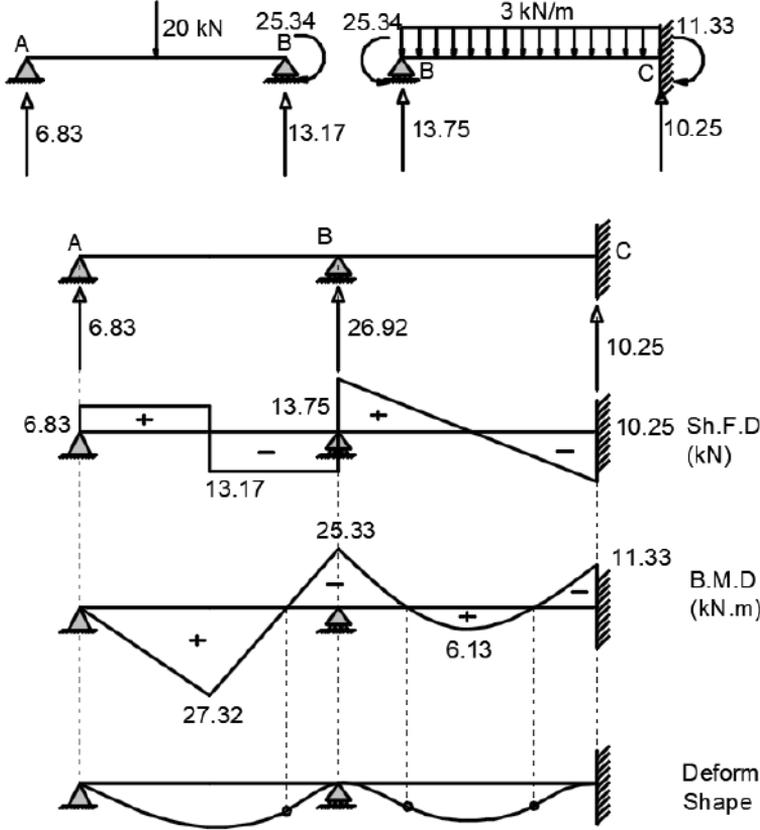
ويمكن تلخيص عوامل توزيع العزوم  
عموماً كما في الجدول (1-5).

وتكون نتائج الحسابات التكرارية كما  
في الشكل (11-5).

	A	B	C
COF	1	0.333	0
DF	1	0.333	0.667
FEM <sub>load</sub>		30	-16
Unb M.		-14	
Dist.		-4.662	-9.338
Co			-4.662
Σ		30-4.667	-16-9.338
		25.34	-25.34
			11.33

الشكل (11-5)

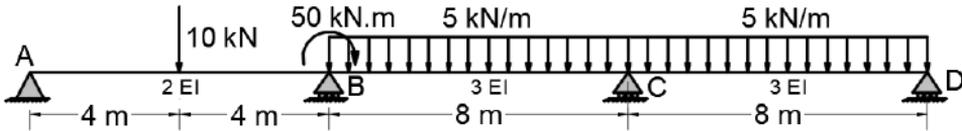
الآن يمكن حساب قوى القص في كل مجاز من مجازات الجائز ثم رسم المخططات.



الشكل (12-5)

مثال (3-5):

استخدم طريقة توزيع العزوم من أجل إيجاد العزوم في عقد الجائز المبين بالشكل (13-5) ثم ارسم مخطط الجهد القاطع وعزم الانعطاف والشكل المتشوه.



الشكل (13-5)

بحساب قيم عزوم الوثق في كل عنصر.

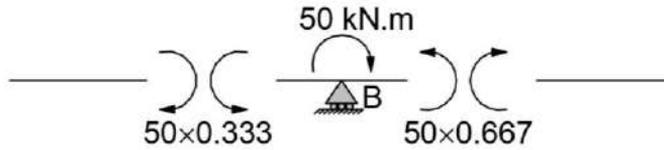
$$M_{BA}^{FM} = 15kN.m \quad M_{BC}^F = -26.67kN.m \quad M_{CB}^F = 26.67kN.m \quad M_{CD}^{FM} = -40kN.m$$

وتكون عوامل التوزيع - عقدة B:

$$(DF)_{BA} = \frac{\frac{3}{4}2EI}{\frac{3}{4}2EI + 3EI} = 0.333 \quad (DF)_{BC} = \frac{3EI}{\frac{3}{4}2EI + 3EI} = 0.667$$

عوامل التوزيع - عقدة C:

$$(DF)_{CB} = \frac{3EI}{\frac{3}{4}3EI + 3EI} = 0.571 \quad (DF)_{CD} = \frac{\frac{3}{4}3EI}{\frac{3}{4}3EI + 3EI} = 0.428$$



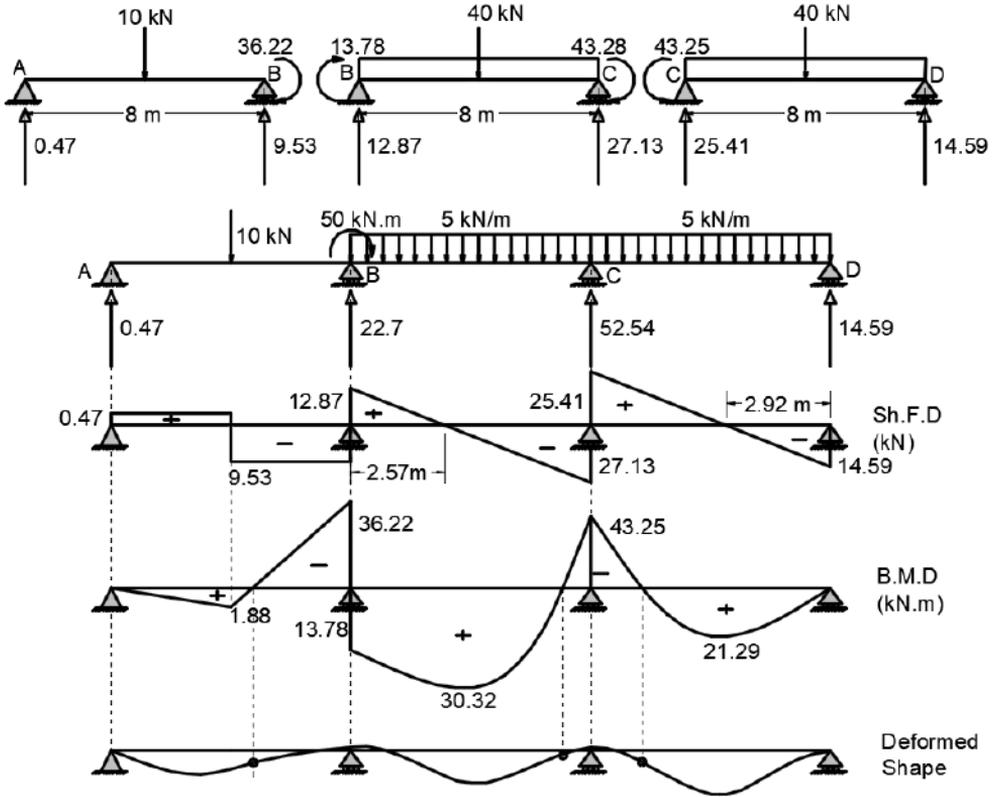
الشكل (14-5) العزوم على العقدة B

ويكون توزيع العزوم على نهايات العناصر كما في الشكل (15-5).

	A	B	C	D		
COF						
DF	1	0.333	0.667	0.571	0.429	1
عزم		50				
توزيع عزم		16.65	33.35			
Co			16.675			
FEM <sub>load</sub>		15	-26.667	26.667	-40	
Unb. M.		11.667		-3.3417		
1 <sup>st</sup> Dist.		+3.885	+7.782	-1.905	-1.437	
Co			-0.953	+3.891		
2 <sup>nd</sup> Dist.		+0.317	+0.636	-2.218	-1.673	
Co			-1.109	+0.318		
3 <sup>rd</sup> Dist.		+0.369	+0.74	-0.181	-0.137	
Σ kN.m		36.22	+13.78	43.28	-43.25	

الشكل (15-5)

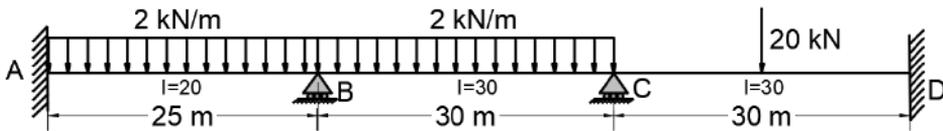
وتكون ردود الأفعال ومخططات القوى القاطعة وعزم الانعطاف والشكل المشوه.



الشكل (5-16)

مثال (5-4):

أوجد العزوم في عقد الجائر المبين بالشكل (5-17).



الشكل (5-17)

بحساب قيم عزوم الوثق في كل عنصر.

$$M_{AB}^F = -104.2 \text{ kN.m} \quad M_{BA}^F = 104.2 \text{ kN.m} \quad M_{BC}^F = -150 \text{ kN.m} \quad M_{CB}^F = 150 \text{ kN.m}$$

$$M_{CD}^F = -75 \text{ kN.m} \quad M_{DC}^F = 75 \text{ kN.m}$$

وتكون عوامل الصلابة وعوامل التوزيع:

$$K_1 = \frac{20}{25} = 0.8 \quad K_2 = \frac{30}{30} = 1 \quad K_3 = \frac{30}{30} = 1$$

$$(DF)_{BA} = \frac{0.8}{0.8+1} = 0.444 \quad (DF)_{BC} = \frac{1}{0.8+1} = 0.556$$

$$(DF)_{CB} = \frac{1}{1+1} = 0.5 \quad (DF)_{CD} = \frac{1}{1+1} = 0.5$$

عوامل تحويل العزوم:

$$Co_{AB} = 0 \quad Co_{BA} = \frac{1}{2} \quad Co_{BC} = \frac{1}{2} \quad Co_{CB} = \frac{1}{2} \quad Co_{CD} = \frac{1}{2} \quad Co_{DC} = 0$$

ويكون توزيع العزوم على نهايات العناصر كما في الشكل (5-18).

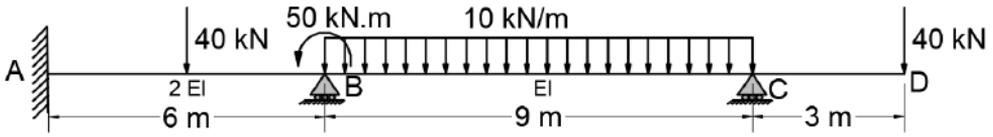
	A	B	C	D		
COF	0	←	←	←		
DF	0	0.444	0.556	0.5	0.5	0
FEM <sub>load</sub>	-104.2	104.2	-150	150	-75	75
Unb.M.		45.8		-75		
1 <sup>st</sup> Dist		+20.35	+25.47	-37.5	-37.5	
Co	10.18		-18.75	+12.73		-18.75
2 <sup>nd</sup> Dist		+8.33	+10.425	-6.37	-6.37	
Co	4.2		-3.18	+5.213		-3.18
3 <sup>rd</sup> Dist		+1.414	+1.768	-2.61	-2.61	
Co	+0.71		-1.3	+0.884		-1.3
4 <sup>th</sup> Dist		+0.58	+0.722	-0.44	-0.44	
Co	+0.29		-0.22	+0.36		-0.22
5 <sup>th</sup> Dist		+0.10	+0.12	-0.18	-0.18	
Σ kN.m.	-88.85	134.97	-134.95	122.1	-122.1	51.55

الشكل (5-18)

مثال (5-5):

استخدم طريقة توزيع العزوم في الجائز المبين بالشكل (5-19) من أجل:

- إيجاد ردود أفعال المساند.
- رسم كل من مخططات القص وعزم الانعطاف والشكل المتشوه.



الشكل (19-5)

بحساب قيم عزوم الوتق في كل عنصر.

$$M_{AB}^F = -30 \text{ kN.m} \quad M_{BA}^F = 30 \text{ kN.m} \quad M_{BC}^{FM} = -101.25 \text{ kN.m}$$

وتكون عوامل توزيع العزوم:

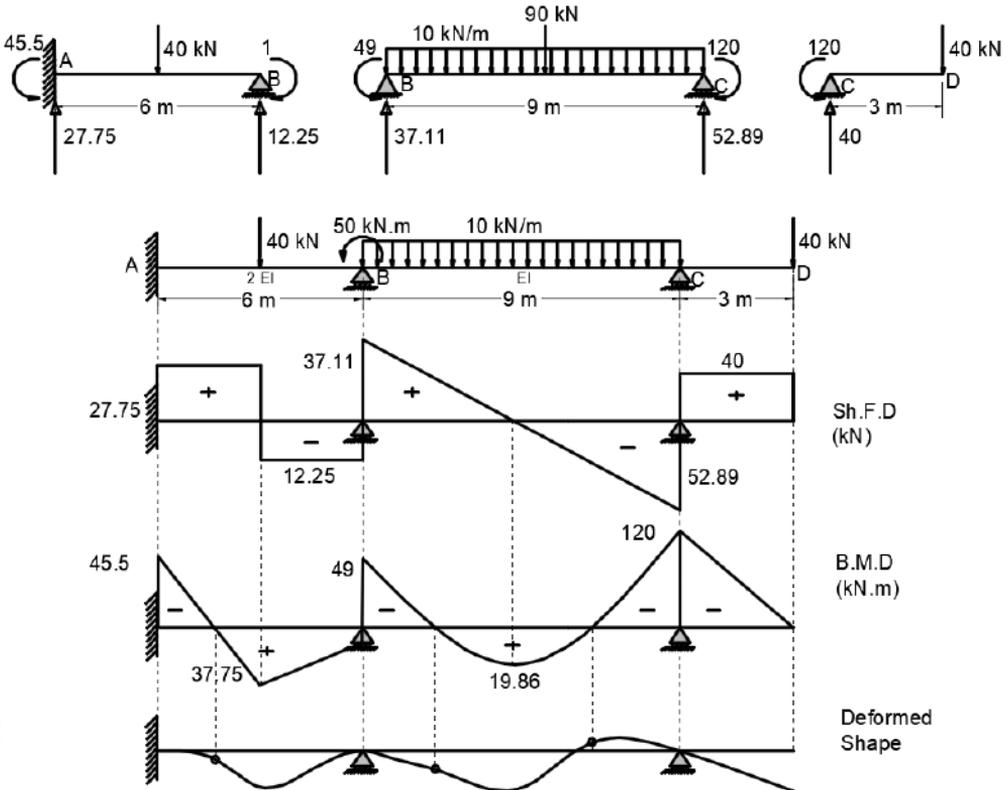
$$(DF)_{BA} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{2}{6} + \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{4}} = 0.8 \quad (DF)_{BC} = \frac{\frac{1}{9} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{2}{6} + \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{4}} = 0.2$$

ويكون توزيع العزوم على نهايات العناصر كما في الشكل (20-5).

	A	B	C
COF	0	0	1
DF	0	0.8 0.2	1
عزم		-50	
توزيع عزم		-40 -10	120
Co	-20	60	
FEM <sub>load</sub>	-30	+30 -101.25	
Unb M.		11.25	
1 <sup>st</sup> Dist.		+9 +2.25	
Co	4.5		
Σ kN.m	-45.5	-1 -49	120

الشكل (20-5)

وتكون ردود الأفعال ومخططات الجهد والقاطع وعزم الانعطاف والشكل المتشوه كما في الشكل (21-5).

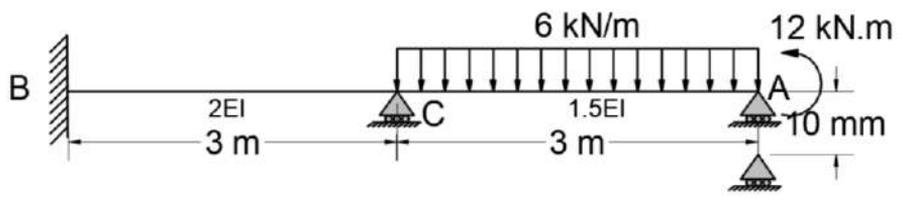


الشكل (21-5)

مثال (6-5):

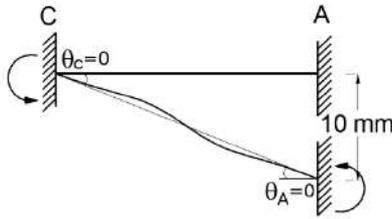
ينتقل المسند A في الجائز المبين بالشكل (22-5) بالمقدار 10mm نحو الأسفل. استخدم طريقة توزيع العزوم من أجل إيجاد ردود أفعال المساند، ثم ارسم كلاً من مخططات القص وعزم الانعطاف والشكل المشوه.

$E = 200GPa \quad I = 50 \times 10^6 mm^4$



الشكل (22-5)

بحساب قيم عزوم الوثق في كل عنصر.



الشكل (23-5)

$$(M_{CA}^F)_\Delta = (M_{AC}^F)_\Delta = \frac{-6 \times 1.5 EI \Delta_A}{(3)^2} = \frac{-6 \times 1.5 (200 \times 50) (0.01)}{(3)^2} = -100 \text{ kN.m}$$

$$(M_{CA}^{FM})_\Delta = -100 + \frac{100}{2} = -50 \text{ kN.m}$$

$$(M_{CA}^F)_{Load} = (M_{AC}^F)_{Load} = \frac{-6 \times 3^2}{12} = -4.5 \text{ kN.m}$$

$$(M_{CA}^{FM})_{Load} = -4.5 - \frac{4.5}{2} = -6.75 \text{ kN.m}$$

وتكون عوامل توزيع العزوم:

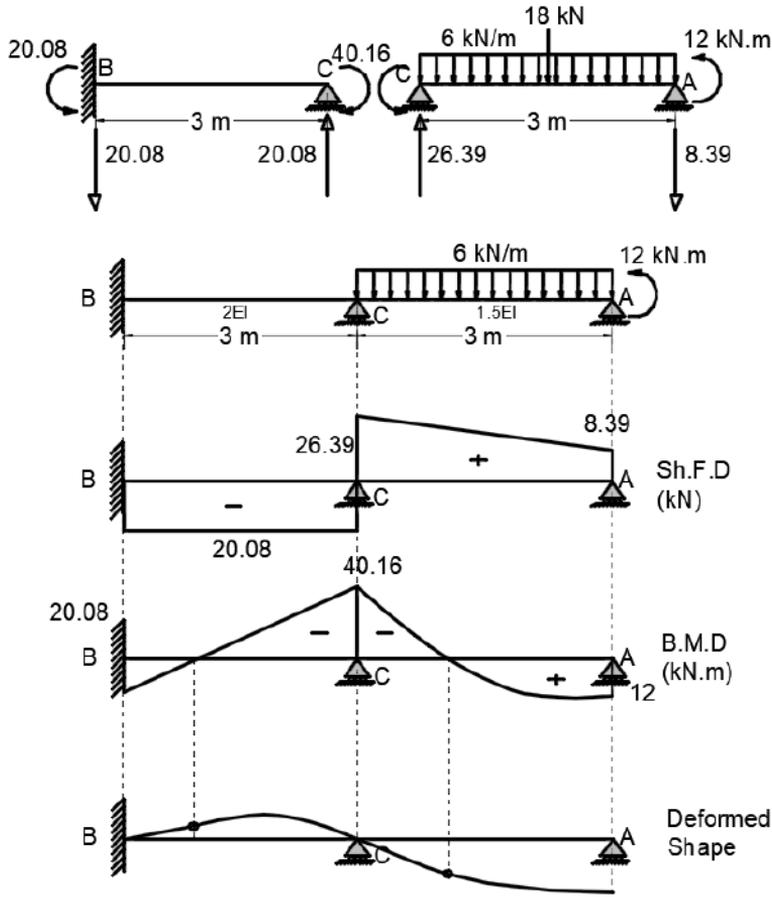
$$(DF)_{CB} = \frac{2}{2 + 1.5 \frac{3}{4}} = 0.64 \quad (DF)_{BA} = \frac{1.5 \frac{3}{4}}{2 + 1.5 \frac{3}{4}} = 0.36$$

توزيع العزوم موضَّح بالشكل (24-5).

COF	B	C	A
DF	0	0.64 0.36	1
توزيع عزم			-12
Co		-6	
FEM <sub>load</sub>	-30	-6.75	
FEM <sub>Δ</sub>		-50	
Unb.M.		62.75	
1 <sup>st</sup> Dist.		40.16 22.59	
Co	20.08		
Σ kN.m	20.08	40.16 -40.16	-12

الشكل (24-5)

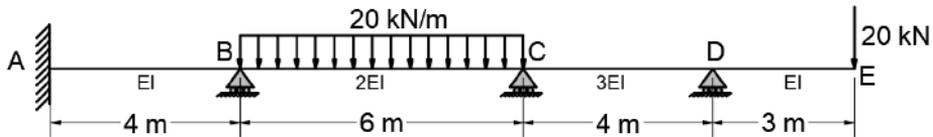
وتكون ردود الأفعال ومخططات الجهود والشكل المشوه كما في الشكل (5-25).



الشكل (5-25)

مثال (5-7):

أوجد العزوم في عقد الجائز المبيّن بالشكل (5-26) ثم ارسم مخطط عزم الانعطاف.



الشكل (5-26)

$$M_{BC}^F = \frac{-20 \times 6^2}{12} = -60 \text{ kN.m} \quad M_{CB}^F = \frac{20 \times 6^2}{12} = 60 \text{ kN.m}$$

العزم الخارجي على المسند D  $M_D = -20 \times 3 = -60 \text{ kN.m}$

$$(DF)_{BA} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} + \frac{2}{6}} = 0.43 \quad (DF)_{BC} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{1}{4} + \frac{2}{6}} = 0.57$$

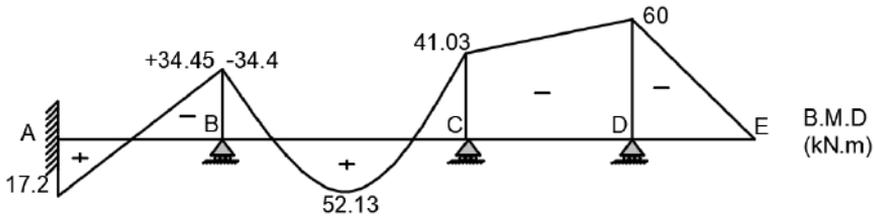
$$(DF)_{CB} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{2}{6} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}} = 0.37 \quad (DF)_{CD} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{2}{6} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}} = 0.63$$

توزيع العزوم موضَّح بالشكل (27-5).

COF	A	B	C	D	E
DF	0	0.43	0.57	0.37	0.63
توزيع عزم					+60
Co				30	
FEM <sub>load</sub>		-60	+60		
Unb.M.		+60	-90		
1 <sup>st</sup> Dist.		+25.8	34.2	-33.3	-56.7
Co	12.9		-16.667		+17.1
2 <sup>nd</sup> Dist.		+7.2	+9.5	-6.33	-10.77
Co	3.6		-3.165		1.15
3 <sup>rd</sup> Dist.		+1.36	+0.18	-0.42	-0.724
Co	0.68		-0.21		0.9
4 <sup>th</sup> Dist.		+0.9	+0.1197	-0.333	-0.567
Σ kN.m	17.2	+34.45	-34.4	38.76	-38.76

الشكل (27-5)

ويكون مخطط عزم الانعطاف موضَّحاً في الشكل (28-5).



الشكل (28-5)

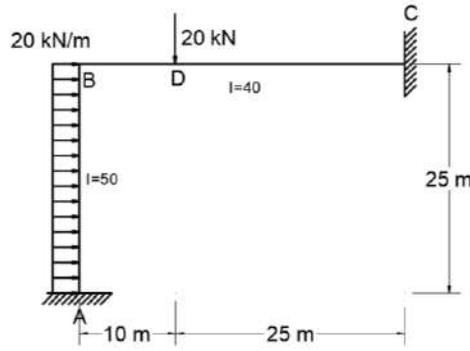
## 5-5 طريقة توزيع العزوم في الإطارات:

### 1-5-5 الإطارات بدون انزياح جانبي Frames without Sidesway

في حال وجود انتقال جانبي يحدث دوران في نهايات العناصر مما يؤثر على قيم العزوم في العناصر. كلما زاد تعقيد المنشأ كلما واجهتنا مشكلة حساب القيم عند العقد بحيث لا تتداخل بين العناصر ولا تؤثر على بقية القيم. سيتم اعتماد النظام الجدولي من أجل الإطارات كما في المثال التالي.

مثال (5-8):

أوجد قيم العزوم في نهايات الإطار المبين بالشكل (5-29).



الشكل (5-29)

عزوم الوثق:

$$M_{AB}^F = -104.2 \text{ kN.m} \quad M_{BA}^F = 104.2 \text{ kN.m} \quad M_{BC}^F = -133.3 \text{ kN.m} \quad M_{CB}^F = 66.7 \text{ kN.m}$$

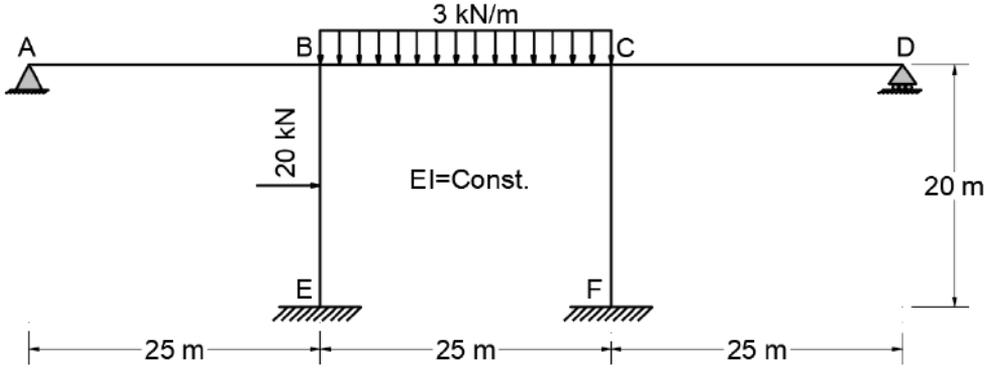
وتكون عملية توزيع العزوم موضحة في الجدول (5-2).

الجدول (5-2)

العقدة	A	B		C
العنصر	AB	BA	BC	CB
Df	0	0.64	0.364	0
FEM	-104.2	104.2	-133.3	66.7
UM		29.1		
Dist.		18.6	10.6	
Co.	9.3			5.3
$\Sigma$	-94.9	122.8	-122.7	72

### مثال (5-9):

أوجد قيم العزوم في نهايات المنشأ الميّن بالشكل (5-30).



الشكل (5-30)

عزوم الوثق:

$$M_{BC}^F = -156.2 \text{ kN.m} \quad M_{CB}^F = 156.2 \text{ kN.m} \quad M_{BE}^F = 50 \text{ kN.m} \quad M_{EB}^F = -50 \text{ kN.m}$$

عوامل توزيع العزوم في العقدة B:

$$(DF)_{BA} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{25}}{\frac{3}{4} \times \frac{1}{25} + \frac{1}{20} + \frac{1}{25}} = 0.25 \quad (DF)_{BE} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{4} \times \frac{1}{25} + \frac{1}{20} + \frac{1}{25}} = 0.42$$

$$(DF)_{BC} = \frac{\frac{1}{25}}{\frac{3}{4} \times \frac{1}{25} + \frac{1}{20} + \frac{1}{25}} = 0.333$$

إن العقدة C تناظر العقدة B وبالتالي تكون لها نفس عوامل التوزيع. ويكون العزم غير الموازن في كل من العقدتين:

$$Unb.M_B = 106.2 \text{ kN.m} \quad Unb.M_C = -156.2 \text{ kN.m}$$

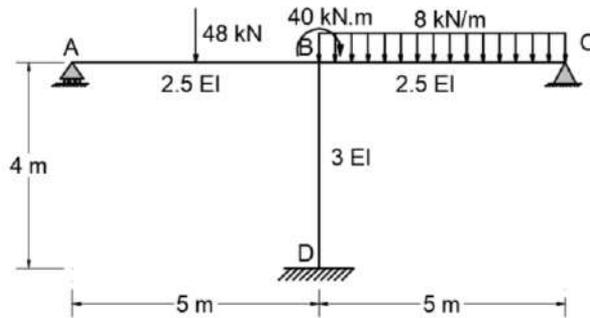
وتكون عملية توزيع العزوم موضحة في الجدول (5-3).

الجدول (3-5)

العقدة	B			C			E	F
العنصر	BA	BE	BC	CB	CF	CD	EB	FC
Df	0.25	0.42	0.333	0.333	0.42	0.25	0	0
FEM		50	-156.2	156.2			-50	
UM	106.2			-156.2				
Dist.	26.5	44.3	35.4	-52.1	-65.1	-39		
Co.			-26	17.7			22.2	-32.6
Dist.	6.5	10.8	8.7	-5.9	-7.4	-4.4		
Co.			-3	4.4			5.4	-3.7
Dist.	0.7	1.3	1	-1.5	-1.8	-1.1		
$\Sigma$	33.7	106.4	-140.1	118.8	-74.3	-44.5	-22.4	-36.3

مثال (5-10):

استخدم طريقة توزيع العزوم من أجل حساب ردود أفعال المساند، ثم ارسم كلاً من مخطط عزم الانعطاف والشكل المتشوه للمنشأ المبين بالشكل (5-31).



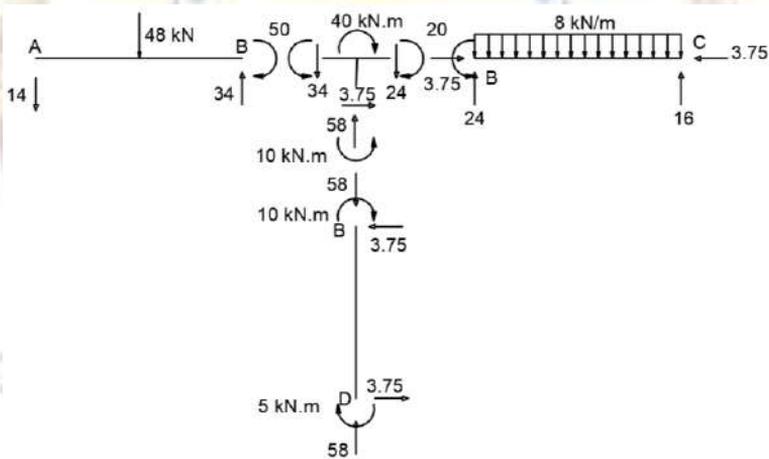
الشكل (5-31)

إنّ عملية توزيع العزوم موضحة في الجدول (5-4).

الجدول (5-4)

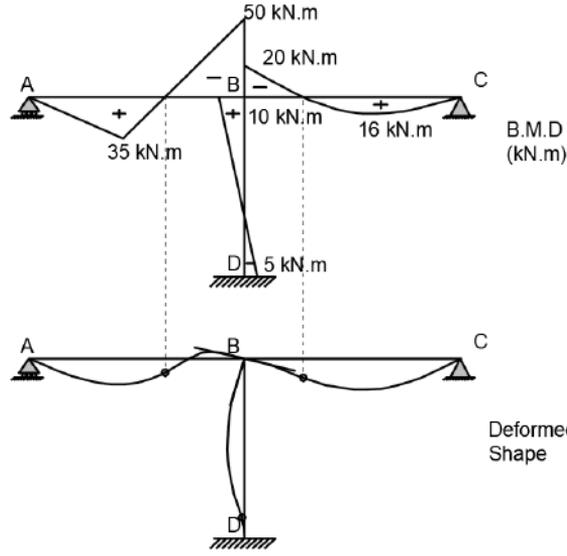
العقدة	A	B			D	C
العنصر	AB	BA	BC	BD	DB	CB
Df	0	0.25	0.25	0.5		0
توزيع العزم		10	10	20		
Co.					10	
FEM		45	-25			
UM		-20				
Dist.		-5	-5	-10		
Co.					-5	
$\Sigma$	0	50	-20	10	5	0

بدراسة ردود الأفعال يتم الحصول على القيم في الشكل (5-32).



الشكل (5-32)

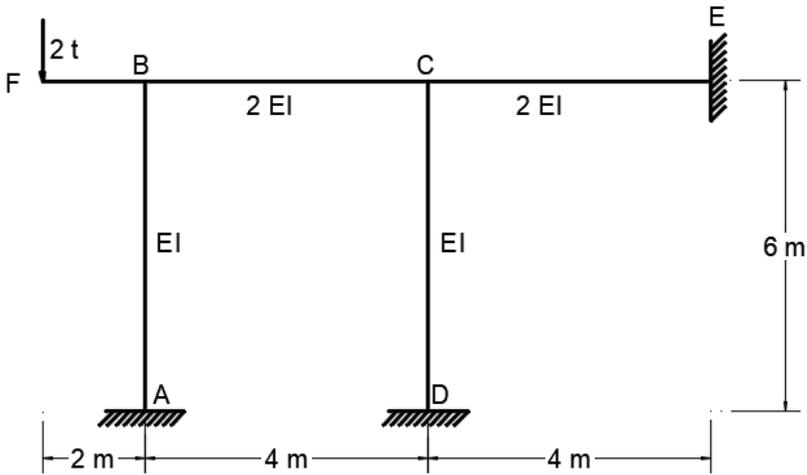
وبالتالي يكون مخطط عزم الانعطاف، والشكل المتشوه كما هو مبين بالشكل (5-33).



الشكل (33-5)

مثال (5-11):

أوجد العزوم في عقد الإطار المبين بالشكل (34-5) بطريقة توزيع العزوم ثم ارسم مخطط عزم الانعطاف.



الشكل (34-5)

عوامل توزيع العقدة B:

$$(DF)_{BC} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{2}{4} + \frac{1}{6}} = 0.75 \quad (DF)_{BA} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{4} + \frac{1}{6}} = 0.25$$

عوامل توزيع العقدة C:

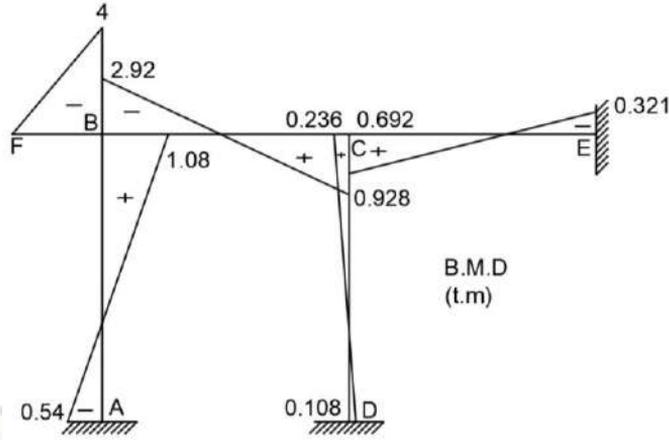
$$(DF)_{CB} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{2}{4} + \frac{1}{6} + \frac{2}{4}} = 0.428 \quad (DF)_{CD} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{4} + \frac{1}{6} + \frac{2}{4}} = 0.144$$

$$(DF)_{CE} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{2}{4} + \frac{1}{6} + \frac{2}{4}} = 0.428$$

وتكون عملية توزيع العزوم كما في الجدول (5-5).

الجدول (5-5)

العقدة	C			B			D	A	E
العنصر	CB	CD	CE	BA	BC	BF	DC	AB	EC
Df	0.428	0.144	0.428	0.25	0.75	0	0	0	0
عزم خارجي						4			
Dist.				-1	-3				
Co.	-1.5							-0.5	
Dist.	0.642	0.216	0.642						
Co.				0	0.321	0	0.108	0	0.321
Dist.				-0.08	-0.241	0	0	0	0
Co.	-0.12	0	0	0	0	0	0	-0.04	
Dist.	0.05	0.02	0.05						
∑	-0.928	0.226	0.692	1.08	-2.92	4	0.108	-0.54	0.321

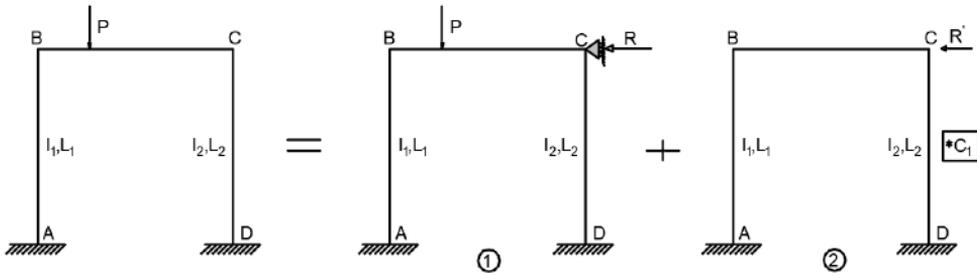


الشكل (5-35)

### 2-5-5 طريقة توزيع العزوم في الإطارات بوجود حركة جانبية

#### Frames with Sidesway

كما تم تبيانه في طريقة الانتقال والدوران في حالة الإطارات ذات الحركة الجانبية، فإن العزوم الموجودة في العقد ناتجة عن الحملات الخارجية وعن دوران العقد، وعن انتقال العقد الذي يُسبب بدوره انتقالاً إضافياً؛ (حيث يتم إهمال التشوهات المحورية فيكون هناك انتقال وحيد لكل طابق من الإطارات)؛ وبالتالي يجب إدخال أثر العزوم الناتجة عن الانتقال في طريقة توزيع العزوم في حالة الإطارات ذات الحركة الجانبية، وذلك عن طريق عزوم الوثق الناتجة عن الانتقال  $\Delta$ . لكي لا يحصل تعقيد في الحسابات سيتم الاستعانة بمبدأ تنضد الآثار. أي يتم توزيع العزوم على مرحلتين، مرحلة أولى يتم فيها توزيع العزوم الناتجة عن الحملات الخارجية بصيغة عزوم الوثق  $FEM_{Loads}$ ، ومرحلة ثانية يتم فيها توزيع العزوم الناتجة عن الانتقال  $\Delta$  بصيغة عزوم الوثق في الأعمدة  $FEM_{\Delta}$ . ثم يتم جمع هاتين القيمتين ليُصار إلى الحصول على المنشأ الحقيقي بعزوم حقيقية في العقد.



الشكل (5-36)

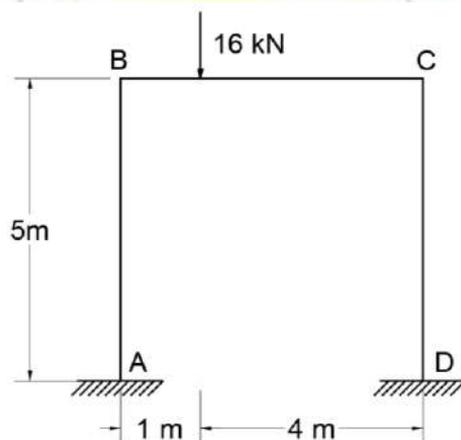
بما أن قيمة الانتقال  $\Delta$  مجهولة فسيتم فرض قيمة معينة لعزوم الوثق الناتجة عن الانتقال، ثم يتم إيجاد النسبة من معادلة تتصد الآثار. يبين الشكل (5-36) مراحل العمل؛ حيث يتم في المرحلة (1) توزيع العزوم الناتجة عن الأحمال الخارجية؛ وبإهمال الانتقال الجانبي وذلك بمنع الحركة الأفقية بواسطة المسند في C، بينما يتم توزيع العزوم الناتجة عن الانتقال الجانبي  $\Delta$  بدون أحمال في المرحلة (2) ولتحقق المجموع يجب تحقيق المعادلة (5-9).

$$R + C_1 R' = 0 \quad (9-5)$$

يمكن فرض أي قيمة اعتباطية لعزم الوثق الناتج عن الانتقال  $FEM_{\Delta}$  لأن  $C_1$  تتغير بحسب  $FEM_{\Delta}$ ، ويتم الحصول على نفس النتيجة بالنهاية. إذا كانت قيم العطالة والطول  $I, L$  مختلفة بين الأعمدة عندئذٍ تختلف قيم عزوم الوثق  $FEM_{\Delta}$  لذلك يتم أخذ النسبة بينها كما سيتم شرحه لاحقاً.

**مثال (5-12):**

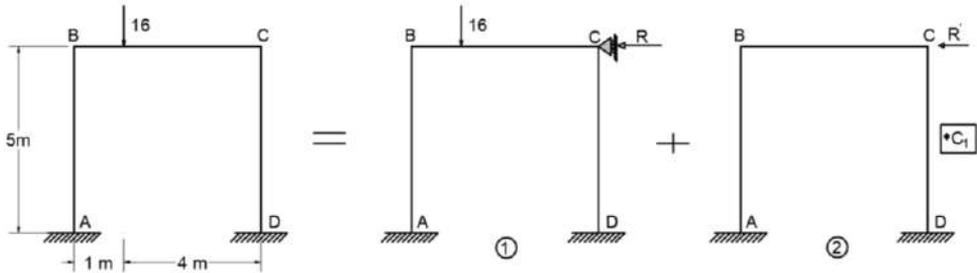
استخدم طريقة توزيع العزوم من أجل إيجاد ردود أفعال المساند، ثم رسم مخططي عزم الانعطاف والشكل المشوه في الإطار المبين بالشكل (5-37) علماً بأن  $EI$  ثابتة.



الشكل (5-37)

$$\text{عزوم الوثق: } M_{BC}^F = \frac{Pa^2b}{L^2} = 10.24 \text{ kN.m} \quad M_{CB}^F = \frac{Pab^2}{L^2} = 2.56 \text{ kN.m}$$

بحسب مبدأ تتصد الآثار تتم تجزئة العمل إلى مرحلتين مرحلة أولى خاصة بالحمولات حيث يتم تطبيق مسند وهمي يمنع الحركة في C، ومرحلة ثانية خاصة بالانتقال الجانبي بدون أحمال خارجية، الشكل (5-38).



الشكل (38-5)

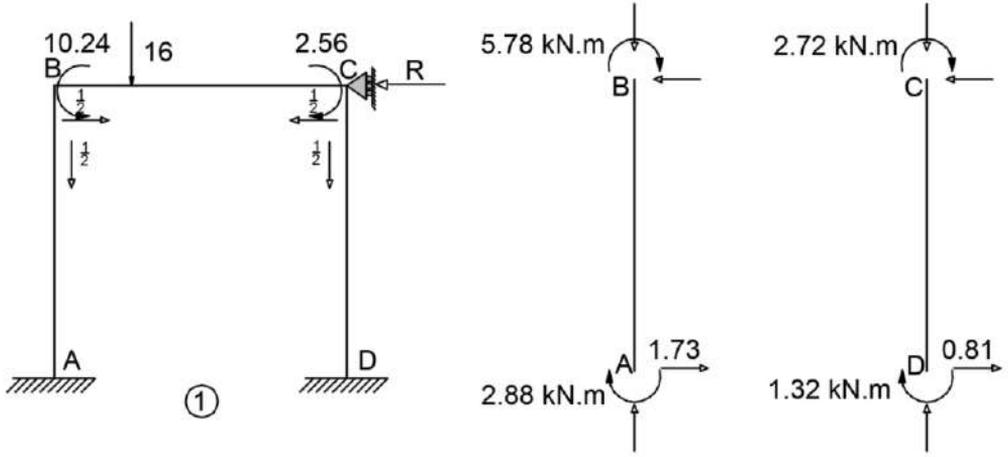
• المرحلة الأولى وتتضمن توزيع العزوم للجملة (1):

بعد عملية توزيع العزوم يتم حساب قيم ردود الأفعال الأفقية  $H_A, H_D$  من توازن كل عمود على حدة، ثم يتم إيجاد قيمة  $R$  من توازن الجملة (1) كاملة.

عملية توزيع العزوم للجملة (1) موضحة في الشكل (39-5).

	A	B	C	D	
DF	0	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	0	
EEM <sub>load</sub>		-10.24	2.56		
1 <sup>st</sup> Dist.		5.12	5.12	-1.28	-1.28
Co	2.56	-0.64	2.56	0.64	
2 <sup>nd</sup> Dist.		0.32	0.32	-1.28	-1.28
Co	0.16	-0.64	0.16	0.64	
3 <sup>rd</sup> Dist.		0.32	0.32	-0.08	-0.08
Co	0.16	-0.04	0.16	-0.04	
4 <sup>th</sup> Dist.		0.02	0.02	-0.08	-0.08
$\Sigma$ kN.m	2.88	5.78	-5.78	2.72	-2.72

الشكل (39-5)



الشكل (40-5)

$$H_A = \frac{2.88 + 5.78}{5} = 1.73 \text{ kN} \quad H_D = \frac{2.72 + 1.32}{5} = 0.81 \text{ kN}$$

ومن توازن الجملة (1) يكون:

$$\rightarrow: \sum F_x = 0 \Rightarrow H_A + H_D + R = 0 \Rightarrow 1.73 - 0.81 + R = 0 \Rightarrow R = -0.92 \text{ kN} \leftarrow$$

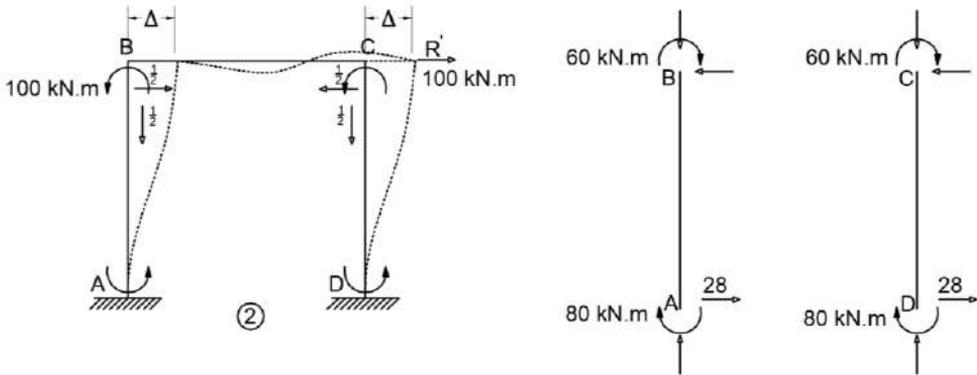
• المرحلة الثانية وتتضمن توزيع العزوم للجملة (2):

في هذه الجملة تتزاح كل من العقدة B و C وفق الانتقال  $\Delta$ ، وذلك بإهمال التشوهات المحورية، وبما أن EI ثابتة وأطوال الأعمدة واحدة تكون عزوم الوثق الناتجة عن الانتقال  $\Delta$  ثابتة في كل من العمودين. بفرض قيمة اعتبارية ولنكن  $FEM_{\Delta} = 100 \text{ kN.m}$ . يتم توزيع العزوم من أجل العزوم الافتراضية الناتجة عن الانتقال  $\Delta$  وتُحسب  $R'$  بنفس الطريقة، ثم يتم إيجاد قيمة  $C_1$  من المعادلة (9-5).

عملية توزيع العزوم للجملة (2) موضحة في الشكل (41-5).

	A	B	C	D
DF	0	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	0
FEM <sub>load</sub>	-100	-100	-100	-100
1 <sup>st</sup> Dist.		+50	+50	+50
Co	25	25	25	25
2 <sup>nd</sup> Dist.		-12.5	-12.5	-12.5
Co	-6.5	-6.5	-6.5	-6.5
3 <sup>rd</sup> Dist.		3.125	3.125	3.125
Co	1.56	1.56	1.56	1.56
4 <sup>th</sup> Dist.		-0.78	-0.78	-0.78
Co	0.39	0.39	0.39	0.39
5 <sup>th</sup> Dist.		0.195	0.195	0.195
$\Sigma$ kN.m	-80	-60	60	-80

الشكل (41-5)



الشكل (42-5)

بدراسة توازن كل عمود على حدة من الشكل (42-5).

$$H_A = \frac{80+60}{5} = 28kN = H_D$$

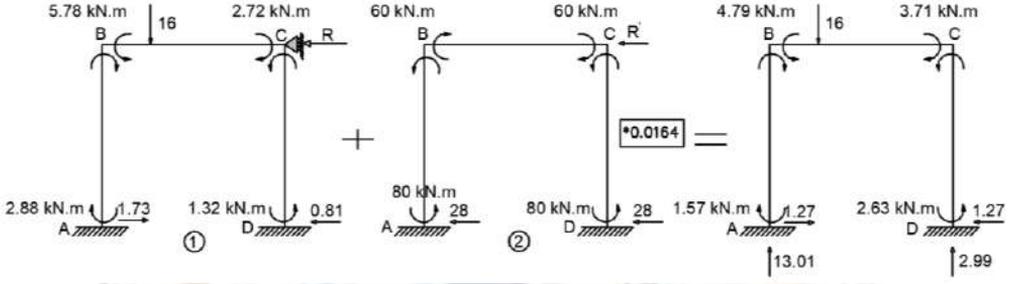
ثم بدراسة توازن القوى الأفقية في كامل الجملة (2):

$$\rightarrow: \sum F_x = 0 \Rightarrow H_A + H_D + R' = 0 \Rightarrow -28 - 28 + R' = 0 \Rightarrow R' = +56kN \rightarrow$$

بالتعويض في المعادلة (9-5):

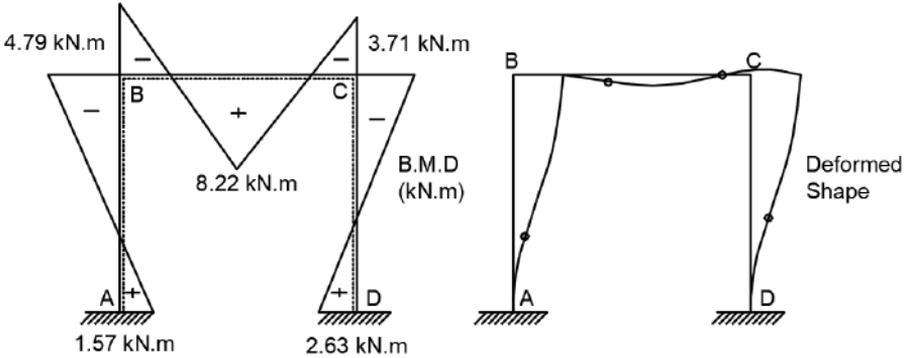
$$R + C_1 R' = 0 \Rightarrow -0.92 + 56C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0.0164$$

وتكون العزوم في العقد بحسب مبدأ تنضد الأثار موضحة في الشكل (5-43).



الشكل (5-43)

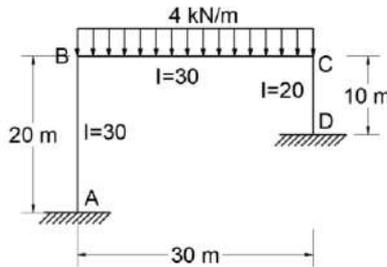
يمكن رسم مخطط عزم الانعطاف والشكل المشوه كما في الشكل (5-44).



الشكل (5-44)

مثال (5-13):

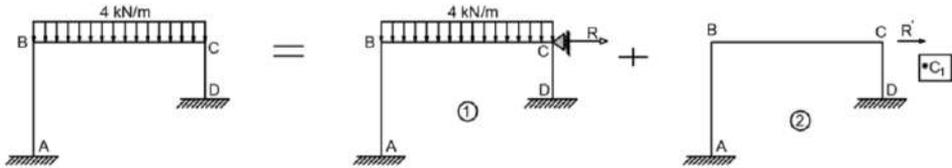
أوجد العزوم في عقد المنشأ المبين بالشكل (5-45)، وذلك بالاعتماد على طريقة توزيع العزوم.



الشكل (5-45)

$$M_{BC}^F = -\frac{WL^2}{12} = -300kN.m \quad M_{CB}^F = \frac{WL^2}{12} = 300kN.m \quad \text{عزوم الوثق:}$$

بحسب مبدأ تنضد الآثار تتم تجزئة العمل إلى مرحلتين مرحلة أولى خاصة بالحمولات؛ حيث يتم تطبيق مسند وهمي يمنع الحركة في C، ومرحلة ثانية خاصة بالانتقال الجانبي بدون أحمال خارجية، الشكل (5-46).

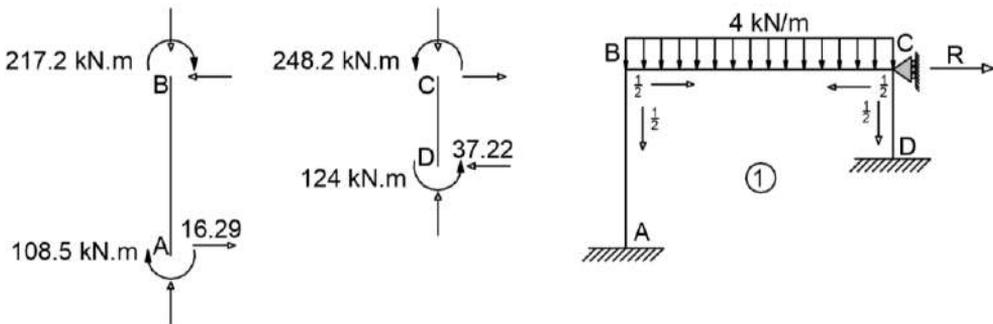


الشكل (5-46)

• عملية توزيع العزوم للجملة (1):

	A	B	C	D
DF	0	0.6 0.4	0.333 0.67	0
FEM <sub>load</sub>		-300	300	
1 <sup>st</sup> Dist.		180 120	-100 -200	
Co	90 ←	-50	60	-100 →
2 <sup>nd</sup> Dist.		30 20	-20 -40	
Co	15 ←	-10	10	-20 →
3 <sup>rd</sup> Dist.		6 4	-3.333 -6.667	
Co	3 ←	-1.667	2	-3.333 →
4 <sup>th</sup> Dist.		1 0.667	-0.667 -1.333	
Co	0.5 ←	-0.333	0.333	0.667 →
4 <sup>th</sup> Dist.		0.2 0.133	-0.111 -0.222	
Σ kN.m	108.5	217.2	-217.2	248.2 -248.2

الشكل (5-47)



الشكل (5-48)

بدراسة توازن كل عمود على حدة من الشكل (5-48).

$$H_A = \frac{217.2 + 108.5}{20} = 16.29kN \quad H_D = \frac{248.2 + 124}{10} = 37.22kN$$

ومن توازن الجملة (1) يكون:

$$\rightarrow: \sum F_x = 0 \Rightarrow H_A + H_D + R = 0 \Rightarrow 16.29 - 37.22 + R = 0 \Rightarrow R = 20.93kN \rightarrow$$

• المرحلة الثانية وتتضمن توزيع العزوم للجملة (2):

إن عزوم الوثق الناتجة عن الانتقال  $\Delta$  في الأعمدة غير متساوية بسبب اختلاف العطالة والطول، نعلم أنّ عزم الوثق الناتج عن الانتقال يساوي:

$$M_{BA}^F = \frac{6EI_1\Delta}{L_1^2} = M_{AB}^F \quad M_{CD}^F = \frac{6EI_2\Delta}{L_2^2} = M_{DC}^F$$

بنسبة المعادلتين إلى بعضهما:

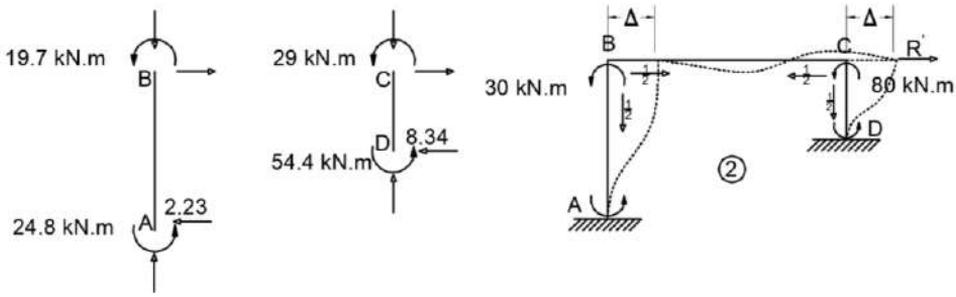
$$\frac{M_{BA}^F}{M_{CD}^F} = \frac{I_1/L_1^2}{I_2/L_2^2} = \frac{30/20^2}{20/10^2} = \frac{3}{8}$$

بفرض قيمة اعتباطية لعزم الوثق  $M_{CD}^F = -80kN.m$  فيكون  $M_{BA}^F = -30kN.m$

يتم توزيع هذه العزوم الافتراضية على الجملة (2) كما في الشكل (5-49) علماً بأن قيم عوامل التوزيع Distribution Factors لا تختلف عن الجملة (1).

	A	B	C	D
DF	0	0.6   0.4	0.333   0.667	0
FEM <sub>load</sub>	-30	-30   0	0   -80	-80
1 <sup>st</sup> Dist.		+18   +12	+26.667   +53.333	
Co	+9		+13.33   +6	+26.667
2 <sup>nd</sup> Dist.		-8   -5.333	-2   -4	
Co	-4		-1   -2.667	-2
3 <sup>rd</sup> Dist.		+0.6   +0.4	+0.888   +1.778	
Co	+0.3		+0.444   +0.2	0.888
4 <sup>th</sup> Dist.		-0.267   -0.178	-0.0667   -0.1333	
Σ kN.m	-24.8	-19.7   +19.7	+29   -29	-54.4

الشكل (5-49)



الشكل (50-5)

بدراسة توازن كل عمود على حدة من الشكل (50-5).

$$H_A = \frac{19.7 + 24.8}{20} = 2.23 \text{ kN} \quad H_D = \frac{29 + 54.4}{10} = 8.34 \text{ kN}$$

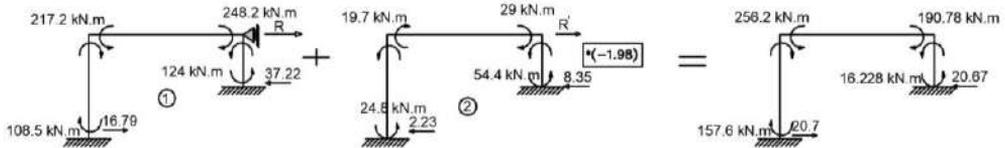
ثم بدراسة توازن القوى الأفقية في كامل الجملة (2):

$$\rightarrow: \sum F_x = 0 \Rightarrow H_A + H_D + R' = 0 \Rightarrow -2.23 - 8.34 + R' = 0 \Rightarrow R' = +10.57 \text{ kN} \rightarrow$$

بالتعويض في المعادلة (9-5):

$$R + C_1 R' = 0 \Rightarrow 20.93 + 10.57 C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -1.98$$

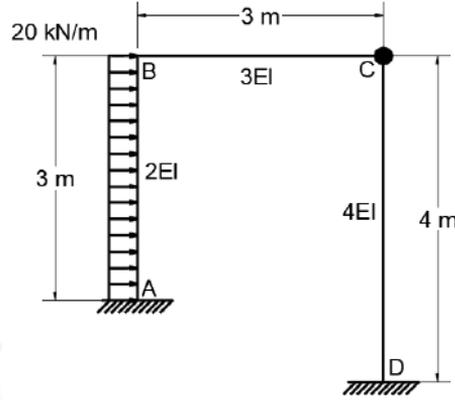
وتكون العزوم في العقد بحسب مبدأ تنضد الأثار موضحة في الشكل (51-5).



الشكل (51-5)

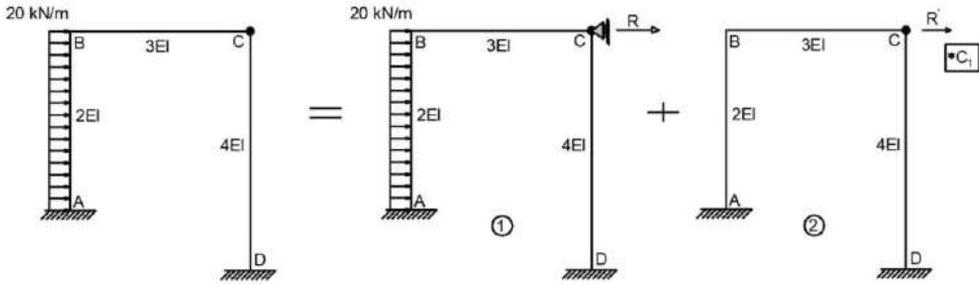
مثال (5-14):

استخدم طريقة توزيع العزوم من أجل إيجاد ردود أفعال المساند ثم رسم مخططي عزم الانعطاف والشكل المتشوه في الإطار المبين بالشكل (52-5) علماً بأن  $EI$  غير ثابتة.



الشكل (52-5)

بحسب مبدأ تنضد الآثار تتم تجزئة العمل إلى مرحلتين مرحلة أولى خاصة بالحمولات حيث يتم تطبيق مسند وهمي يمنع الحركة في C، ومرحلة ثانية خاصة بالانتقال الجانبي بدون أحمال خارجية، الشكل (5-53).



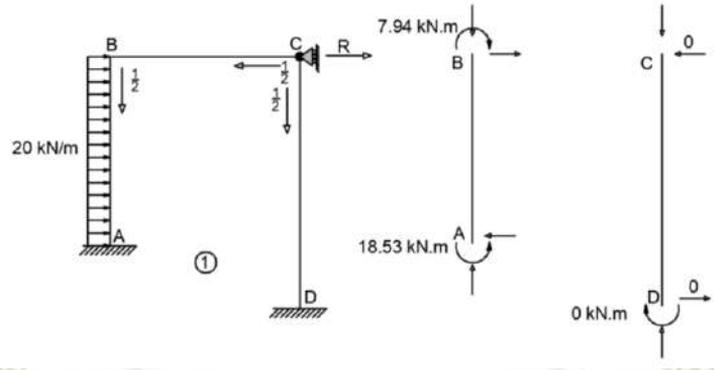
الشكل (53-5)

• المرحلة الأولى وتتضمن توزيع العزوم للجملة (1):

بعد عملية توزيع العزوم يتم حساب قيم ردود الأفعال الأفقية  $H_A, H_D$  من توازن كل عمود على حدة، ثم يتم إيجاد قيمة  $R$  من توازن الجملة (1) كاملة. عملية توزيع العزوم للجملة (1) موضحة في الشكل (54-5).

	A	B	C	D
DF	0	0.471 0.529	1 1	0
FEM <sub>load</sub>	-15	15 0	0 0	0
1 <sup>st</sup> Dist.		-7.065 7.935		
Co.	-3.533			
$\Sigma$ kN.m	-18.53	7.94 -7.94		

الشكل (54-5)



الشكل (55-5)

حساب القوى الأفقية لكل عمود على حدة من الشكل (55-5).

$$H_A = 30 + \frac{18.53 - 7.94}{3} = 33.53 \text{ kN} \quad H_D = 0 \text{ kN}$$

ومن توازن الجملة (1) يكون:

$$\rightarrow: \sum F_x = 0 \Rightarrow W + H_A + H_D + R = 0 \Rightarrow 60 - 33.53 - 0 + R = 0 \Rightarrow R = -26.47 \text{ kN} \leftarrow$$

• المرحلة الثانية وتتضمن توزيع العزوم للجملة (2):

إن عزوم الوثق الناتجة عن الانتقال  $\Delta$  في الأعمدة غير متساوية بسبب اختلاف العطالة والطول، والعمود AB موثوق من الطرفين بينما العمود CD موثوق ومسنود.

$$M_{BA}^F = \frac{6EI_1\Delta}{L_1^2} = M_{AB}^F \quad M_{DC}^F = \frac{3EI_2\Delta}{L_2^2}, M_{CD}^F = 0$$

بنسبة المعادلتين إلى بعضهما:

$$\frac{M_{BA}^F}{M_{DC}^F} = \frac{2I_1 / L_1^2}{I_2 / L_2^2} \Rightarrow M_{DC}^F = 0.5625M_{BA}^F$$

بفرض قيمة اعتبارية لعزم الوثق  $M_{BA}^F = 100kN.m$  فيكون  $M_{DC}^F = 56.25kN.m$  يتم توزيع هذه العزوم الافتراضية على الجملة (2) كما في الشكل (56-5).

	A	B	C	D
DF	0	0.471 0.529	1 1	0
FEM <sub>load</sub>	-100	-100		
1 <sup>st</sup> Dist.		+47.1 +52.9		
Co	+28.55			
Σ kN.m	-76.45	-52.9 +52.9		

الشكل (56-5)

دراسة كل عمود على حدة مبيّنة بالشكل (57-5).

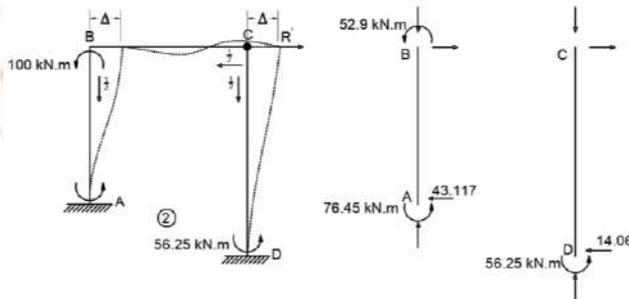
$$H_A = \frac{76.45 + 52.9}{3} = 43.117kN \quad H_D = \frac{56.25}{4} = 14.06kN$$

ثم بدراسة توازن القوى الأفقية في كامل الجملة (2):

$$\rightarrow: \sum F_x = 0 \Rightarrow H_A + H_D + R' = 0 \Rightarrow -43.12 - 14.06 + R' = 0 \Rightarrow R' = +57.18kN \rightarrow$$

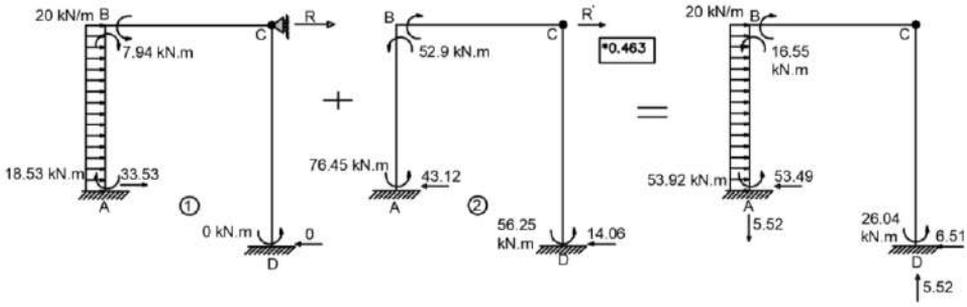
بالتعويض في المعادلة (9-5):

$$R + C_1 R' = 0 \Rightarrow -26.47 + 57.18 C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0.463$$



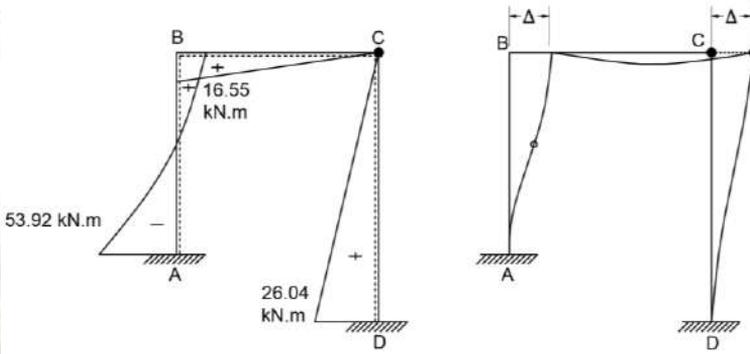
الشكل (57-5)

وتكون القيم النهائية لعزوم العقد وردود الأفعال مبيّنة بالشكل (58-5).



الشكل (58-5)

يتم رسم مخططات عزم الانعطاف والشكل المتشوه فتكون كما في الشكل (59-5).

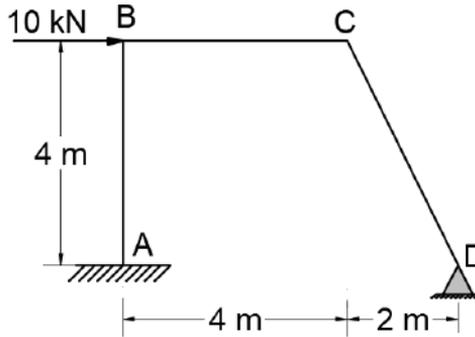


الشكل (59-5)

5-6 أمثلة على تحليل الإطارات ذات الأعمدة المائلة بطريقة توزيع العزوم:

مثال (5-15):

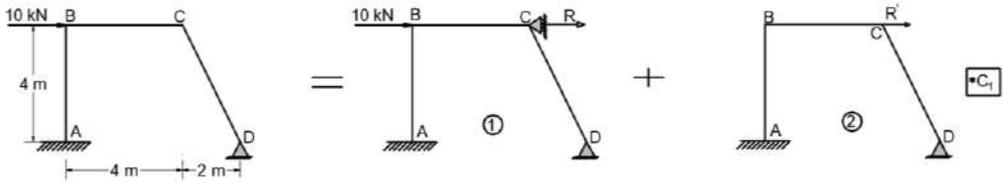
أوجد قيم العزوم في عقد الإطار الميّن بالشكل (60-5)، ثم ارسم مخطط عزم الانعطاف والشكل المتشوه.



الشكل (60-5)

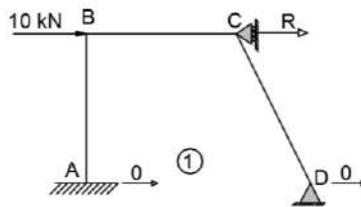
بحسب مبدأ تتضد الآثار ممكن مكافأة الإطار بإطارين كما في الشكل (5-61)، بحيث يحمل الأول الأحمال الخارجية مع عدم السماح لانتقال جانبي بينما يُسمح للانتقال الجانبي في الثاني، وتتحقق المعادلة (5-9).

$$R + C_1 R' = 0 \quad (9-5)$$



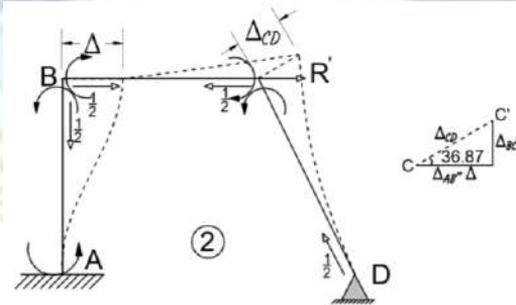
الشكل (5-61)

• حساب R للجملة (1):



الشكل (5-62)

$$\rightarrow: \sum F_x = 0; \quad 10 + R = 0; \quad R = -10 \text{ kN}$$



الشكل (5-63)

• دراسة الجملة رقم (2):

بفرض عزم الوثق الناتج عن الانتقال في العنصر AB يساوي:

$$M_{AB}^F = M_{BA}^F = -100 \text{ kN.m}$$

حيث تكون معادلات عزوم الوثق الناتجة عن الانتقالات:

$$M_{AB}^F = M_{BA}^F = \frac{6EI\Delta_{AB}}{4^2} \quad \text{-العنصر AB موثوق من الطرفين:}$$

$$M_{CB}^F = M_{BC}^F = \frac{6EI\Delta_{BC}}{4^2} \quad \text{-العنصر BC موثوق من الطرفين:}$$

$$M_{CD}^F = M_{DC}^F = \frac{3EI\Delta_{CD}}{5^2} \quad \text{-العنصر CD موثوق ومسنود:}$$

بحسب الشكل (5-63) يكون:

$$\Delta_{BC} = \Delta \times \text{tg}36.87^\circ = 0.75\Delta$$

$$\Delta_{CD} = \frac{\Delta}{\cos 36.87} = 1.25\Delta$$

وتكون نسب عزوم الوثق:

$$\frac{M_{BC}^F}{M_{AB}^F} = \frac{6EI(0.75\Delta)/4^2}{6EI\Delta/4^2} = 0.75$$

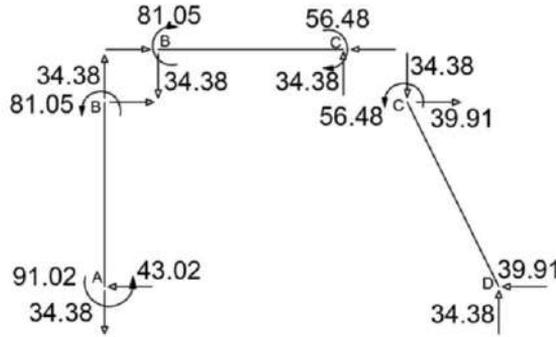
$$\frac{M_{CD}^F}{M_{AB}^F} = \frac{3EI(1.25\Delta)/5^2}{6EI\Delta/4^2} = 0.4$$

$$M_{CD}^F = 0.4M_{AB}^F = -40 \text{ kN.m}$$

إن عملية توزيع العزوم موضحة في الشكل (5-64).

	A	B	C	D		
DF	0	0.5	0.5	0.625	0.375	1
FEM <sub>load</sub>	-100	-100	75	75	-40	0
1 <sup>st</sup> Dist.		12.5	12.5	-21.875	-13.125	
Co	6.25		-10.938	6.25		
2 <sup>nd</sup> Dist.		5.469	5.469	-3.906	-2.344	
Co	2.735		-1.953	2.735		
3 <sup>rd</sup> Dist.		0.977	0.977	-1.709	-1.026	
Σ kN.m	-91.02	81.05	81.05	56.48	-56.48	

الشكل (5-64)



الشكل (65-5)

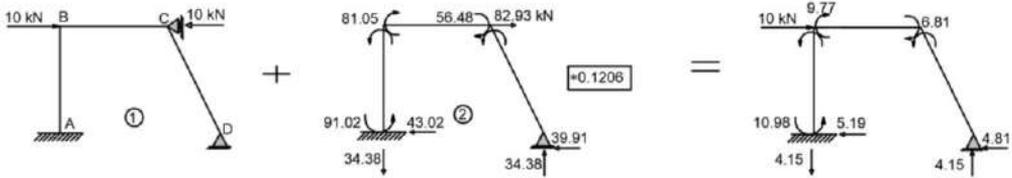
بأخذ توازن القوى الأفقية يتم الحصول على قيمة  $R'$  :

$$\rightarrow: \sum F_x = 0; \quad H_A + H_D + R' = 0 \Rightarrow -43.02 - 39.91 + R' = 0; R' = 83.93 \text{ kN}$$

بتعويض كل من قيمة  $R$  و  $R'$  في المعادلة (9-5) :

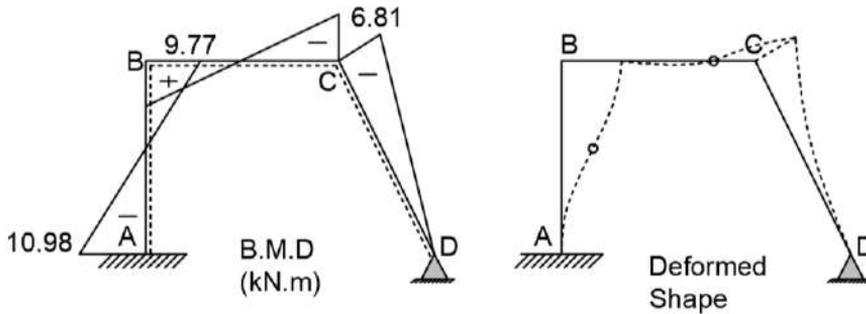
$$-10 + C_1(82.93) = 0 \Rightarrow C_1 = 0.1206$$

يتم الحصول على العزوم النهائية بتطبيق مبدأ تتضد الآثار كما هو موضح في الشكل (66-5).



الشكل (66-5)

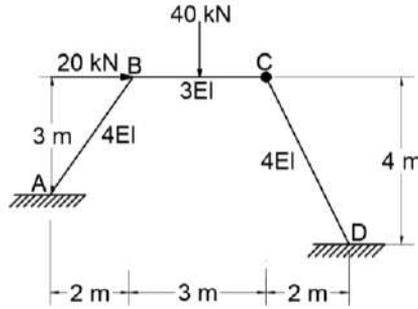
ويكون مخطط عزم الانعطاف والشكل المشوه موضحان بالشكل (67-5).



الشكل (67-5)

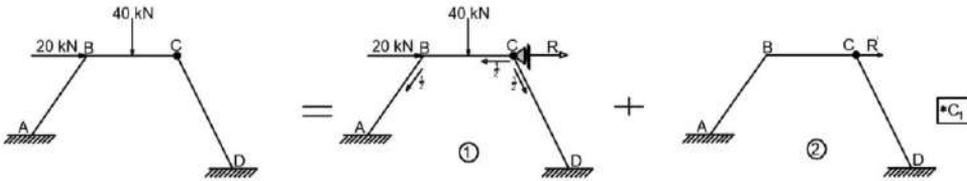
مثال (5-16):

أوجد ردود أفعال الوثاقات وعزوم العقد في الإطار المبين في الشكل (5-68)، ثم ارسم مخطط عزم الانعطاف والشكل المشوه، وذلك بالاعتماد على طريقة توزيع العزوم.



الشكل (5-68)

بحسب مبدأ تنضد الأثار يتم مكافأة الإطار الأصلي بالإطارين المبينين بالشكل (5-69)، حيث يتم تحقيق المعادلة (5-9)،  $R + C_1 R' = 0$ .



الشكل (5-69)

• دراسة الجملة رقم (1):

$$M_{BC}^F = \frac{PL}{8} + \frac{1}{2} \frac{PL}{8} = 22.5 \text{ kN.m} \quad \text{عزوم الوثق للجملة (1) } FEM_{\text{Loads}}$$

	A	B	C	D
DF	0	0.6 0.4	1 1	0
FEM <sub>load</sub>		-22.5	0 0	0
1 <sup>st</sup> Dist		13.5 9		
Co.	6.75			
Σ kN.m	6.75	13.5 -13.5		

الشكل (5-70)

بتنزيل العزوم في العقد يكون مخطط الجسم الحر Free Body Diagram موضحاً بالشكل (5-71).

$$\rightarrow: \sum F_x = 0 \Rightarrow 23.08 + 20 - 7.75 + R' = 0 \Rightarrow R' = -35.33 \text{ kN} \leftarrow$$

• الجملة رقم (2):

بفرض عزم الوتق الناتج عن الانتقال في العنصر AB يساوي:

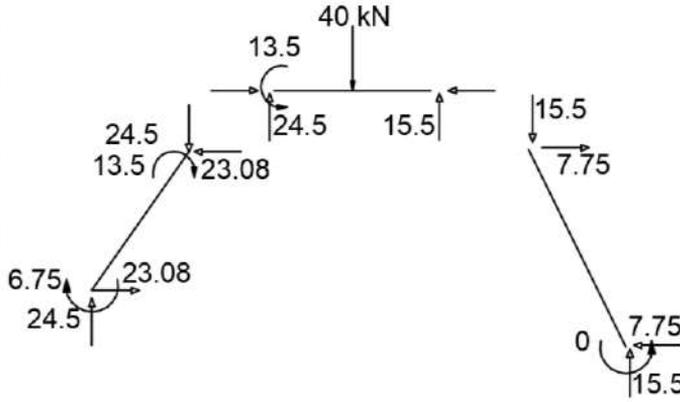
$$M_{AB}^F = M_{BA}^F = -100 \text{ kN.m}$$

بحسب الشكل (5-72) يكون:

$$\Delta_{AB} = \frac{\Delta}{\cos 33.69^\circ} = 1.2\Delta$$

$$\Delta_{BC} = B'C' = \Delta \times \text{tg} 26.57^\circ + \Delta \times \text{tg} 33.69^\circ = 1.17\Delta$$

$$\Delta_{CD} = \frac{\Delta}{\cos 26.57^\circ} = 1.12\Delta$$



الشكل (5-71)

وتكون معادلات عزوم الوتق الناتجة عن الانتقالات:

-العنصر AB موثوق من الطرفين:

$$M_{AB}^F = M_{BA}^F = \frac{6 \times 4EI(1.2\Delta)}{3.61^2} = 2.21EI\Delta$$

-العنصر BC موثوق ومسنود:

$$M_{CB}^F = M_{BC}^F = \frac{3 \times 3EI(1.17\Delta)}{3^2} = 1.17EI\Delta$$

-العنصر CD موثوق ومسنود:

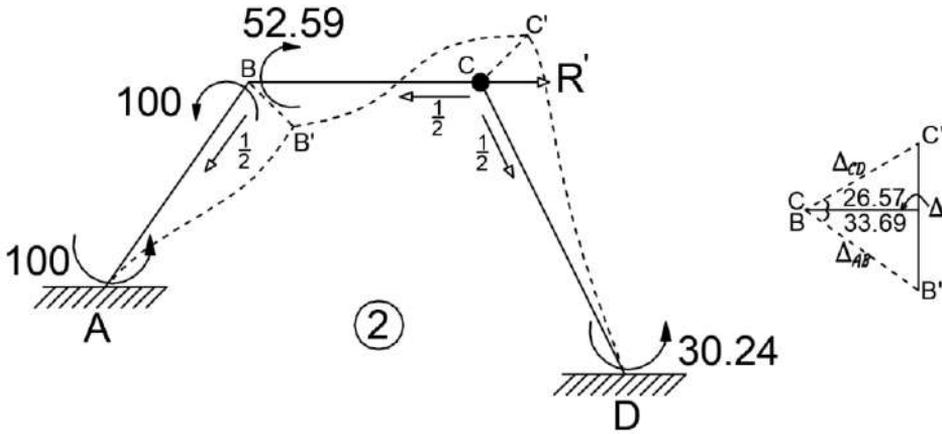
$$M_{CD}^F = M_{DC}^F = \frac{3 \times 4EI(1.12\Delta)}{4.472^2} = 0.672EI\Delta$$

وتكون نسب عزوم الوثق:

$$M_{BC}^F = 0.5259M_{AB}^F = 52.59kN.m$$

$$M_{DC}^F = 0.3024M_{AB}^F = 30.249kN.m$$

توزيع العزوم موضح في الشكل (5-73).



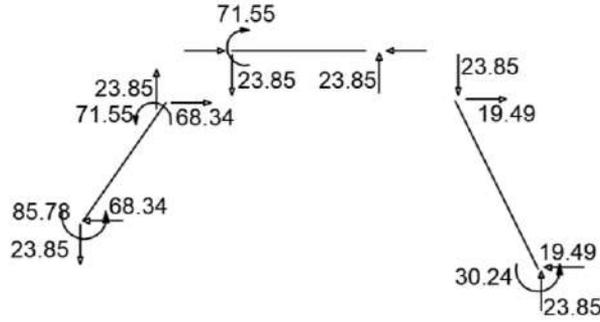
الشكل (5-72)

	A	B	C	D
DF	0	0.6   0.4	1   1	0
FEM <sub>load</sub>	-100	-100   52.59	0   0	-30.24
1 <sup>st</sup> Dist.		28.45   18.96		
Co.	14.22			
Σ kN.m	-85.78	-71.55   71.55		-30.24

الشكل (5-73)

$$\rightarrow: \sum F_x = 0 \Rightarrow -68.34 - 19.49 + R' = 0 \Rightarrow R' = 87.83kN \rightarrow$$

ويكون مخطط الجسم الحر للجملة رقم (2) مبيئاً بالشكل (5-74).

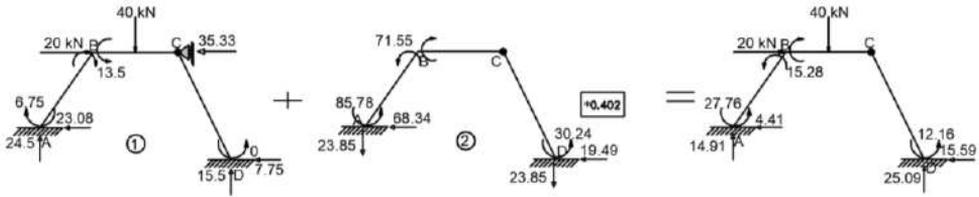


الشكل (5-74)

بتعويض كل من قيمة R و R' في المعادلة (5-9):

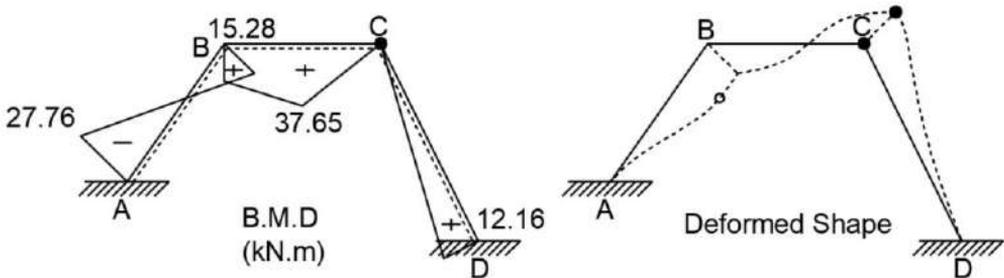
$$-35.33 + C_1(87.83) = 0 \Rightarrow C_1 = 0.4023$$

يتم الحصول على العزوم النهائية بتطبيق مبدأ تتضد الآثار كما هو موضَّح في الشكل (5-75).



الشكل (5-75)

ويكون مخطط عزم الانعطاف والشكل المتشوه موضَّحين بالشكل (5-76).



الشكل (5-76)



## الفصل السادس

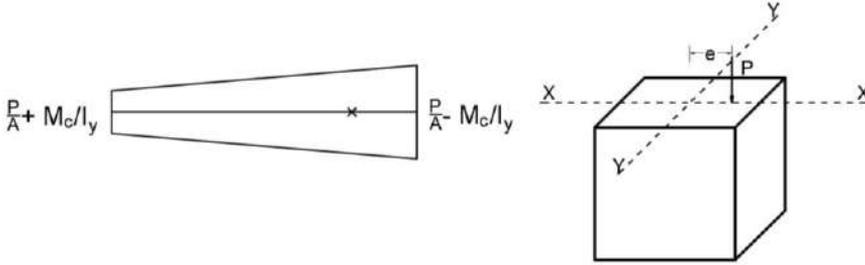
### Column Analogy التشبيه العمودي

#### 1-6 مقدمة:

في هذه الطريقة يتم إيجاد العزوم في منشآت غير مقررة ستاتيكيًا، حيث تستخدم بصورة كبيرة في حساب الصلابات وعوامل التوزيع في الجوائز متغيرة المقطع. في هذه الطريقة يتم الربط بين العزوم في هذه المنشآت وبين أعمدة قصيرة (غير نحيفة) محملة بشكل لا مركزي. إنَّ طريقة التشبيه العمودي هي المشاركة الثانية في عالم حساب الإنشاءات من قبل Hardy Cross، ويمكن تطبيقها على منشآت غير مقررة من الدرجة الأولى والثانية والثالثة فقط، وتتضمن أيضاً الجوائز الموثوقة من الطرفين والأقواس والإطارات وحيدة المجاز، وكذلك الصناديق المغلقة. إنَّ الاستعمال الأكثر شيوعاً حالياً هو حساب عوامل توزيع العزوم اللازمة لطريقة توزيع العزوم وكذلك عزوم الوثق FEM.

#### 2-6 مبدأ الطريقة:

يمكن توضيح العمود المقصود بالتشبيه العمودي بالشكل (1-6)، وهو عمود موشوري قصير محمل بجمولة لا مركزية P، ويكون مخطط الإجهاد له كما هو مبين بالشكل (1-6).



الشكل (1-6)

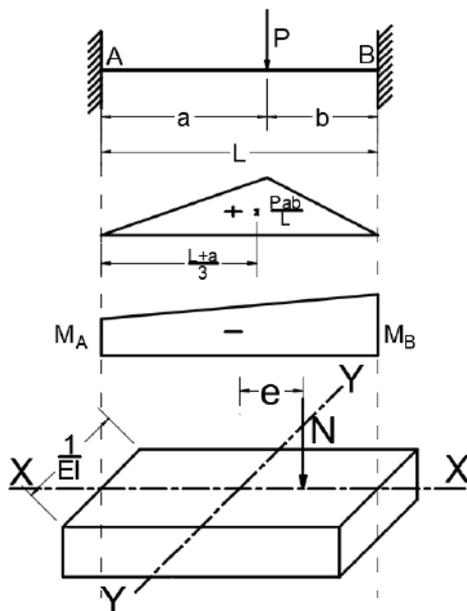
مثلاً من أجل إيجاد عزوم النهايات في الجائز الموثوق من الطرفين المبيّن بالشكل (2-6)، فإنّه يتم استبدال الجائز بعمود قصير ذي مقطع عرضي يشابه الجائز الأصلي وبطول يماثل طوله بينما عرضه في أي مقطع يساوي  $I/EI$ . تتم تجزئة مخطط عزم الانعطاف إلى مخططين أحدهما لجائز بسيط والآخر لعزوم الوثق.

بالاعتماد على طريقة عزم المساحة يمكن القول أنه لا يوجد تغيير في الدوران بين النقطتين A

و B وبالتالي تكون مساحة مخطط  $\frac{M}{EI}$  من النقطة A إلى النقطة B تساوي الصفر

وبالتالي في الجائز المبين بالشكل (2-6) تكون مساحة مخطط عزم الانعطاف  $\theta_{A/B} = \int_A^B \frac{M}{EI} dx = 0$

للجائز البسيط المحمل بالحمولة المركزة مساوية إلى مساحة مخطط عزم الانعطاف الناتج عن عزوم الوثق.



الشكل (2-6)

أيضاً يمكن القول إن الانتقال الشاقولي لإحدى نهايتي الجائز عن النهاية الأخرى يساوي إلى

الصفير وبالتالي يكون عزم مساحة  $\frac{M}{EI}$  حول إحدى النهايتين معدوم  $y_{A/B} = x \int_A^B \frac{M}{EI} dx = 0$  ، وهذا يعني

أن العزم في مخطط العزم للجائز البسيط المحمل بالأحمال الخارجية حول إحدى النهايتين ولتكن B يساوي إلى عزم مخطط عزم الانعطاف الناتج عن عزوم الوثق حول نفس النهاية، وتعبير آخر يمكن القول إن مركز ثقل مخطط عزوم الوثق ينطبق على مركز ثقل مخطط العزوم في الجائز البسيط.

باعتبار عمود قصير تخيلي مبين بالشكل (2-6) مقطعه العرضي  $L \times I/EI$  وطوله يساوي الواحد.

إذا تمّ تحميل هذا العمود بمخطط عزم الانعطاف للجائز البسيط المحمل بالأحمال الخارجية فإنّ توزع الضغط أسفل العمود يكون مساوياً إلى مخطط العزم الناتج عن عزوم الوثق.

إنّ الحمولة اللامركزية N في العمود المشابه تمثل مساحة مخطط عزم الانعطاف للجائز البسيط،

حيث يُعتبر العزم الموجب قوة متجهة للأسفل والعزم السالب قوة متجهة للأعلى. وبالنتيجة يتم تطبيق القوة

N في العمود الشبيه في نقطة تتوافق مع مركز ثقل مخطط العزوم في الجائز البسيط، وتكون الإجهادات الناتجة عن الحمولة اللامركزية N مساوية لعزوم الوثق في الجائز الحقيقي كما في المعادلات (1-6) و(2-6). ويكون العزم الحقيقي في أي نقطة من الجائز الموثوق من الطرفين مساوياً إلى فرق العزمين، عزم الجائز البسيط وعزم الوثق.

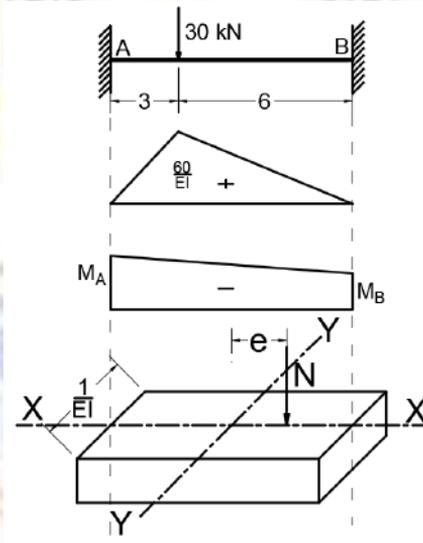
$$M_A = \frac{N}{A} + \frac{N \times e \times y}{I} \quad (1-6)$$

$$M_B = \frac{N}{A} - \frac{N \times e \times y}{I} \quad (2-6)$$

### 3-6 حساب عزوم الوثق بطريقة التشبيه العمودي:

مثال (1-6):

أوجد عزوم الوثق في الجائز المبين بالشكل (3-6) باستخدام طريقة التشبيه العمودي.



الشكل (3-6)

$$M_A = \frac{N}{A} + \frac{N \times e \times y}{I} \quad M_B = \frac{N}{A} - \frac{N \times e \times y}{I}$$

$$N = \frac{1}{2} \times 9 \times \frac{60}{EI} = \frac{270}{EI} \quad A = \frac{L}{EI} = \frac{9}{EI}$$

$$e = \frac{L}{2} - \frac{L+a}{3} = 0.5m$$

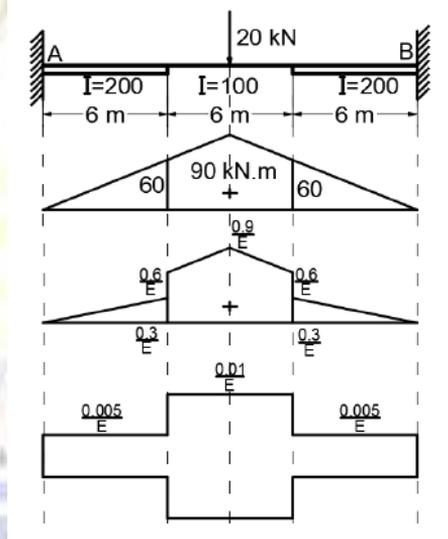
$$I = \frac{L^3}{12EI} = \frac{9^3}{12EI} = \frac{60.75}{EI}, y = \frac{L}{2} = 4.5m$$

$$M_A = \frac{270/EI}{9/EI} + \frac{(270/EI) \times (0.5) \times (4.5)}{60.75/EI} = 40kN.m = \frac{Pab^2}{L^2}$$

$$M_B = \frac{270/EI}{9/EI} - \frac{(270/EI) \times (0.5) \times (4.5)}{60.75/EI} = 20kN.m = \frac{Pa^2b}{L^2}$$

مثال (6-2):

أوجد عزوم الوتق في الجائز المبين بالشكل (4-6) باستخدام طريقة التشبيه العمودي.



الشكل (6-4)

$$N = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{0.3}{E} + 6 \times \frac{0.6}{E} + \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{0.3}{E} = \frac{6.3}{E}$$

$$A = 2 \times 6 \times \frac{0.005}{E} + 6 \times \frac{0.01}{E} = \frac{0.12}{E}$$

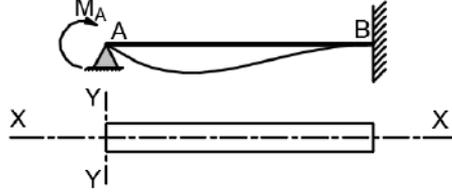
$$e = 0, \quad M_A = M_B = \frac{N}{A} \pm \frac{N \times e \times y}{I} = \frac{6.3/E}{0.12/E} = 52.5kN.m$$

#### 4-6 حساب عوامل النقل وعوامل الصلابة Carry-over and Stiffness Factors

في طريقة توزيع العزوم كانت المقاطع موشورية (ثابتة المقطع)، وبالتالي كان من السهل حساب عوامل النقل وعوامل الصلابة وعزوم الوتق، بينما يمكن حساب هذه القيم بطريقة التشبيه العمودي.

### 6-4-1 حساب عوامل النقل:

يتم افتراض كون النهاية A مفصلية والنهاية B موثوقة، بتطبيق عزم  $M_A$  عند النهاية A يحصل دوران واحد في A، ويتم نشوء عزم في B يساوي إلى جداء عامل النقل بالعزم  $M_A$  أي  $C_{AB}M_A$ .

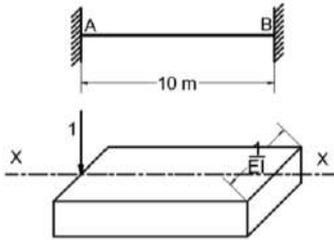


الشكل (5-6)

بما أن الدوران عند النقطة A يساوي إلى الواحد فإن مساحة المخطط  $\frac{M}{EI}$  تساوي إلى الواحد، وبالتالي يمكن تطبيق قوة تساوي إلى الواحد عند النقطة A من العمود الشبيه، ولا يمكن أن تكون في أي مكان آخر؛ ذلك لأنها سوف تعطي عزمًا حول A  $\theta_{A/B} = \int_A^B \frac{M}{EI} dx = 1$ . بما أن النقطة A لا تنتقل شاقولياً بالنسبة للنقطة B فإن عزم مخطط  $\frac{M}{EI}$  حول النقطة A معدوم. يتم إيجاد العزمين في نهايتي العنصر وتكون عوامل النقل عبارة عن النسبة بينهما. إن صلابة المسند معدومة، وبالتالي فإن عزم عطالة هذه النقطة يساوي إلى الصفر ويكون عرض العمود المشابه في هذه النقطة مساوياً إلى اللانهاية، لذلك يتم اعتبار المحور Y يمر من هذه النقطة. يمكن تعريف مفهوم صلابة النهاية بأنها تمثل العزم اللازم لتدوير هذه النهاية بزواوية واحدة عندما تكون النهاية الأخرى موثوقة.

### مثال (3-6):

احسب عوامل النقل من النهاية A إلى النهاية B من الجائز المبين بالشكل (6-6) حيث العطالة ثابتة.



الشكل (6-6)

$$N = 1, \quad A = \frac{10}{EI} \quad I = \frac{L^3}{12EI} = \frac{83.33}{EI}$$

$$e = \frac{L}{2} = 5m \quad y = \frac{L}{2} = 5m$$

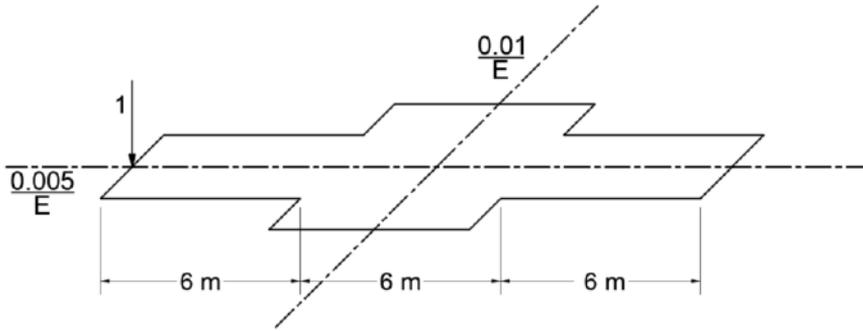
$$M_A = \frac{N}{A} + \frac{N \times e \times y}{I} = \frac{1}{10/EI} + \frac{(1)(5)(5)}{83.33/EI} = 0.4EI$$

$$M_B = \frac{N}{A} - \frac{N \times e \times y}{I} = \frac{1}{10/EI} - \frac{(1)(5)(5)}{83.33/EI} = -0.2EI$$

$$C_{AB} = \frac{-0.2/EI}{0.4/EI} = -0.5 \quad \text{ويكون عامل النقل مساوياً:}$$

مثال (4-6):

أوجد الصلابة في A وعوامل النقل من النهاية A إلى النهاية B من الجائز المبين في الشكل (4-6).



الشكل (7-6)

إنّ العمود الشبيه للجائز المدروس مبين بالشكل (7-6)، وتكون الحسابات كما يلي:

$$N = 1, \quad A = \frac{0.12}{E}, \quad I = \frac{L^3}{12EI} = \frac{1}{12} \left( \frac{0.005}{E} \right) (18)^3 + \frac{1}{12} \left( \frac{0.005}{E} \right) (6)^3 = \frac{2.52}{E}$$

$$e = \frac{L}{2} = 9m \quad y = \frac{L}{2} = 9m$$

$$M_A = \frac{N}{A} + \frac{N \times e \times y}{I} = \frac{1}{0.12/E} + \frac{(1)(9)(9)}{2.52/E} = 40.48E$$

$$M_B = \frac{N}{A} - \frac{N \times e \times y}{I} = \frac{1}{0.12/E} - \frac{(1)(9)(9)}{2.52/E} = -23.81E$$

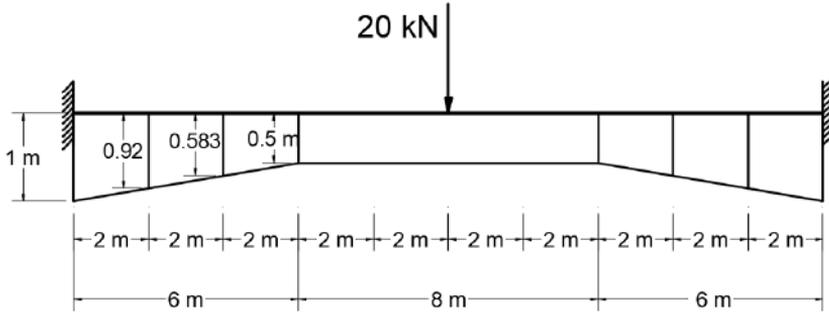
$$C_{AB} = \frac{M_A}{M_B} = \frac{-23.81E}{40.48E} = -0.588$$

$$K_A = K_B = 40.48E$$

بالتناظر

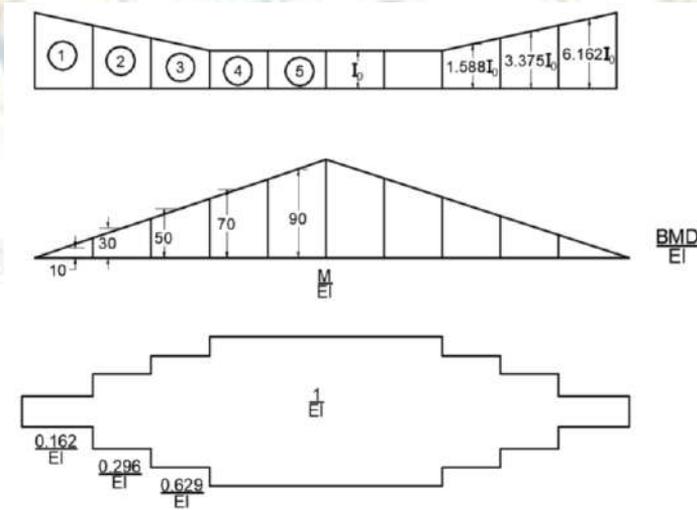
### مثال (5-6):

أوجد الصلابة في A وعوامل النقل من النهاية A إلى النهاية B من الجائز المبين في الشكل (8-6)، إن الجائز متغيّر السماكة بينما عرضه ثابت وقدره 0.5m، قسّم الجائز إلى مقاطع بطول 2m، واحسب قيم العطالة والمساحة (على الرغم من أنه يمكن الحصول على دقة أعلى بالتقسيم إلى مقاطع أصغر).



الشكل (8-6)

يتم حساب العطالات ورسم مخطط عزم الانعطاف مقسوماً على EI والعمود الشبيه، وهذه المخططات كلها موضحة في الشكل (9-6).



الشكل (9-6)

قيم المساحات A والقوى N مبينة بالجدول (1-6).

الجدول (1-6)

N	A	المقطع
$\frac{2(10)}{6.162EI_0} = \frac{3.24}{EI_0}$	$\frac{2(0.162)}{EI_0} = \frac{0.324}{EI_0}$	1
$\frac{2(30)}{3.375EI_0} = \frac{17.8}{EI_0}$	$\frac{2(0.296)}{EI_0} = \frac{0.592}{EI_0}$	2
$\frac{2(50)}{1.588EI_0} = \frac{63}{EI_0}$	$\frac{2(0.629)}{EI_0} = \frac{1.258}{EI_0}$	3
$\frac{2(70)}{EI_0} = \frac{140}{EI_0}$	$\frac{2(1)}{EI_0} = \frac{2}{EI_0}$	4
$\frac{2(90)}{EI_0} = \frac{180}{EI_0}$	$\frac{2(1)}{EI_0} = \frac{2}{EI_0}$	5
$\frac{404.04}{EI_0}$	$\frac{6.174}{EI_0}$	$\Sigma$

$$N = 2 \frac{404.04}{EI_0} = \frac{808.08}{EI_0} \quad A = 2 \frac{6.174}{EI_0} = \frac{12.348}{EI_0}$$

$$I = \frac{L^3}{12EI} = \frac{1}{12} \left( \frac{0.162}{EI_0} \right) (20)^3 + \frac{1}{12} \left( \frac{0.134}{EI_0} \right) (16)^3 + \frac{1}{12} \left( \frac{0.333}{EI_0} \right) (12)^3$$

$$+ \frac{1}{12} \left( \frac{0.371}{EI_0} \right) (8)^3 = \frac{217.3}{EI_0}$$

$$M_A = M_B = \frac{808.08/EI_0}{12.348/EI_0} = 65.4kN.m \quad \text{وتكون عزوم الوثق:}$$

لحساب عوامل النقل والصلابة يتم تطبيق قوة واحدة في A.

$$N=1 \quad e = \frac{L}{2} = 10m$$

$$e = \frac{L}{2} = 9m \quad y = \frac{L}{2} = 9m$$

$$M_A = \frac{N}{A} + \frac{N \times e \times y}{I} = \frac{1}{12.348/EI_0} + \frac{(1)(10)(10)}{217.3/EI_0} = 0.541EI_0$$

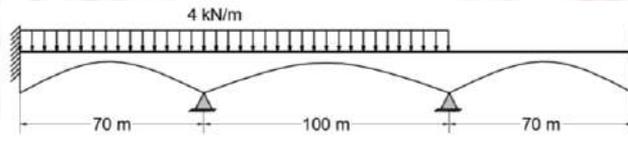
$$M_B = \frac{N}{A} - \frac{N \times e \times y}{I} = \frac{1}{12.348/EI_0} - \frac{(1)(10)(10)}{217.3/EI_0} = -0.379EI_0$$

$$C_{AB} = C_{BA} = \frac{M_A}{M_B} = \frac{-0.379EI_0}{0.541EI_0} = -0.701$$

$$K_A = K_B = 0.541EI_0$$

مثال (6-6):

قم بتوزيع عزوم الوثق من أجل الجائز المبين بالشكل (10-6) والذي تم حساب عوامل النقل والصلابة وعزوم الوثق له وهي معطية بالجدول (2-6).



الشكل (10-6)

جدول (2-6)

	← 0.75	0.78 →	← 0.78	0.75 →	عوامل النقل Co.
	17.1	22.8	22.8	17.1	الصلابة K
	-2100	2100	-4400	4400	عزوم الوثق FEM

إن عملية توزيع العزوم موضحة بالشكل (11-6).

COF	← 0.75		0.78 →	← 0.78		0.75 →
K	17.1		22.8	22.8		17.1
DF	0.43		0.57	0.57		0.43
FEM <sub>load</sub>	-2100	-2100	-4400	4400		0
			-1956	-2508		-1892
	+1372	← 1830	2426	→ 1890		-1419
			-840	-1078		-812
	270	← +360	+480	→ +374		
			-166	-213		-161
	53	← +71	+95	→ +74		
			-33	-42		-32
	+10	← +14	+19	→ +15		
			-7	-9		-6
	+2	← +3	+4	→ +15		
Σ kN.m	-393	← +4378	-4378	2903		-2903
						-2177

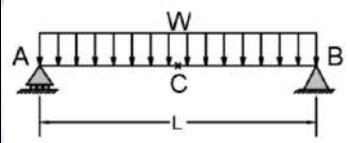
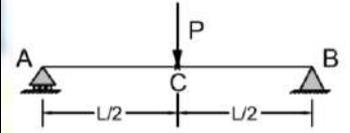
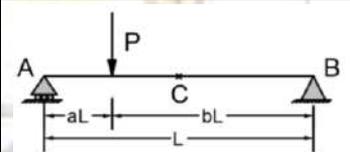
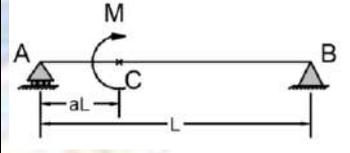
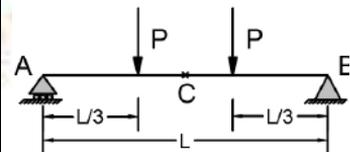
الشكل (11-6)



## ملحق (1)

### جدول التشوهات Table of Displacements

يبين الجدول (1) قيم الانتقالات والدورانات في بعض حالات التحميل الشهيرة من أجل جوائز بسيط وجوائز ظفري حيث  $EI$  تمثل الصلابة الانعطافية Flexural Rigidity، وهي واحدة على كامل طول العنصر.

الدوران Rotation	الانتقال Translation	الجوائز وحمولاته Configuration
$\theta_A = -\theta_B = \frac{WL^3}{24EI}$	$\delta_C = \frac{5WL^4}{384EI}$	
$\theta_A = -\theta_B = \frac{PL^2}{16EI}$	$\delta_C = \frac{PL^3}{48EI}$	
$\theta_A = \frac{Pa(L-a)(2L-a)}{6EI}$ $\theta_B = -\frac{Pa}{6EI}(L^2 - a^2)$	$\delta_C = \frac{PL^3}{48EI} \left[ \frac{3a}{L} - 4\left(\frac{a}{L}\right)^3 \right]$	
$\theta_A = \frac{ML}{6EI} [3a^2 - 6a + 2]$ $\theta_B = \frac{ML}{6EI} [3a^2 - 1]$	$\delta_C = \frac{ML^2}{3EI} [a(1-a)(1-2a)]$	
$\theta_A = -\theta_B = \frac{PL^2}{9EI}$	$\delta_C = \frac{23}{648} \frac{PL^3}{EI}$	

جدول (1) معادلات الانتقال والدوران من أجل الأحمال الشهيرة لجوائز بسيط وجوائز ظفري

حيث تم اعتماد اصطلاح الإشارة من أجل الانتقالات والدورانات بحيث يكون الانتقال الموجب للأسفل والدوران الموجب مع عقارب الساعة Clock Wise.

الدوران Rotation	الانتقال Translation	الجائز وحمولاته Configuration
$\theta_A = -\theta_B = \frac{ML}{24EI}$	$\delta_C = 0$	
$\theta_A = -\frac{ML}{6EI}$ $\theta_B = \frac{ML}{3EI}$	$\delta_C = \frac{ML^2}{16EI}$	
$\theta_B = \frac{WL^3}{6EI}$	$\delta_B = \frac{WL^4}{8EI}$	
$\theta_B = \frac{PL^2}{2EI}$	$\delta_B = \frac{PL^3}{3EI}$ $\delta_C = \frac{5PL^3}{48EI}$	
$\theta_B = \frac{ML}{EI}$	$\delta_B = \frac{ML^2}{2EI}$ $\delta_C = \frac{ML^2}{8EI}$	
$\theta_B = \frac{PL^2}{8EI}$	$\delta_B = \frac{PL^3}{24EI}$	
$\delta_B = \frac{ML}{2EI}$	$\delta_B = \frac{3ML^2}{8EI}$	

تابع جدول (1) معادلات الانتقال والدوران من أجل الأحمال الشهيرة لجائز بسيط وجائز ظفري

## المراجع

### References

1. McCormac J., 2009– **Structural Analysis**. Clemson University, Harper and Row, Inc., 4<sup>th</sup> Edition, 640Pages.
2. Hibbeler R. C., 2012– **Structural Analysis**., Prentice Hall, Inc., 8<sup>th</sup> Edition, 695Pages.
3. El- Dakhakhni W., 2010–**Theory of Structures**– Part 1. Dar Al-Maaref, Inc., 4<sup>th</sup> Edition, 433.
4. El- Dakhakhni W., 2010–**Theory of Structures**– Part 2. Dar Al-Maaref, Inc., 4<sup>th</sup> Edition, 480.
5. Kassimali A., 2011– **Structural Analysis**. Southern Illinois University, Christopher M. Shortt, Inc., 4<sup>th</sup> Edition, 875Pages.
6. Hjelmstad K., 2005– **Fundamental of Structural Mechanics**. Illinois University, Springer, Inc., 2<sup>nd</sup> Edition, 480Pages.
7. Hearn E. J., 2001– **Mechanics of Materials (1)**. Warwick University, Butterworth–Heinemann, Inc., 3<sup>rd</sup> Edition, 540Pages.
8. Hearn E. J., 2001– **Mechanics of Materials (2)**. Warwick University, Butterworth–Heinemann, Inc., 3<sup>rd</sup> Edition, 540Pages.
9. Boresi A. P., Schmidt R. J., 2003– **Advanced Mechanics of Materials**. John Wiley & Sons., 6<sup>th</sup> Edition, 600Pages.
10. Rossmann J. S., Dym C. L., 2009– **Introduction to Engineering Mechanics**., Taylor & Francis Group, LLC., 1st Edition, 454Pages.
11. Leet k. M., Uang Ch., Lanning J. T., Gilbert A. M., 2018– **Fundamentals of Structural Analysis**. McGraw–Hill Education, Inc., 5th Edition, 800Pages.

12. Hibbeler R. C., 2013– **Engineering Mechanics–Statics**. Pearson Education, Inc., 13rd Edition, 650Pages.
13. Graig R. R., 2011– **Mechanics of Materials**. Warwick University, JOHN WILEY & SONS, Inc., 3<sup>rd</sup> Edition, 860Pages.
14. Abdel Salam S., 2000– **Structural Analysis and Mechanics**. Zagazig University, 1<sup>st</sup> Edition, 577Pages.
15. Karnovski I. A., Lebed O., 2010– **Advanced Methods of Structural Analysis**. Springer, 1<sup>st</sup> Edition, 593Pages.
16. Bedenik B., Besant C., 1999– **Analysis of Engineering Structures**. Horwood Publishing Limited, 1<sup>st</sup> Edition, 378Pages.
17. كتخدا ع.، 1984– حساب الإنشاءات. منشورات جامعة حلب، الطبعة الأولى.
18. الجنزير س.، كتخدا ع.، القدير غ.، مقاومة المواد(2). منشورات جامعة حلب، الطبعة الأولى.
19. موصلي ض.، 1996– ميكانيك الإنشاءات (1). منشورات جامعة حلب، الطبعة الأولى، 426 صفحة.

## دليل المصطلحات العلمية في علم ميكانيك الإنشاءات

عربي - انكليزي

### A

Absolute maximum shear (V)	القص الأعظمي المطلق
Absolute maximum moment (M)	عزم الانعطاف (الانحناء) الأعظمي
Allowable-stress	الإجهاد المسموح
Angular displacement	تشوه زاوي
Antisymmetric loads	أحمال متناظرة عكسياً
Approximate methods of analysis	طرائق تحليل تقريبية
Arches	أقواس
Axial forces (N)	قوى محورية
Axis	محور
Average	متوسط
Applied force	قوة مطبقة
Action	فعل
Assembly	عناصر مجمعة

### B

Bay	مجاز
Beam	جائر
Bending moment	عزم انعطاف
Bending moment diagram	مخطط عزم الانعطاف
Betti's law	قانون بيتي
Boundary conditions	شروط محيطية
Bracing struts	عناصر تريبط
Bar	قضيب
Base	أساس
Basic Method	طريقة أساسية

## C

Cable	شدّاد
Carry-over Factor (COF)	معامل نقل
Cantilever	ظفر
Cantilever beam	جائز ظفري
Castigliano's theorem	نظرية كاستليانو
Column	عمود
Compatibility	توافقية
Composite structures	منشآت مركّبة
Compressive force	قوة ضغط
Concrete	خرسانة
Curvature	انحناء
Concentrated loads	قوى مركّزة
Conjugate-beam method	طريقة الجائز البديل
Conservation of energy principle	مبدأ حفظ الطاقة
Continuity conditions	شروط الاستمرارية
Coordinate systems	جمل الإحداثيات
Couple moment	مزدوجة عزم
Coplanar	ثنائي المستوي

## D

Dead loads	أحمال ميتة
Deflection	تشوه
Degrees of freedom	درجات حرية
Determinacy	تقرير
Displacements	انتقالات
Distributed loads	أحمال موزعة
Distribution factor (DF)	معامل توزيع
Double integration	تكامل مضاعف

Dynamic analysis	تحليل ديناميكي
Diagonal	قطري
Design	تصميم
Determinant structures	منشآت مقررة

## E

Elastic curve	منحني مرن
Earthquake	هزة أرضية
Elastic-beam	جائز مرن
Elements	عناصر
Energy methods	طرائق الطاقة
Equilibrium	توازن
External stability	استقرار خارجي
External virtual work	عمل افتراضي خارجي
External work	عمل خارجي
Effect	تأثير

## F

Fixed-end moments (FEM)	عزوم وثق
Flanges	أجنحة الجوائز
Flexibility	قابلية تشوه
Flexural rigidity	صلابة انعطافية (انحنائية)
Floors	أرضيات
Force	قوة
Frames	إطارات
Fixed-support	وثاقة
Free-body diagrams	مخطط الجسم الحر

## G

Girder	جائز مستعرض
--------	-------------

Global coordinates

إحداثيات عامة

H

Hinge

مفصل

Hydrostatic pressure

ضغط هيدروستاتيكي

I

Inflection points

نقاط انعطاف

Influence lines

خطوط تأثير

Influence area

مساحة تأثير

Integration

تكامل

Internal stresses

إجهادات داخلية

Internal stability

استقرار داخلي

Internal virtual work

عمل افتراضي داخلي

Inverse of a matrix

مقلوب مصفوفة

Indeterminate structures

منشآت غير مقررة

Unstable

غير مستقر

Instability

عدم استقرار

J

Joint

عقدة

K

Kinematic indeterminacy

عدم تقرير حركي

L

Lateral loads

قوى جانبية

Line

خط

Laminated beams

جوائز رقائعية

Linear displacement

تشوه خطي

Linear elastic material

مادة مرنة خطياً

Live loads

أحمال حيّة

Loads	أحمال
<b>M</b>	
Magnitude	شدة
Matrices	مصفوفات
Maxwell's theorem of reciprocal displacements	نظرية ماكسويل للانتقالات المتبادلة
Member	عنصر
Moment–area theorem	نظرية عزم المساحة
Moments	العزوم
Method of least work	طريقة العمل الأصغري
Moving loads	أحمال متحركة
<b>N</b>	
Nodal coordinates	إحداثيات عقدية
Node	عقدة
Nonprismatic members	عناصر غير موشورية
<b>P</b>	
Parabolic shape	قطع مكافئ
Pin supports	مساند ثابتة
Planar stresses	إجهادات مستوية
Portals	إطارات
Principle of virtual work	مبدأ العمل الافتراضي
Purlins	عوارض أفقية
Primary stress	إجهاد أساسي
Principle of Superposition	مبدأ تتضد الآثار
<b>S</b>	
Sawtooth truss	منشأ شبكي بشكل سن المنشار
Scalars	قيم جبرية



Tensile force (T)	قوة شاذة
Thin-plate structures	منشآت ذات بلاطات رقيقة
Three-hinged arches	أقواس ثلاثية المفصل
Tie rods	قضبان رابطة
Tied arches	أقواس رابطة
Torsional displacement	تشوهات فتالية
Total stiffness factor (KT)	معامل الصلابة الكلي
Transformation matrices	مصفوفة تحويل
Tributary loads	أحمال اعتبارية
Trusses	منشآت شبكية
Two-way slab (system)	بلاطات ثنائية الاتجاه
	<b>U</b>
Uniform loads	أحمال موزعة بانتظام
Unit load	قوة واحدة
Unit matrix	مصفوفة واحدة
	<b>V</b>
Vertical components	عناصر شاقولية
Virtual work	عمل افتراضي
Vertical loads	أحمال شاقولية
	<b>W</b>
Webs	جذع الجائز
Wind loads	أحمال رياح
Work	عمل

التدقيق العلمي

الدكتورة داليا نجار

الأستاذ الدكتور أكرم صقور

الأستاذ الدكتور عمار كعدان

جامعة دمشق

جامعة تشرين

جامعة حلب



المدقق اللغوي

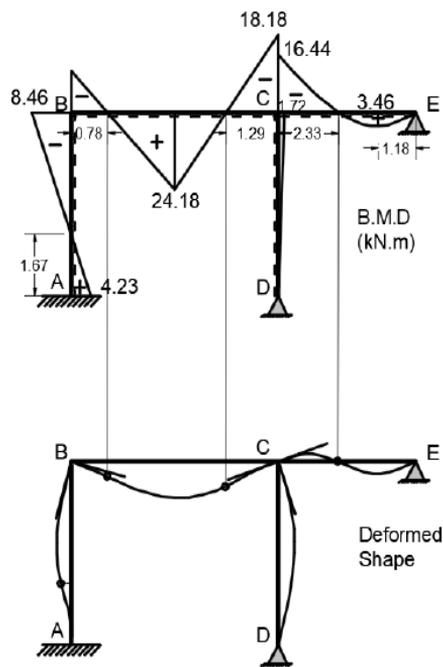
د. فائزة الظاهر

حقوق الطبع والترجمة والنشر محفوظة

لمديرية الكتب والمطبوعات الجامعية



# Structural Mechanics (1)



Dr. Rim KHARTASH

Assistant Professor - Structural Engineering Department

Third Year

Academic Year 1443ھ-2022م

سعر المبيع للطلاب