# الفصل الأول

## الأشعة والإحداثيات في الفراغ (Vectors and Coordinates in Space)

### (2-1-1) الأشعة

#### (2-1-1-1) تعريف الشعاع:

نسمي أية قطعة مستقيمة $AB$ موجهة من بدايتها $A$ إلى نهايتها $B$ شعاعاً، ونرمز إليه بـ $\overrightarrow{AB}$ أو بحرف واحد $\vec{v}$ مثلاً.

نسمي المستقيم الواصل بين مبدأ الشعاع و نهايته حامل الشعاع.ونسمي كل مستقيم مواز للشعاع منحى الشعاع.

قد يُحمل الشعاع $\vec{v}$ على محور (أو يوازيه) فيتعين عندئذ بقياسه الجبري على هذا المحور، ونرمز إلى هذا القياس الجبري بـ $\overline{v}$ أو ($v$ اختصاراً)، أما طول الشعاع بـ $|\vec{v}|$ ويقال طويلة الشعاع $\vec{v}$.

نلاحظ مما تقدم أن الشعاع يتميز بثلاثة عناصر، هي: المنحى، والاتجاه، والطول، وهناك عنصر رابع يتميز به الشعاع وله شأن في علم الميكانيك وهو المبدأ.إذا ثبت وضع الشعاع بثبات جميع عناصره، قلنا إن الشعاع مقيد.

وإن بقي مبدا الشعاع غير معين وثبتت بقية عناصره قلنا إن الشعاع طليق.

وإن بقي المبدأ غير معين على حامل الشعاع قلنا إن الشعاع منزلق.

وإذا اتحد شعاعان $\vec{v}'$, $\vec{v}$ في المنحى والطول والاتجاه قلنا إن الشعاعين متساويان، و نكتب $\vec{v} = \vec{v}'$.

وإذا اتحد الشعاعان بالمنحى والطول واختلفا في الاتجاه قلنا إنهما متعاكسان، ونكتب $\vec{v} \neq \vec{v}'$.

يسمي الشعاع المنزلق على محور (أو الموازي له) والذي قياسه واحدة الطول شعاع واحدة المحور.

ملاحظة:

قد يرمز اختصاراً إلى شعاع مبدؤه نقطة الأصل (المبدأ) $o$ حرف واحد وهو نهاية الشعاع.

فمثلاً الشعاع $\overrightarrow{oA}$ يكتب بالشكل $\vec{A}$ ونسميه شعاع النقطة $A$.

ملاحظة:

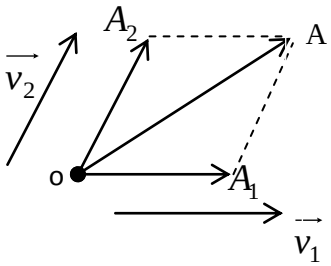
بفرض $\vec{v}$ شعاعاً منسوباً إلى جملة الإحداثية المتعامدة $oxyz$، تعطى العبارة التحليلية (بدلالة المركبات على المحاور الإحداثية) للشعاع $\vec{v}$ بالشكل: $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

نسمي $x\vec{i}$ مركبة الشعاع $\vec{v}$ على المحور $ox$، أما $x$ فتسمى المركبة العددية للشعاع $\vec{v}$ على المحور $ox$، وهكذا بقية المركبات.

#### (2-1-1-2) جمع الأشعة :

1- هندسياً: لجمع شعاعين $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ واقعين في مستوٍ واحد نرسم من نقطة المبدأ $o$ شعاعاً $\overrightarrow{oA_1}$ ويساوي $\overrightarrow{v_1}$، ثم شعاعاً $\overrightarrow{oA_2}$ ويساوي $\overrightarrow{v_2}$، انظر الشكل (1-1):

(الذي يوضح عملية جمع شعاعين).




الشكل (1-1)

ليكن $\overrightarrow{oA}$قطر متوازي الأضلاع$oA_1AA_2$المنشأ على هذين الشعاعين، فالشعاع$\overrightarrow{oA}$ أو أي شعاع مساوٍ له هومجموع الشعاعين $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$، ونكتب: $\overrightarrow{oA_1}+\overrightarrow{oA_2}=\overrightarrow{oA} \Leftrightarrow \vec{v}_1+\vec{v}_2=\vec{v}$

لجمع عدة أشعة يمكن تعميم قاعدة الجمع لشعاعين، لذلك يقال إن الأشعة تجمع بحسب قاعدة متوازي الأضلاع.

نلخص ذلك بالآتي:لجمع عدة أشعة ننشئ من نقطة المبدأ $o$شعاعاً مساوياً للشعاع الأول،ثم ننشئ من نهايته شعاعاً يساوي الشعاع الثاني وهكذا حتى الشعاع الأخير، فالشعاع الذي مبدؤه $o$ونهايته نهاية الشعاع الأخير هو مجموع الأشعة المفروضة.

ملاحظة:

إن عملية جمع الأشعة عملية تبديلية (لأن الجمع لا يتغير لو غيرنا ترتيب شعاعين متتاليين عدة مرات)، كما وتتمتع بالخاصة التجميعية.

2- تحليلياً: بفرض أن:

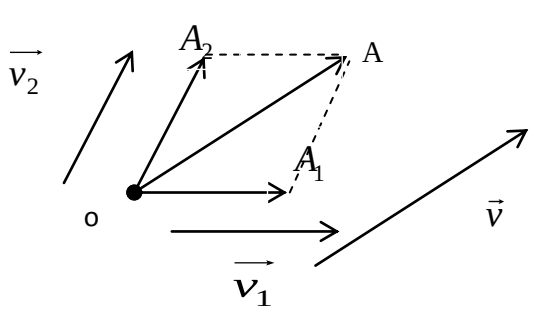
$$\vec{v}_1=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$$
$$\vec{v}_2=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$$

شعاعان مستويان لجملة محاور إحداثية متعامدة $oxyz$، عندئذتعطى العبارة التحليلية لجمع شعاعين بالعلاقة الآتية:

$$\vec{v}_1+\vec{v}_2=(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j}+(z_1+z_2)\vec{k}$$

**(2-1-1-3) فرق شعاعين:**

1- هندسياً: طرح شعاع $\vec{v}_1$ من شعاع $\vec{v}$، هو إيجاد شعاع $\vec{v}_2$ إذا أضيف إلى $\vec{v}_1$ نتج معنا $\vec{v}$، وهذا الشعاع يساوي $\overrightarrow{A_1A}$ أو $\overrightarrow{oA_2}$ الموضح بالشكل(2-1):




الشكل (2-1)

حيث: $\overrightarrow{oA_1}+\overrightarrow{A_1A}=\overrightarrow{oA} \Rightarrow \vec{v}_1+\overrightarrow{A_1A}=\vec{v}$

نرى أن هذا الشعاع هو أيضاً مجموع الشعاع $\vec{v}$ و معاكس الشعاع $\overrightarrow{v_1}$ أي $\vec{v}_2=\vec{v}+(-\vec{v}_1)$.

2- تحليلياً:بفرض أن:

$$\vec{v}_1=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$$
$$\vec{v}_2=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$$

شعاعان منسوبان لجملة محاور إحداثية متعامدة $oxyz$، عندئذ:تعطى العبارة التحليلية لطرحالشعاع $\vec{v}_2$ من الشعاع $\vec{v}_1$ بالعلاقة: $\vec{v}_1-\vec{v}_2=(x_1-x_2)\vec{i}+(y_1-y_2)\vec{j}+(z_1-z_2)\vec{k}$

**(2-1-1-4) جداء شعاع بعدد( نسبة شعاعين متوازيين):**

هندسياً: ليكن $\vec{v}$ شعاعاً و $m$عدداً ماغير صفري،إن جداء الشعاع $\vec{v}$بالعدد $m$ هو الشعاع $\vec{v}'$، الذي يوازي الشعاع $\vec{v}$ ويكتب بالشكل $\vec{v}'=m\,\vec{v}$، ونسبة التوازي بين الشعاعين تساوي $m$، طويلته تساوي طويلة الشعاع $\vec{v}$ مضروباً بالعدد $|m|$(ممكن أن يكون العدد $m$ سالباً)، وجهته من جهة $\vec{v}$ إذا كان $m$موجباً، وعكس جهة $\vec{v}$ إذا كانت قيمة $m$ سالبة.

ملاحظة: إذا توازى شعاعان $\vec{v}$ و $\vec{v}'$ أمكن إيجاد عدد مثل $m$ يحقق العلاقة:

$$\frac{\vec{v}'}{\vec{v}} = m \qquad or \qquad \vec{v}' = m\,\vec{v}$$

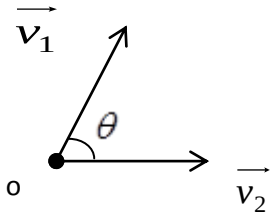
وإذا كان الشعاعان المفروضان موازيين لمحور كان بين قياسهما الجبريين العلاقة:

$$\frac{\bar{v}'}{\bar{v}} = m \qquad or \qquad \bar{v}' = m\,\bar{v}$$

تحليلياً: بفرض أن $\vec{v}$ شعاع مكتوب بالعبارة التحليلية الآتية: $\vec{v} = x\vec{i} + y\ \vec{j} + z\vec{k}$

عندئذ: $\vec{v'} = m\vec{v} = mx\vec{i} + my\ \vec{j} + mz\vec{k}$

**(2-1-1-5) الجداء السلمي(العددي) لشعاعين:**




الشكل (1-3)

تعريف: ليكن $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ شعاعين الزاوية بينهما $\theta$،

انظر الشكل(1-3):

يعرَّف الجداء السلمي لهذين الشعاعين بأنه مقدار سلمي يساوي جداء طويلةالشعاع الأول في طويلة الشعاع الثاني في جيب تمام الزاوية الكائنة بينهما.ونكتب:

$$\vec{v}_1 . \vec{v}_2 = |\vec{v}_1| . |\vec{v}_2| . \cos\theta \quad ; \quad 0 \le \theta < 2\pi$$

ويسمى الجداء السلمي أيضاً الجداء الداخلي.

ملاحظة:

نستنتج من التعريف السابق أن الجداء السلمي تبديلي، والناتج يمكن أن يكون موجباً أو سالباً أو صفراً، حسبما تكون الزاوية $\theta$ بين الشعاعين $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$

ملاحظة:

يكون الشعاعان $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ متعامدين إذا و فقط إذا كان $\vec{v}_1 . \vec{v}_2 = 0$

مثال: إذا كانت الأشعة التي نريد حساب جدائها السلمي هي أشعة الواحدة المحمولة على المحاور الاحداثية، فإن:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{i}\,.\vec{i} = \vec{j}\,.\vec{j} = \vec{k}\,.\vec{k} = 1 \\ \vec{i}\,.\vec{j} = \vec{j}\,.\vec{k} = \vec{k}\,.\vec{i} = 0 \end{array}\right\} \quad ; \ \cos(0) = 1 \ , \ \cos(\tfrac{\pi}{2}) = 0$$

بعض خواص الجداء السلمي:

1-إذا تساوى الشعاعان فإن: $\vec{v} . \vec{v} = |\vec{v}| . |\vec{v}| . \cos(0) = |\vec{v}|^2$ .

2-الجداء السلمي توزيعي بالنسبة لعملية جمع الأشعة، فمن أجل ثلاثة أشعة مفروضة $\vec{v}_1 , \vec{v}_2 , \vec{v}_3$ ، فإن:

$$\vec{v}_1 . (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{v}_1 . \vec{v}_2 + \vec{v}_1 . \vec{v}_3$$

$$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) . \vec{v}_3 = \vec{v}_1 . \vec{v}_3 + \vec{v}_2 . \vec{v}_3$$

3-من أجل $m$ عدد حقيقي و $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ شعاعين، فإن: $(m.\vec{v}_1) . \vec{v}_2 = m(\vec{v}_1 . \vec{v}_2) = \vec{v}_1 . (m.\vec{v}_2)$

4-العبارة التحليلية للجداء السلمي: إذا كان الشعاعان $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ مكتوبين بشكل تحليلي:

$$\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$
$$\vec{v}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

فإن: $\vec{v}_1.\vec{v}_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}).(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) \Rightarrow \vec{v}_1.\vec{v}_2 = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2$

مثال: احسب الزاوية الكائنة بين الشعاعين: $\vec{v}_1 = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ , $\vec{v}_2 = -\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$

الحل: لدينا من تعريف الجداء السلمي:

$$\vec{v}_1.\vec{v}_2 = |\vec{v}_1|.|\vec{v}_2|.\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{v}_1.\vec{v}_2}{|\vec{v}_1|.|\vec{v}_2|}$$

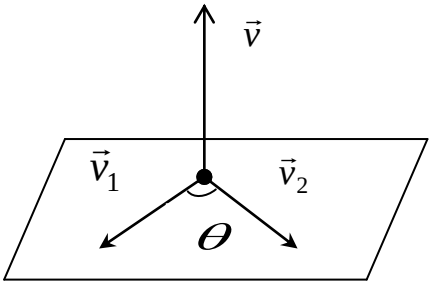
ومن العبارة التحليلية للجداء السلمي: $\vec{v}_1.\vec{v}_2 = x_1.x_2 + y_1.y_2 + z_1.z_2 = 4$

$$|\vec{v}_1| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6} \quad , \quad |\vec{v}_2| = \sqrt{1+1+9} = \sqrt{11}$$

$$\cos\theta = \frac{4}{\sqrt{6}\sqrt{11}} = \frac{4}{\sqrt{66}} \Rightarrow \quad \theta = \arccos(\frac{4}{\sqrt{66}}) = 60.5°$$

**(2-1-1-6) الجداء الخارجي(الشعاعي) لشعاعين:**

**تعريف:** يعرف الجداء الشعاعي لشعاعين $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ بأنه شعاع ثالث $\vec{v}$ يعامد مستوي الشعاعين $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ ،واتجاهه بحيث تشكل الأشعة $\vec{v}_1$ , $\vec{v}_2$ , $\vec{v}$ ثلاثية طردية، بمعنى أنه إذا وقف راصد باتجاه $\vec{v}$ ونظر إلى الشعاع $\vec{v}_1$ وجد $\vec{v}_2$ على يساره كما في الشكل (1-4) ويقرأ $\vec{v}_1$ خارجياً $\vec{v}_2$ ويساوي $\vec{v}$.



الشكل (1-4)

ويرمز للجداء الخارجي بـ $\vec{v} = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$

نستنتج من ذلك أن الجداء الخارجي لشعاعين غير تبديلي، لأن: $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = -\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1$

أما طويلة الشعاع $\vec{v}$، فتساوي في التعريف طويلة الشعاع $\vec{v}_1$ مضروباً بطويلة الشعاع الثاني $\vec{v}_2$ مضروباً بجيب الزاوية بين الشعاعين $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ .

والمعنى الهندسي لهذه الطويلة أنهاتساوي مساحة متوازي الأضلاع المنشأ على هذين الشعاعين ونكتب:

$$|\vec{v}| = |\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2| = |\vec{v}_1|.|\vec{v}_2|.\sin\theta \quad ; \quad 0 \le \theta < \pi$$

ملاحظات:

1-إذا توازى الشعاعان $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ فإن الجداء الخارجي يساوي الشعاع الصفري $\vec{0}$.أي:

$$\vec{v}_1 \backslash\backslash \vec{v}_2 \Leftrightarrow \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \vec{o}$$

2-من أجل أشعة الواحدة المحمولة على المحاور الإحداثية، فإن:

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \ , \ \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \ , \ \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$
$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 0$$

في حين أن: $\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k} \ , \ \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i} \ , \ \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$

3-الجداء الشعاعي توزيعي بالنسبة لعملية جمع الأشعة؛ أي: $\vec{v}_1 \wedge (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) + (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_3)$

4-حساب الجداء الخارجي لشعاعين تحليلياً:

بفرض أن:

$$\vec{v}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$
$$\vec{v}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$

فإن:

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \wedge (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k})$$
$$= (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} + (x_2z_1 - z_2x_1)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k}$$

نلاحظ أن الطرف الأيمن في هذه العلاقة يمكن مقارنته بمنشور المحدد الآتي حسب عناصر السطر الأول:

نستطيع أن نكتب العلاقة: $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} + (x_2z_1 - z_2x_1)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k}$

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

مثال:احسب طويلة الجداء الخارجي للشعاعين: $\vec{v}_2 = -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ , $\vec{v}_1 = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$

الحل: نحسب أولاً مركبات الشعاع $\vec{v} = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$ بالشكل:

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -5\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$$

أما طويلة هذا الشعاع فهي: $|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2| = \sqrt{25+1+9} = \sqrt{35}$

**(2-1-1-7) الجداء المختلط لثلاثة أشعة:**

**تعريف:**يعرف الجداء المختلط لثلاثة أشعة $\vec{c},\vec{b},\vec{a}$ بأنه العدد $(\vec{a} \wedge \vec{b}).\vec{c}$ ويرمز إليه بالرمز: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

**قيمة الجداء المختلط تحليلياً:**لتكن الجملة $oxyz$ ثلاثية قائمة، ولنأخذ الأشعة:

$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$$
$$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$$
$$\vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$$

لقد وجدنا سابقاً أن مركبات الشعاع $\vec{a} \wedge \vec{b}$ ما هي إلا نشر المحدد وفق السطر الأول:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (y_1z_2 - z_1y_2)\vec{i} + (x_2z_1 - z_2x_1)\vec{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\vec{k}$$

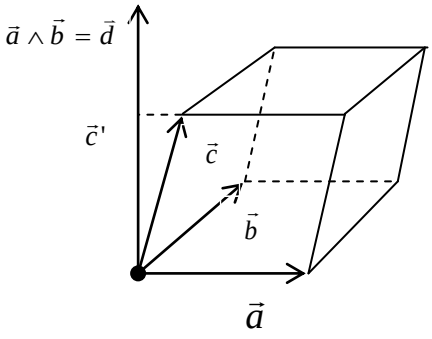
وعندئذ تعطى قيمة الجداء المختلط بالشكل:

$$(\vec{a}\wedge\vec{b}).\vec{c}=(y_1z_2-z_1y_2)x_3+(x_2z_1-z_2x_1)y_3+(x_1y_2-y_1x_2)z_3$$

نلاحظ أن هذه القيمة تتطابق مع نشر المحدد الآتي وفق السطر الثالث:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

**بعض خواص الجداء المختلط:**




الشكل (1-5)

الخاصة 1- تمثل القيمة المطلقة للجداء المختلط للأشعة $\vec{c},\vec{b},\vec{a}$، حجم متوازي السطوح المرسوم على الأشعة الثلاثة،انظر الشكل (1-5):

نرمز بـ $\vec{d}=\vec{a}\wedge\vec{b}$، نعلم أن $\left|\vec{d}\right|$ تمثل مساحة متوازي الأضلاع المرسوم على الشعاعين $\vec{b},\vec{a}$ وأن $\vec{d}$ عمودي على مستوي هذين الشعاعين، وكذلك نعلم أن $\vec{d}.\vec{c}=\left|\vec{d}\right|.\bar{c}'$ ($\bar{c}'$ مسقط $\vec{c}$ على $\vec{d}$).

$\bar{c}'$يمثل ارتفاع متوازي السطوح. بالتالي القيمة المطلقة للعدد $(\vec{a}\wedge\vec{b}).\vec{c}$ تمثل حجم متوازي السطوح المذكور.

الخاصة 2- الشرط اللازم والكافي لتكون الأشعة $\vec{c},\vec{b},\vec{a}$ واقعة في مستوٍ واحد،هو أن يكون جداؤها المختلط صفراً.

الخاصة 3-الشرط اللازم والكافي لتكون الأشعة $\vec{c},\vec{b},\vec{a}$ موازية لمستوٍ واحد، هو أن يكون جداؤها المختلط صفراً.

الخاصة 4-الشرط اللازم والكافي لتكون الأشعة $\vec{c},\vec{b},\vec{a}$مرتبطة خطياً، هو أن يكون جداؤها المختلط صفراً.

**نتيجة:** استناداًإلىالمفاهيم والخصائص السابقة يمكن القول إن الشرط اللازم والكافي لوقوع أربع نقاط في مستوٍ واحد، هو أن تشكل هذه النقاط ثلاثة أشعة واقعة في مستوٍ واحد،فإذا كانت

$$M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2),M_3(x_3,y_3,z_3),M_4(x_4,y_4,z_4)$$

أربع نقاط في الفراغ $oxyz$، فالشرط اللازم والكافي لوقوع هذه النقاط في مستوٍ واحد هو:

$$(\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_1M_3},\overrightarrow{M_1M_4})=0$$

أي:

$$\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1\end{vmatrix}=0$$

مثال: أثبت أن الأشعة الآتية تقع في مستوٍ واحد:

$$\vec{v}_1=-\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$$
$$\vec{v}_2=-\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$$
$$\vec{v}_3=-3\vec{i}+12\vec{j}+6\vec{k}$$

الحل:نشكل الجداء المختلط لهذه الأشعة:

$$(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 2\\ -1 & -6 & 2\\ -3 & 12 & 6\end{vmatrix}=0$$

بالتالي تقع الأشعة الثلاثة في مستوٍ واحد.

مثال: أثبت أن النقاط الأربعةالآتية تقع في مستوٍ واحد:

$$M_1(1,6,5)\ ,M_2(7,-18,2)\ ,M_3(3,-2,4)\ ,M_4(4,4,9)$$

الحل: نجد الأشعة $\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_1M_3},\overrightarrow{M_1M_4}$:

$$\overrightarrow{M_1M_2}=6\vec{i}-24\vec{j}-3\vec{k}\quad ,\overrightarrow{M_1M_3}=2\vec{i}-8\vec{j}-\vec{k}$$

$$\overrightarrow{M_1M_4}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$$

$$(\overrightarrow{M_1M_2},\overrightarrow{M_1M_3},\overrightarrow{M_1M_4})=\begin{vmatrix}6 & -24 & -3\\ 2 & -8 & -1\\ 3 & -2 & 4\end{vmatrix}=0$$

إذا النقاط الأربع تقع في مستوٍ واحد.

الخاصة 5-إن قيمة الجداء المختلط للأشعة $\vec{c},\vec{b},\vec{a}$ لا تتغير حين نجري على هذه الأشعة تبديلاً دورياً، أي:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})$$

الخاصة 6-إن تغير ترتيب شعاعين في الجداء المختلط $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ لا يغير القيمة المطلقة لهذا الجداء، و إنما يغير الإشارة فقط، أي:

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})$$

الخاصة 7- إذا ضربنا أحد أشعة الجداء المختلط بعدد، فإن الجداء المختلط يُضرب بهذا العدد، أي:

$$.(m\vec{a},\vec{b},\vec{c})=m.(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$$

**(2-1-2): الإحداثيات (تعيين نقطة):**

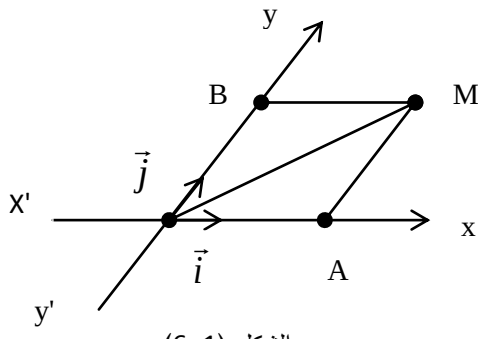
**(2-1-2-1)تعيين نقطة في المستوي:**

يتعين وضع نقطة في المستوي بطرائق عديدة، نذكر منها الطريقة الديكارتية، والطريقة القطبية.

**1-الإحداثيات الديكارتية:**

لتكن $M$ نقطة مفروضة في المستوي، نرسم محورين في هذا المستوي أحدهما $x'ox$ شعاع واحدته $\vec{i}$ والآخر $y'oy$ شعاع واحدته $\vec{j}$ .

فإذا أنشأنا من $M$ موازيين للمحورين المفروضين، وقطعا هذين المحورين في $A$ و $B$ ، انظر الشكل (1-6)، يكون:



الشكل (1-6)

$$\overrightarrow{oM} = \overrightarrow{oA} + \overrightarrow{oB}$$

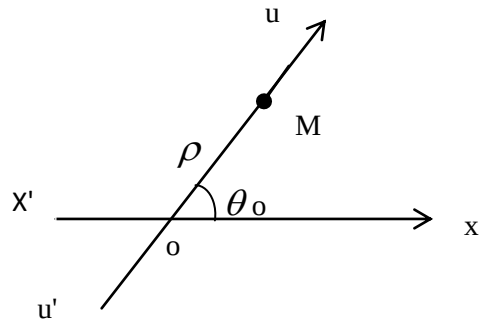
$$or \quad \overrightarrow{oM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

وعندئذ: يتعين وضع النقطة $M$ بالعددين: $x = \overline{oA}$ , $y = \overline{oB}$ .اللذين يسميان الإحداثيين الديكارتيين للنقطة $M$، ونسمي $x$ بفصل النقطة $M$ و $y$ بترتيبها، ونرمز للنقطة $M$ التي فصلها $x$ وترتيبها $y$ بالرمز $M(x,y)$.

ملاحظة:نسمي الإحداثيين $(x,y)$بالإحداثيين القائمين إذا كان المحوران $x'ox$ , $y'oy$ متعامدين.

**2-الإحداثيات القطبية:**

لتكن $M$ نقطة مفروضة في المستوي، نرسم في هذا المستوي من نقطة ثابتة $o$(نسميها)محور $ox$نسميه المحور القطبي، فإذا أنشأنا محوراً $\overrightarrow{ou}$ ماراً من $M$،فإن وضع النقطة $M$ يتعين بالزاوية $\theta = (\widehat{\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{ou}})$ وبفصل النقطة $M$على المحور $\overrightarrow{ou}$: $\rho = \overline{oM}$ ، انظر الشكل (1-7):



الشكل (1-7)

نسمي $(\rho,\theta)$الإحداثيين القطبيين للنقطة $M$، ونرمز لنقطة $M$ إحداثياها القطبيان $\rho, \ \theta$ بـ $M(\rho,\theta)$.

ملاحظة:

توجد بين الإحداثيات الديكارتية القائمة والقطبية لنقطة $M$ العلاقتان : $x = \rho\cos\theta$ , $y = \rho\sin\theta$

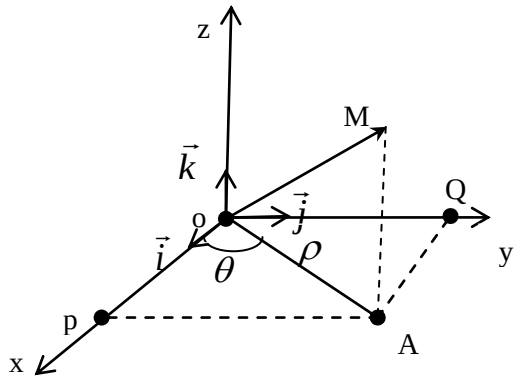
اللتان تعينان $(x,y)$ بدلالة $(\rho,\theta)$، وبالتالي، يمكن حساب $(\rho,\theta)$بدلالة $(x,y)$، كما يلي: $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ , $\theta = arctg\frac{y}{x}$

**(2-2-1-2) تعيين نقطة في الفراغ:**

يتعينوضع نقطة في الفراغ بطرق متعددة، نذكر منها: الطريقة الديكارتية، والطريقة الأسطوانية، والطريقة الكروية.

**1- الإحداثيات الديكارتية:**

لتكن $M$ نقطة مفروضة في الفراغ، نرسم من نقطة ثابتة $o$ نسميها المبدأ، ثلاثة محاور $ox$, $oy$ , $oz$غير واقعة في مستو واحد.



الشكل (1-8)

فإذا أنشأنا من $M$ مستقيماً $MA$ موازياً للمحور $oz$ وكانت $A$نقطة تقاطع هذا الموازي مع المستوي $xoy$، انظر الشكل (1-8).

يكون: $\overrightarrow{oM} = \overrightarrow{oA} + \overrightarrow{AM}$.

وبفرض $\vec{i}$ , $\vec{j}, \vec{k}$ هي أشعة الواحدة للمحاور الثلاثة $ox, oy, oz$ على الترتيب، فإن:

$\overrightarrow{oA} = x\vec{i} + y\vec{j}$ ; $\overrightarrow{AM} = z\vec{k}$

وبالتالي: $\overrightarrow{oM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ فوضع النقطة $M$ يتعين بالأعداد:

$z = \overline{AM}$ , $y = \overline{oQ}$ , $x = \overline{op}$ التي نسميها الإحداثيات الديكارتية للنقطة $M$ في الفراغ.

نسمي $x$ بفصل النقطة $M$و $y$ بترتيبها، $z$ براقمها،ونرمز إلى نقطة $M$ إحداثياتها $x, y, z$ بالرمز $M(x,y,z)$ .

ملاحظة: حين تكون الثلاثية $oxyz$ قائمة، فالإحداثيات $x, y, z$ تدعى بالإحداثيات القائمة.

**2- الإحداثيات الأسطوانية:**

وجدنا في الإحداثيات الديكارتية أن: $\overrightarrow{oM} = \overrightarrow{oA} + \overrightarrow{AM}$ فالنقطة $M$ تتعين إذاً: إذا علم راقمها $z = \overline{AM}$ ووضع النقطة $A$ في المستوي $xoy$، انظر الشكل(1-8).

لنفرض الآن أن الجملة $oxyz$ قائمة، فإذا عينا $A$ في المستوي $xoy$ بالإحداثين الديكارتيين $x = \overline{op}$ , $y = \overline{oQ}$ نكون قد عينا $M$ تماما بالإحداثيات الديكارتية، أما إذا عينا $A$ في المستوي $xoy$ بالإحداثيين القطبيين $(\rho, \theta)$ باعتبار أن $ox$ هو المحور القطبي، نكون قد عينا $M$ بالطريقة الأسطوانية .

نسمي الأعداد $\rho, \theta, z$ الإحداثيات الأسطوانية لنقطة $M$ ونرمز إلى نقطة $M$ إحداثياتها الأسطوانية $\rho, \theta, z$ بالرمز $M(\rho, \theta, z)$.

ملاحظة: ترتبط الإحداثيات الديكارتية لنقطة $M$ والإحداثيات الأسطوانية في جملة متعامدة بالعلاقات:

$$x = \rho\cos\theta \ , \ y = \rho\sin\theta \ , \ Z = Z$$

إذ $-\infty < x < \infty \ , -\infty < y < \infty \ , \ -\infty < z < \infty$

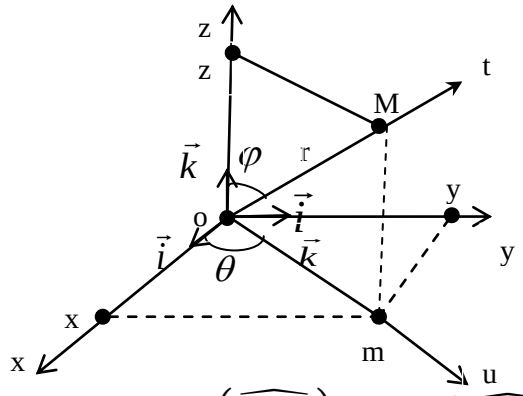
$$0 \le \rho \ , \ 0 \le \theta < 2\pi$$

هذه العلاقات تعين $x, y, z$ بدلالة $\rho, \theta, z$، ومن هذه العلاقات نستنتج أن:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \ ; \ \theta = arctg\,\tfrac{y}{x} \ ; \ z = z$$

**3- الإحداثيات الكروية:**

نفترض ثلاثية متعامدة $oxyz$، عندئذ يمكن تعيين وضع نقطة مفروضة $M$، انظر الشكل(1-9)، بأن نأخذ على المستقيم $oM$ محوراً $\overrightarrow{ot}$، وعلى مسقطه القائم $om$ على المستوي $xoy$ محوراً $\overrightarrow{ou}$، فالأعداد:




الشكل (1-9)

$$r = \overline{oM} \ , \varphi = \left(\widehat{\overrightarrow{oz}, \overrightarrow{ot}}\right) \ , \theta = \left(\widehat{\overrightarrow{ox}, \overrightarrow{om}}\right)$$
$$; 0 \le \varphi < \pi \ , \ 0 \le \theta < 2\pi$$

التي تعين وضع $M$ في الفراغ تسمى الإحداثيات الكروية (أو القطبية لنقطة في الفراغ) لنقطة $M$، ونرمز إلى نقطة $M$ التيإحداثياتها الكروية $r \ , \ \varphi, \ \theta$ بالرمز $M(r, \theta, \varphi)$.

أما العلاقات التي تربط هذه الإحداثيات بالإحداثيات الديكارتية فهي:

$$x = r\sin\varphi\cos\theta \ , \ y = r\sin\varphi\sin\theta \ , \ Z = r\cos\varphi$$

وبالعكس: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ ; \ \theta = arctg\,\tfrac{y}{x} \ ; \varphi = arctg\,\tfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$

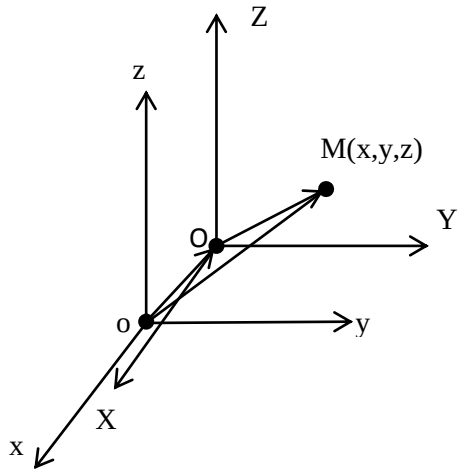
كما وترتبط الإحداثيات الكروية والاسطوانية لنقطة في الفراغ بالعلاقات:

$$\rho = r\sin\varphi \ , \ \theta = \theta \ , \ z = r\cos\varphi$$

وبالعكس: $r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \ , \ \theta = \theta \ , \varphi = arctg\left(\tfrac{\rho}{z}\right)$

### (2-1-2-3) انسحاب جملة المحاور الإحداثية:

**مقدمة:** قد يكون شكل ما منسوباً إلى جملة إحداثيات، ونود أن ننسبه إلى جملة إحداثيات أخرى بغية اختصار معادلته أو إظهاراً لخاصة غير ظاهرة له. ويتم ذلك بإيجاد دساتير نقل المحاور الإحداثية التي تعين إحداثيات نقطة منسوبة إلى إحدى الجملتين بدلالة إحداثياتها بالنسبة إلى الجملة الثانية، وسنوجد هذه الدساتير في الإحداثيات الديكارتية القائمة في الفراغ.



الشكل (1-10)

لنفترض أن الجملة الجديدة $OXYZ$ قد نشأت عن الجملة القديمة $oxyz$ بانسحاب معين بالشعاع $\overrightarrow{oO}$. انظر الشكل(1-10):

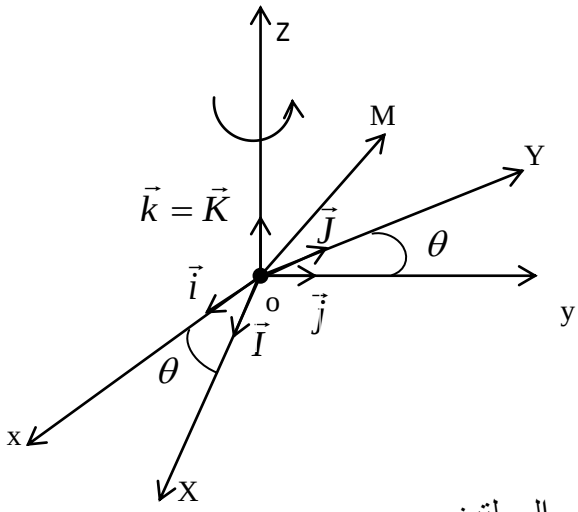
نعلم أن: $\overrightarrow{oM} = \overrightarrow{oO} + \overrightarrow{OM}$

بفرض أن $M$ نقطة إحداثياتها في الجملة القديمة $(x, y, z)$ وفي الجملة الجديدة $(X, Y, Z)$، بإسقاط العلاقة الشعاعية السابقة على محاور الجملة القديمة نجد أن:

$$x = x_0 + X \quad , \quad y = y_0 + Y \quad , \quad z = z_0 + Z$$

وذلك بفرض أن $(x_0, y_0, z_0)$ إحداثيات النقطة $O$. تمثل العلاقات السابقة الدساتير التي تربط إحداثيات نقطة في الجملتين الأصلية والجديدة .

### (2-1-2-4) النقل بالدوران حول أحد المحاور:



الشكل (1-11)

نفترض أن الجملة الجديدة $oXYZ$ قد نشأت عن الجملة القديمة $oxyz$ بدوران حول أحد المحاور، وليكن $\overrightarrow{oz}$ بزاوية قدرها $\theta$.

ولتكن $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ أشعة الواحدة المحمولة على المحاور الجديدة، ولتكن $M$ نقطة من الفراغ إحداثياتها $(x, y, z)$ بالجملة القديمة و $(X, Y, Z)$ في الجملة الجديدة، ولإيجاد العلاقات التي تربط إحداثيات النقطة $M$ في الجملتين.

من الشكل(1-11)، نجد: $\overrightarrow{oM} = X\,\vec{I} + Y\,\vec{J} + Z\,\vec{K}$.

بإسقاط هذه العلاقة الشعاعية على المحاور الإحداثية القديمة مع مراعاة أن:

$$\vec{I} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$$

$$\vec{J} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} + 0\,\vec{k}$$

$$\vec{K} = 0\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 1\,\vec{k}$$

ينتج لدينا:

$$x = X\cos\theta - Y\sin\theta$$
$$y = X\sin\theta + Y\cos\theta$$
$$z = Z$$

وهيالدساتير التي تربط بين إحداثيات النقطة $M$بين الجملتين القديمة والجديدة.

بطريقة مشابهة:نحصل على الدساتير التي تربط بين إحداثيات النقطة $M$ بين الجملتين القديمة والجديدة إذا تم الدوران حول $\overrightarrow{ox}$ بزاوية $\theta$ .وحول $\overrightarrow{oy}$ بزاوية $\theta$ .حول $\overrightarrow{ox}$تصبح الدساتير بالشكل:

$$x = X$$
$$y = Y\cos\theta - Z\sin\theta$$
$$z = Y\sin\theta + Z\cos\theta$$

وحول $\overrightarrow{oy}$تصبح الدساتير بالشكل:

$$x = Z\sin\theta + X\cos\theta$$
$$y = Y$$
$$z = Z\cos\theta - X\sin\theta$$

ملاحظة: العلاقات السابقة تسمح لنا بحساب الإحداثيات القديمة للنقطة $M$ بدلالة زاوية الدوران وإحداثياتها الجديدة، كما تسمح لنا بحساب الإحداثيات الجديدة بدلالة الإحداثيات القديمة وزاوية الدوران وذلك بحل جملة المعادلات الواردة في العلاقات السابقة.

**تمارين محلولة:**

1- لتكن الأشعة الآتية: $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ , $\vec{v}_2 = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ , $\vec{v}_3 = -\vec{i} + \vec{j}$

المطلوب: احسب $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ , $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_3$ , $\vec{v}_1.\vec{v}_2$ , $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ , $2\vec{v}_1$ .

الحل:

$$2\vec{v}_1 = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = 3\vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k} \ ,$$

$$\vec{v}_1.\vec{v}_2 = 2$$

$$\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$$

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

2- لدينا الأشعة $\vec{v}_3(0,1,2)$ , $\vec{v}_2(1,1,2)$ , $\vec{v}_3(3,-1,1)$ :المطلوب: تحقق فيما إذا كانت هذه الأشعة واقعة في مستو واحد أم لا؟

الحل:

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

بالتالي الأشعة ليست واقعة في مستو واحد.

3- لتكن لدينا النقاط $C(3,1,0)$ , $B(0,3,1)$ , $A(1,0,3)$ ، المطلوب:احسب مساحة المثلث $ABC$ .

الحل: $\overrightarrow{AB}(-1,3,-2)$ , $\overrightarrow{AC}(2,1,-3)$

مساحة المثلث $= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right|$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -7\vec{i} - 7\vec{j} - 7\vec{k}$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{147}$$

مساحة المثلث $= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{147}$ وحدة مساحة

4- ليكن لدينا الشعاعان $\vec{v}_2, \vec{v}_1$ اللذين يصنعان بينهما زاوية قدرها $\theta = \frac{\pi}{3}$ ، إذا علمت أن $\left|\vec{v}_1\right| = 3$ , $\left|\vec{v}_2\right| = 4$ ، المطلوب: حساب مساحة المثلث المنشأ على هذين الشعاعين.

الحل: وحدة مساحة $S = \frac{1}{2}\left|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{v}_1\right|\left|\vec{v}_2\right|.\sin\theta = 3\sqrt{3}$

5- ليكن $\vec{v}_1(1,1,1)$ و $\vec{v}_2(1,2,-3)$ شعاعين:

المطلوب: 1- برهن أن الشعاعين متعامدان.

2- احسب مساحة متوازي الأضلاع المنشأ على هذين الشعاعين.

الحل:

1- $\vec{v}_1.\vec{v}_2 = 1+2-3 = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$

2- بما أن الشعاعين متعامدان فإن $\theta = \frac{\pi}{2}$ وهذا يعني:

$$S = |\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2| = |\vec{v}_1|.|\vec{v}_2|.\sin\theta = |\vec{v}_1|.|\vec{v}_2|.1 = \sqrt{3}.\sqrt{14} = \sqrt{42}$$

6- ليكن لدينا الشعاعان: $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ , $\vec{v}_2 = -4\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$

المطلوب: 1- برهن أنهما متوازيان.

ليكن $\vec{v}_2 = \overrightarrow{oM}$ أوجد مركبات النقطة $M$ في جملة جديدة ناتجة عن القديمة بانسحاب شعاعه $\overrightarrow{oO}(1,2,3)$.

الحل: 1- بما أن مركبات الشعاعين متناسبة أي: $\frac{2}{-4} = \frac{3}{-6} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$ فإن الشعاعين متوازيين.

2- لدينا $\overrightarrow{oM}(-4,-6,2)$ و $\overrightarrow{oO}(1,2,3)$ نعوض في دساتير الانسحاب:

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + X \\ y = y_0 + Y \\ z = z_0 + Z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} X = x - x_0 = -4-1 = -5 \\ Y = y - y_0 = -6-2 = -8 \\ Z = z - z_0 = 2-3 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow M(-5,-8,-1)$$

7- احسب حجم متوازي السطوح المنشأ على الأشعة الآتية:

$$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{k} \ , \ \vec{b} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k} \ , \ \vec{c} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$$

الحل: نرمز لهذا الحجم بـ $V$:

$$V = \left|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right| \ ,$$

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & -6 \end{vmatrix} = -60 \Rightarrow V = \left|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right| = 60$$

8- لتكن $M(1,2)$ نقطة منسوبة إلى المستوي $oxy$. اكتب الإحداثيات القطبية لهذه النقطة.

الحل:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , tg\theta = \frac{y}{x}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5} \ , \ tg\theta = \frac{y}{x} = \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow \theta = arctg(2)$$

$$\Rightarrow M(\sqrt{5}, arctg(2))$$

9- أثبت أن المعادلة الديكارتية لمنحنى السيسوئيد المعطى قطبياً بالشكل:

$$\rho = \frac{2a\sin^2\theta}{\cos\theta} \quad \text{هي} \quad y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$$

ثم أثبت العكس .

الحل: بفرض $\rho = \frac{2a\sin^2\theta}{\cos\theta}$ ، سنجدالشكل الديكارتي، عندئذ:

لدينا $x = \rho\cos\theta$ , $y = \rho\sin\theta$ , $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{2a\frac{y^2}{x^2+y^2}}{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}} \Rightarrow x = 2a\frac{y^2}{x^2+y^2} \Rightarrow x^3 = 2ay^2 - xy^2$$

$$\Rightarrow \quad y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$$

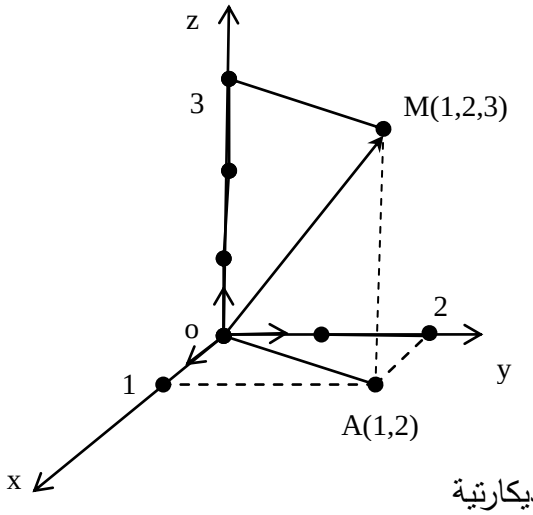
إثبات العكس:

بفرض $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$ ، سنجد الشكل القطبي:

$$\rho^2\sin^2\theta = \frac{\rho^3\cos^3\theta}{2a-\rho\cos\theta} \Rightarrow \sin^2\theta = \frac{\rho\cos^3\theta}{2a-\rho\cos\theta}$$

$$\Rightarrow 2a\sin^2\theta = \rho\cos\theta \ (\cos^2\theta+\sin^2\theta) \Rightarrow \rho = \frac{2a\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

10- ارسم شكلا يوضح موضع النقطة $M(1,2,3)$ في جملة إحداثيات ديكارتية متعامدة:




11- لتكن لدينا النقطة $M(1,\frac{\pi}{2},1)$ اكتب الإحداثيات الديكارتية للنقطة $M$.

الحل: لدينا $x = \rho\cos\theta$ , $y = \rho\sin\theta$ , $Z = Z$

$$x = 1\cos\tfrac{\pi}{2} = 0 \ , \ y = 1\sin\tfrac{\pi}{2} = 1 \ , \ Z = Z = 1 \Rightarrow M(0,1,1)$$

12- لتكن لدينا النقطة $M(1,\frac{\pi}{2},1)$ المكتوبة في الإحداثيات الأسطوانية، المطلوب:اكتب الإحداثيات الكروية لهذه النقطة.الحل:

$$r = \sqrt{\rho^2+z^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\theta = \tfrac{\pi}{2} \quad , \quad tg\varphi = \frac{\rho}{z} = \tfrac{1}{1} = 1 \Rightarrow \varphi = \tfrac{\pi}{4}$$

$$M(\sqrt{2},\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{4})$$

13- عين قيم الوسيط $\lambda$ حتى تكون الأشعة الثلاثة: $\vec{v}_1(1,\lambda,1)$ , $\vec{v}_2(2\lambda,-1,0)$ , $\vec{v}_3(-1,2\lambda,1)$ موازية لمستو واحد.

الحل: حتى توازي مستوياً واحداً يجب أن يكون: $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)=0$

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 2\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2\lambda & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 2\lambda^2-2=0 \Rightarrow \lambda^2=1 \Rightarrow \lambda=\pm 1$$

وهي قيم $\lambda$ حتى توازيالأشعة الثلاثة مستوياً واحداً.

14- لتكن $oxyz$ جملة إحداثيات ديكارتية متعامدة، ولتكن $M(1,2,3)$ نقطة منسوبة إلى هذه الجملة، أوجد إحداثياتها في جملة جديدة ناتجة منها بإنسحاب شعاعه $\overrightarrow{oO}(2,3,-1)$.

الحل: نضع دساتير الانسحاب:

$$\begin{aligned} x=x_0+X \quad &\Rightarrow 1=2+X \quad \Rightarrow X=-1 \\ y=y_0+Y \quad &\quad 2=3+Y \quad\quad Y=-1 \\ z=z_0+Z \quad &\quad 3=-1+Z \quad\quad Z=4 \end{aligned}$$

$$M(-1,-1,4)$$

15- بفرض $P$ مستو معطى بالشكل: $P\equiv x+2y+z+2=0$

المطلوب: أوجد معادلة المستوي $P$ في جملة جديدة ناتجة عن الجملة القديمة بانسحاب شعاعه $\overrightarrow{oO}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

الحل:نضع دساتير الانسحاب:

$$\left.\begin{aligned} x=x_0+X \\ y=y_0+Y \\ z=z_0+Z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x=2+X \\ y=1+Y \\ z=-1+Z \end{aligned}\right\}$$

نعوض في معادلة $P$ فنجد:

$$2+X+2(1+Y)+(-1+Z)+2=0$$

$$X+2Y+Z+5=0$$

16- لدينا $oxyz$ جملة إحداثيات ديكارتية متعامدة، ولتكن $M(\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{1+\sqrt{3}}{2},1)$ نقطة منسوبة إلى هذه الجملة.

أوجد زاوية الدوران $\theta$ للجملة المذكورة حول المحور $oz$ وفق الاتجاه الموجب، حتى تصبح إحداثيات هذه النقطة في الجملة الجديدة $M(1,1,1)$.

الحل: نضع دساتير الدوران حول $oz$:

$$\begin{aligned} x &= X\cos\theta - Y\sin\theta \\ y &= X\sin\theta + Y\cos\theta \\ z &= Z \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1-\sqrt{3}}{2}=\cos\theta-\sin\theta\\ \frac{1+\sqrt{3}}{2}=\sin\theta+\cos\theta\end{array}\right\}\text{بالجمع}\quad\Rightarrow\cos\theta=\frac{1}{2}\quad\left.\begin{array}{l}\\ \\ \end{array}\right\}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{3}$$
$$\text{بالطرح}\quad\Rightarrow\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

17- بفرض $S$ سطح معين بالمعادلة الآتية: $S\equiv x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-2=0$
عين الانسحاب المناسب كي تحذف الحدود الخطية من المعادلة، ثم أوجد معادلة السطح بعد ذلك؟

الحل: نعوض دساتير الانسحاب في المعادلة $S$:

$$x=x_0+X\ \ ,y=y_0+Y\ \ ,\ z=z_0+Z$$
$$(x_0+X)^2+(y_0+Y)^2+(z_0+Z)^2-2(x_0+X)+4(y_0+Y)$$
$$-2(z_0+Z)-2=0$$
$$x_0^2+X^2+2x_0X+y_0^2+Y^2+2y_0Y+z_0^2+Z^2+2z_0Z-$$
$$-2x_0-2X+4y_0+4Y-2z_0-2Z-2=0$$
$$\Rightarrow X^2+Y^2+Z^2+(2x_0-2)X+(2y_0+4)Y+(2z_0-2)Z+$$
$$+x_0^2+y_0^2+z_0^2-2x_0+4y_0-2z_0-2=0$$

لحذف الحدود الخطية نجعل أمثالها معدومة في المعادلة السابقة فنحصل على:

$$\left.\begin{array}{l}2x_0-2=0\\ 2y_0+4=0\\ 2z_0-2=0\end{array}\right\}\Rightarrow\ \ x_0=1\ ,y_0=-2,z_0=1$$

بالتالي شعاع الانسحاب هو $\vec{O}(1,-2,1)$

لإيجاد معادلة السطح بعد ذلك نعوض قيمة $x_0$ و $y_0$ و $z_0$ في المعادلة الأخيرة فنجد: $X^2+Y^2+Z^2-8=0$

18- بفرض أن $S$ سطح معين بالمعادلة الآتية: $S\equiv x^2+xy-1=0$
المطلوب: عين زاوية الدوران $\theta$ التي قامت بها الجملة $oxyz$ حول المحور $oz$، بحيث تحذف الحدود المستطيلة من معادلة السطح.

الحل: نضع دساتير الدوران حول المحور $oz$:

$$x=X\cos\theta-Y\sin\theta$$
$$y=X\sin\theta+Y\cos\theta$$

نعوض في معادلة السطح فنجد:

$$(X\cos\theta-Y\sin\theta)^2+(X\cos\theta-Y\sin\theta)(X\sin\theta+Y\cos\theta)-1=0$$
$$\Rightarrow X^2\cos^2\theta+Y^2\sin^2\theta-2XY\sin\theta\cos\theta+X^2\sin\theta\cos\theta+$$
$$+XY\cos^2\theta-XY\sin^2\theta-Y^2\sin\theta\cos\theta-1=0$$
$$\Rightarrow(\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta)X^2+(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta)Y^2+$$
$$+(-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta)XY-1=0$$

نجعل أمثال الحدود المستطيلة معدومة:

$$-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta-\sin^2\theta=0$$
$$\Rightarrow -\sin 2\theta+\cos 2\theta=0\Rightarrow \cos 2\theta=\sin 2\theta$$
$$\Rightarrow \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=1\Rightarrow tg2\theta=1\Rightarrow 2\theta=\tfrac{\pi}{4}\Rightarrow\theta=\tfrac{\pi}{8}$$

**تمارين غير محلولة:**

**1-** لتكن

$\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ , $\vec{b}=-4\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}$

$\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ , $\vec{d}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$

المطلوب:

1- برهن على أن الشعاعين $\vec{a},\vec{b}$ متوازيان، ثم أثبت أن الشعاعين $\vec{c},\vec{d}$ متعامدان.

2- احسب $\vec{a}+\vec{b}$ , $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ , $\vec{a}-\vec{c}$ , $\vec{d}-\vec{a}$

3- $\left|-\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}\right|$ , $|\vec{a}|+|\vec{c}|$ , $\left|\vec{a}+\vec{d}\right|$

**2-** لتكن: $\vec{a}=\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$ , $\vec{b}=-\vec{j}+4\vec{k}$ , $\vec{c}=3\vec{i}-4\vec{j}-\vec{k}$

المطلوب:

1-أوجد $\left|\vec{b}\wedge\vec{c}\right|$ , $\vec{a}\wedge(\vec{b}+\vec{c})$ , $(\vec{c}-\vec{a})\wedge 2\vec{b}$ , $\vec{a}.\vec{b}$ , $\vec{b}.\vec{c}$ , $\vec{a}\wedge\vec{b}$ , $\vec{b}\wedge\vec{a}$

2- أوجد الزاوية بين الشعاعين $\vec{b}$ , $\vec{a}$. 3- أوجد الزاوية بين الشعاعين $\vec{b}$ , $\vec{c}$.

**3-** لدينا الأشعة: $\vec{a}(1,2,-3)$, $\vec{b}(2,1,4)$, $\vec{c}(0,-5,0)$, $\vec{d}(-1,1,0)$

المطلوب: إيجاد: $(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{c}\wedge\vec{d})$ , $\vec{a}\wedge(\vec{d}+\vec{c})$ , $(\vec{a}\wedge\vec{d})\wedge\vec{c}$

**4-** لدينا الأشعة: $\vec{a}(1,2,-3)$, $\vec{b}(1,1,1)$, $\vec{c}(1,1,-1)$, $\vec{d}(0,2,0)$

المطلوب:

1- احسب $(\vec{b},\vec{c},\vec{d})$ , $(\vec{b}\wedge\vec{c})\wedge\vec{d}$

2- أثبت أن $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=-(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$

**5-** نفرض أنهلدينا الأشعة: $\vec{v}_1(2,3,1)$, $\vec{v}_2(-1,2,1)$, $\vec{v}_3(0,1,2)$. المطلوب:

1- احسب مساحة المثلث المنشأ على الشعاعين $\vec{v}_1$ , $\vec{v}_2$

2- احسب $\vec{v}_1+\vec{v}_3$ , $\vec{v}_1.\vec{v}_2$ , $\left|\vec{v}_1-\vec{v}_2\right|$ , $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$

**6-** لدينا النقاط: $a(0,0,0)$, $b(2,0,0)$, $c(4,2,0)$, $d(2,2,0)$.

المطلوب:

1- احسب مساحة متوازي الأضلاع $abcd$

2- احسب مساحة و محيط المثلث $abc$

**7-** $ABC$ مثلث رؤوسه النقاط: $A(6,-10,0)$ , $B(1,0,-5)$ , $C(6,10,10)$

أثبت أنه مثلث قائم، ثم احسب مساحته ومحيطه.

8- ارسم شكلا توضيحياً يبين موضع النقطة $A(2,3,2)$ في جملة محاور إحداثية متعامدة $oxyz$.

9- ارسم شكلا يبين موضع النقطة $B(1,3,2)$ وآخر للنقطة $C(2,5,3)$، وذلك فيحالة محاور إحداثية متعامدة $oxyz$

10- أوجد المعادلة الديكارتية لمنحني لمينسكات برنولي المعطى قطبياً بالعلاقة: $a>0$ ; $\rho^2 = 2a^2\cos 2\theta$ .

11- أثبت أن الشكل القطبي لمعادلة منحني الستروفوئيد المعطى ديكارتياً

بالعلاقة $y^2 = x^2.\frac{a+x}{a-x}$ هو $\rho = \frac{-a\cos 2\theta}{\cos\theta}$ ، ثم أثبت العكس (حيث $a>0$).

12- أثبت أن المعادلة القطبية لمنحني ورقة ديكارت المعطاة ديكارتياً بالعلاقة:

$a>0$ ; $x^3+y^3=3axy$ هي $\rho = \frac{3a\cos\theta.\sin\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}$ ، ثم أثبت العكس.

13- أوجد الإحداثيات الأسطوانية للنقطة $M(2\sqrt{3},2,1)$.

14- أوجد الإحداثيات الديكارتية للنقطة $M$ المعينة بالشكل: $M(2,\frac{\pi}{4},1)$.

15- أوجد الإحداثيات الكروية للنقطة $M(3,\frac{\pi}{4},2)$.

16- أوجد الإحداثيات الديكارتية للنقطتين: $A(1,\frac{\pi}{3},2)$ , $B(2,\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4})$.

17- بفرض لدينا النقطتين $A(-1,0,1)$ , $B(1,2,3)$ المطلوب:

اكتب إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ في الإحداثيات الأسطوانية.

18- بفرض $A(1,\frac{\pi}{2},2)$ , $B(2,\frac{\pi}{6},1)$ المطلوب:احسب إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ .

19- بفرض $A(1,\frac{3\pi}{4},2)$ و $B(2\sqrt{3},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4})$ المطلوب:احسب إحداثيات منتصف القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ .

20- لدينا السطح المعطى ديكارتيا بالمعادلة: $S = x^2+y^2+z^2+2x+1=0$

المطلوب: أوجد الشكل الأسطواني لهذا السطح .

21- لتكن $M(0,1,2)$ نقطة منسوبة إلى الجملة $oxyz$.عين شعاعالانسحاب الذي قامت به الجملة $oxyz$ حتى أصبحت إحداثيات النقطة $M$ في الجملة الجديدة على الشكل $M(-2,-2,-3)$.

22- بفرض لدينا نقطة $M(0,\sqrt{2},1)$ منسوبة إلى جملة محاور إحداثية متعامدة $oxyz$، المطلوب:

عين زاوية الدوران التي قامت بها الجملة $oxyz$ حولالمحور $oz$ حتىأصبحت إحداثيات النقطة $M$في الجملة الجديدة على النحو التالي $M(1,1,1)$.

23- بفرض $S$ سطح معين بالمعادلة الآتية: $S \equiv x^2+y^2+z^2+2x+4y-5=0$

المطلوب: عين الانسحاب المناسب لجملة المحاور الإحداثية كي تحذف الحدود الخطية من معادلة السطح المذكور، ثم أوجد معادلة السطح بعد ذلك؟

24- أوجد الزاوية التي يجب أن تدورها جملة المحاور الإحداثية $oxyz$كي نحذف الحد المستطيلي من المعادلة الآتية: $x^2+3xy-x+y=0$ مع العلم أن الدوران يتم حول المحور $oz$.

25- سطح معين بالمعادلة: $S \equiv x^2+y^2+2z^2-3xy+x-1=0$

المطلوب:عين زاوية الدوران $\theta$ حول المحور $oz$، بحيث ينعدم الحد المستطيلي فيها، ثم أوجد معادلة السطح بعد ذلك.

## الفصل الثاني: المستوي في الفراغ (Plane in Space)

### (2-2-1) تعريف المستوي:

وجدنا في المرحلة الثانوية أن المستوي يعرف بأنه سطح غير محدد (يقرب إلى أذهان الطلاب بأنه شكل من الأشكال الهندسية، متوازي أضلاع، دائرة، مستطيل، مربع، ...)، وإذا اشترك معه مستقيم بأكثر من نقطة انطبق عليه.

يتعين المستوي بأكثر من طريقة منها أنه يتعين بمستقيم ونقطة خارجة عنه، كما يتعين بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة، ويتعين أيضاًبمستقيمين متقاطعين.

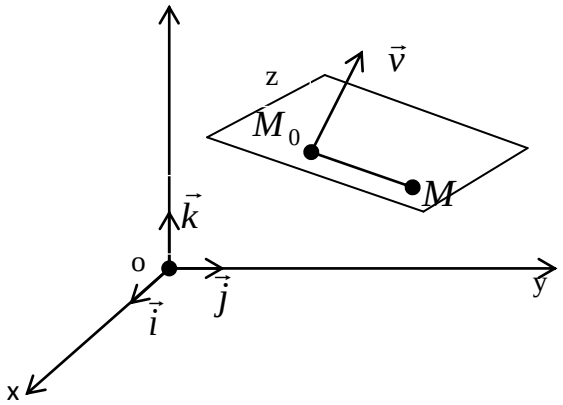
وسنعتمد في بحثنا هذا لتعيين مستوٍ على النظرية التي تقول: من نقطة خارجة عن مستقيم أو واقعة عليه يمر مستو وحيد عمودي على هذا المستقيم.

### (2-2-2) معادلة مستوٍ يمر من نقطة معلومة ويعامد شعاعاً معلوماً:

بفرض أن $M_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطة معلومة، وأن $\vec{v}(p,q,r)$ شعاع معلوم، والمطلوب إيجاد معادلة المستوي المار من $M_0$ والمتعامد مع $\vec{v}$.

نفرض أن $M(x,y,z)$نقطة دارجة على المستوي المطلوب في جميع أوضاع النقطة $M$ يكون $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{v}$، يعبر عن هذه العلاقة بالشكل: $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}.\ \vec{v} = 0$ ،تسمى المعادلة $\overrightarrow{M_0M}.\ \vec{v} = 0$ بالمعادلة الشعاعية للمستوي المطلوب .

ولإيجاد المعادلة الديكارتية نكتب الجداء السلمي السابق بشكل تحليلي بعد كتابة كل من الشعاعين $\vec{v}$ و $\overrightarrow{M_0M}$ بشكل تحليلي، وكل ذلك منسوباً لجملة محاور إحداثية مباشرة $oxyz$، انظر الشكل (2-1).



الشكل (2-1)

$$\overrightarrow{M_0M} = (x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k}$$

$$\vec{v} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$$

وتصبح المعادلة:

$$p(x-x_0) + q(y-y_0) + r(z-z_0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad px + qy + rz - (px_0 + qy_0 + rz_0) = 0$$

فإذا فرضنا أن $h = -(px_0 + qy_0 + rz_0)$ ،

بالتالي تصبح معادلة المستوي المار من النقطة $M_0$ والذي يعامد الشعاع $\vec{v}$ على الشكل الآتي:

$$\boxed{px + qy + rz + h = 0}$$

يرمز عادة إلى الطرف الأيسر بالرمز $P(x,y,z)$، أي إن $P$ تابع لكل من $x, y, z$ وتكتب المعادلة العامة للمستوي بالشكل:

$$\boxed{P(x,y,z) \equiv px + qy + rz + h = 0}$$

ملاحظة:

يسمى الشعاع $\vec{v}$ بناظم المستوي $P$ ،ويرمز إليه بالرمز $\vec{N}$.

### ( 2-2-3) بعض المستويات الخاصة:

وجدنا في الفقرة السابقة أن المعادلة العامة للمستوي:

$$P(x,y,z) \equiv px + qy + rz + h = 0$$

إذا كان في هذه المعادلة بعض الأمثال معدودة نحصل على الحالات الآتية:

1- إذا كان $h = 0$ فالمعادلة تصبح بالشكل $P(x,y,z) \equiv px + qy + rz = 0$ ، وتمثل هذه المعادلة معادلة مستو يمر من مبدأ الإحداثيات.

2- إذا كان $p = 0$ فالمعادلة تصبح بالشكل $P(x,y,z) \equiv qy + rz + h = 0$ وتمثل هذه المعادلة معادلة مستو يوازي المحور $ox$ ،لأن $\vec{N}(0,q,r)$ و $\overrightarrow{ox}(1,0,0)$ متعامدين، وبالتالي فإن $\vec{N}.\overrightarrow{ox} = 0$

3- إذا كان $q = 0$ فالمعادلة تصبح بالشكل $P(x,y,z) \equiv px + rz + h = 0$ ،وتمثل هذه المعادلة معادلة مستو يوازي المحور $oy$.

4- إذا كان $r = 0$ فالمعادلة تصبح بالشكل $P(x,y,z) \equiv px + qy + h = 0$ ، وتمثل هذه المعادلة معادلة مستو يوازي المحور $oz$.

5- إذا كان $r = q = 0$ فالمعادلة تصبح بالشكل $P(x,y,z) \equiv px + h = 0$ ،وهي تمثل معادلة مستو يوازي المستوي $yoz$.

6- إذا كان $r = p = 0$ فالمعادلة تصبح بالشكل $P(x,y,z) \equiv qy + h = 0$ ،وهي تمثل معادلة مستو يوازي المستوي $xoz$.

7- إذا كان $p = q = 0$ فالمعادلة تصبح بالشكل $P(x,y,z) \equiv rz + h = 0$ ،وهي تمثل معادلة مستو يوازي المستوي $xoy$.

8- في الحالات 5-6-7 السابقة إذا كان $h = 0$ فالمعادلات تمثل المستويات الإحداثية:

فمعادلة المستوي $xoy$ هي $z = 0$.

ومعادلة المستوي $yoz$ هي $x = 0$.

ومعادلة المستوي $zox$ هي $y = 0$.

مثال: أثبت أن معادلة المستوي المار من النقطة $M(1,2,3)$ والمعامد للشعاع $\vec{N}(1,0,3)$ ، تمثل مستوياً موازياً للمحور $oy$.

الحل: لدينا المعادلة العامة للمستوي المار بنقطة والمعامد لشعاع، وهي:

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) + r(z - z_0) = 0$$

نعوض فيها:

$$(x-1) + 0 + 3(z-3) = 0 \Rightarrow$$
$$x + 3z - 10 = 0$$

بما أن المعادلة الناتجة من الشكل $P(x,y,z) \equiv px + rz + h = 0$ ، فهي تمثل معادلة مستو موازي للمحور $oy$.

**( 2-2-4) معادلة مستوي يمر من نقطة معلومة ويوازي شعاعين معلومين:**

بفرض $M_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطة معلومة من المستوي المطلوب، والشعاعان المعلومانهما $\vec{v}_1(p_1, q_1, r_1)$ , $\vec{v}_2(p_2, q_2, r_2)$ .نعرف من هذا المستوي النقطة $M_0$ أما ناظمة فله منحى الشعاع:

$$\vec{N} = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$$

ونعود بالتالي إلى الحالة الرئيسة (2−2−2) حيث نكتب معادلة المستوي بالشكل:

$$\overrightarrow{M_0M}\ .\ (\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) = 0 \Rightarrow$$

$$(\overrightarrow{M_0M}\ ,\ \vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0$$

وهي معادلة المستوي المطلوب.

مثال: إن معادلة المستوي المار من النقطة $M_0(1,4,6)$ والموازي للشعاعين $\vec{v}_1(3,1,-1)$ , $\vec{v}_2(0,2,3)$ هي:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-4 & z-6 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 5x-9y+6z-5=0$$

**(2−2−5) معادلة مستو عُرفت منه ثلاث نقاط غير واقعة على استقامة واحدة:**

إذا عرفنا من المستوي $P$ ثلاث نقاط $M_1, M_2, M_3$ غير واقعة على استقامة واحدة، فإن باستطاعتنا إرجاع هذه الحالة إلى الحالة الرئيسة( 2−2−2)، لأننا نعرف إحدى نقاطه ولتكن مثلاً $M_1$، ونعرف منحنى ناظمه المعين بالمتجه: $\vec{N} = \overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3}$ .أوأي جداء خارجي آخر للأشعة $\overrightarrow{M_2M_3}$ , $\overrightarrow{M_1M_3}$ , $\overrightarrow{M_1M_2}$ فتكون معادلته:

$$\overrightarrow{M_1M}\ .\ (\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \overrightarrow{M_1M_3}) = 0 \quad ;\ \forall M(x,y,z) \in P$$

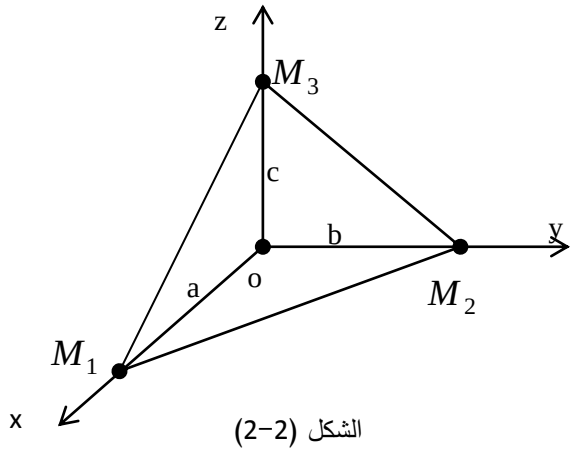
$$\Rightarrow (\overrightarrow{M_1M}\ ,\ \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}) = 0$$

ويكتب تحليليا على الشكل:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

وهي معادلة المستوي المطلوب.

حالة خاصة: إذا كانت النقاط الثلاث هي نقاط تقاطع المستوي مع المحاورالإحداثية؛ أي: $M_1(a,0,0)$ , $M_2(0,b,0)$ , $M_3(0,0,c)$ ،انظرالشكل( 2−2)




الشكل (2−2)

تصبح معادلة المستوي بالشكل :

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

نسمي الأعداد $c, b, a$ بالأجزاءالتي يقتطعها المستوي من المحاور الإحداثية،

وتسمى معادلة المستوي بمعادلة مستوٍ يقطع المحاور الإحداثية.

مثال:اكتب معادلة المستوي الآتي بدلالة الأجزاء المقتطعة من المحاور الإحداثية:

$$P \equiv 2x-3y-2z+6=0$$

الحل: يجب كتابة معادلة $P$ بالشكل: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

ولذلك نقسم طرفي المعادلة على $(-6)$، فنجد:

$$\frac{2x}{-6}-\frac{3y}{-6}-\frac{2z}{-6}=1 \Rightarrow \frac{x}{(\frac{-6}{2})}+\frac{y}{(\frac{6}{3})}+\frac{z}{(\frac{6}{2})}=1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2}=1$$

بالتالي المستوي يقطع المحاور الإحداثية بالنقاط: $(0,0,2)$, $(0,2,0)$, $(-3,0,0)$

**(2-2-6) الزاوية بين مستويين:**

ليكن لدينا المستويان:

$$P_1(x,y,z) \equiv p_1x+q_1y+r_1z+h_1=0$$
$$P_2(x,y,z) \equiv p_2x+q_2y+r_2z+h_2=0$$

المتقاطعان، إن الزاوية بين المستويين $P_1$ , $P_2$ هي بالتعريف الزاوية بين منحيي ناظميهما.

إن منحى ناظم المستوي الأول $\vec{N}_1(p_1,q_1,r_1)$ ومنحى ناظم المستوي الثاني $\vec{N}_2(p_2,q_2,r_2)$. بفرض أن $\theta$ الزاوية الكائنة بين ناظمي المستويين،نجد أن:

$$\vec{N}_1.\vec{N}_2=\left|\vec{N}_1\right|.\left|\vec{N}_2\right|.\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{\vec{N}_1.\vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right|.\left|\vec{N}_2\right|} \Rightarrow \cos\theta=\frac{p_1p_2+q_1q_2+r_1r_2}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}\ .\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}$$

نلاحظ: إن الطرف الأيمن من هذه العلاقة هو مقدار عددي إشارته من إشارة البسط، فإذا كان البسط موجباً،تكون الزاوية بين المستويين حادة، وإذا كان سالباً، تكون الزاوية بينهما منفرجة، وبما أننا نحسب الزاوية بين منحيي الناظمين،فإنه يكفي أن نعين الزاوية الحادة ونأخذ الإشارة الموجبة:

$$\cos\theta=\frac{\left|\vec{N}_1.\vec{N}_2\right|}{\left|\vec{N}_1\right|.\left|\vec{N}_2\right|}$$

ملاحظة: إن شرط تعامد مستويين هو: $P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \perp \vec{N}_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1.\vec{N}_2=0$

ويقال إن المستويين متوازيان إذا توازى ناظماهما أي: $P_1 \backslash\backslash P_2 \Leftrightarrow \vec{N}_1 \backslash\backslash \vec{N}_2 \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2}=\frac{q_1}{q_2}=\frac{r_1}{r_2}$

وفي حالة تطابق المستويين $P_1$ , $P_2$، فإن: $\frac{p_1}{p_2}=\frac{q_1}{q_2}=\frac{r_1}{r_2}=\frac{h_1}{h_2}$

**(2-2-7) قوة نقطة بالنسبة لمستو:**

ليكن المستوي $P$ المعين بالمعادلة الآتية $P(x,y,z) \equiv px+qy+rz+h=0$ ،ولتكن $M_0(x_0,y_0,z_0)$ نقطة ما.

عندئذ لتحديد وضع النقطة $M_0$ بالنسبة للمستوي $P$ نعوض إحداثياتها في معادلته، فإما أن يكون المقدار موجباً، فنقول إن $M_0$ واقعة وفقاتجاه ناظم المستوي،وإما سالباً، فتكون $M_0$ واقعة في عكس اتجاه الناظم لـ $P$ ،وإما صفراً، فتكون النقطة $M_0$ واقعة على المستوي $P$ .

اصطلح على تسمية المقدار $P_0 = p_0x + q_0y + r_0z + h_0$ بالقوة التحليلية للنقطة $M_0$ بالنسبة للمستوي $P$ .

ملاحظة: استنادا إلى هذا المصطلح نستطيع أن نورد تعريفاً جديداً للمستوي بأنه المحل الهندسي لمجموعة نقاط الفراغ المعدومة القوة بالنسبة لهذا المستوي.

مثال: لتكن النقطتان $M_1(1,2,3)$ , $M_2(0,2,-1)$ والمستوي المعطى بالشكل:

$$P(x,y,z) \equiv x - y + 3z - 10 = 0$$

حدد موضع $M_1$ , $M_2$ بالنسبة للمستوي $P$ ،هل تقعان في جهة واحدة منالمستوي أم في جهتين مختلفتين ؟

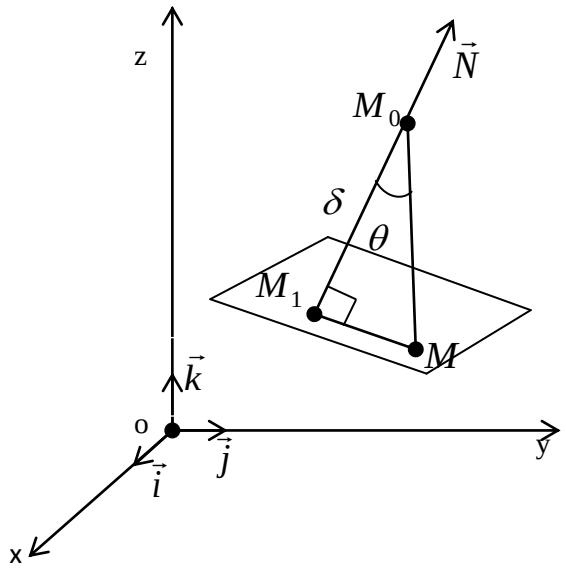
الحل: نوجد القوة التحليلية لكل نقطة:

$$P(1,2,3) = -2$$

$$P(0,2,-1) = -15$$

النقطتان تقعان في جهة واحدة من المستوي

(عكس اتجاه الناظم).




الشكل (2−3)

**( 2−2−8) بعد نقطة عن مستو:**

ليكن لدينا المستوي: $P(x,y,z) \equiv px + qy + rz + h = 0$

ولتكن $M_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطة واقعة خارج المستوي $P$ ،

انظر الشكل (2−3):

نريد حساب $\delta$ بعد $M_0$ عن $P$ :

لحساب بعد $M_0$ عن المستوي $P$ نحسب الجداء السلمي:

$$\overrightarrow{MM_0}.\vec{N} = \left|\overrightarrow{MM_0}\right|.\left|\vec{N}\right|.\cos\theta$$

حيث $M$ نقطة ما من المستوي $P$ و $\vec{N}$ ناظم المستوي، أما المقدار

$\left|\overrightarrow{MM_0}\right|.\cos\theta$ فيمثل من الشكل(2−3) الطول الجبري $\delta$ ، حيث $\theta$ الزاوية بين $\overrightarrow{MM_0}$ و $\overrightarrow{M_1M_0}$

حيث $M_1$ مسقط $M_0$ على المستوي $P$ ، وبالتالي نكتب العلاقة الآتية:

$$\overrightarrow{MM_0}.\vec{N} = \delta.\left|\vec{N}\right| \Rightarrow \delta = \frac{\overrightarrow{MM_0}.\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|}$$

$$\delta = \frac{p(x_0 - x) + q(y_0 - y) + r(z_0 - z)}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} =$$

$$\frac{px_0 + qy_0 + rz_0 - (px + qy + rz)}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}$$

إن $M(x,y,z)$ نقطة من المستوي $P$ ،فهي تحقق معادلته، بالتالي لدينا:

$$px+qy+rz=-h$$

ومنه:

$$\delta=\frac{px_0+qy_0+rz_0+h}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} \Leftrightarrow \delta=\frac{P(x_0,y_0,z_0)}{\left|\vec{N}\right|}$$

إن العدد $\delta$ يكون موجباً إذا كانت $M_0$ واقعة وفق اتجاه الناظم للمستوي، ويكون سالباً في الحالة المعاكسة، ومعدوماً إذا وقعت $M_0$ على المستوي.

لذلك عندما نريد حساب بعد النقطة $M_0$ عن المستوي دون تميز وضعها بالنسبة لجهة الناظم، فإننا نحسب هذا البعد من العلاقة الموجبة:

$$\delta=\frac{\left|P(x_0,y_0,z_0)\right|}{\left|\vec{N}\right|}$$

مثال:احسب بعد النقطة $A(1,-1,3)$ عن المستوي: $P\equiv x-2y+3z-6=0$

الحل:

$$\delta=\frac{\left|1+2+9-6\right|}{\sqrt{1+4+9}}=\frac{6}{\sqrt{14}}$$

**( 2-2-9) إيجاد معادلة المستوي المنصف لزاوية مستويين:**

ليكن لدينا المستويان:

$$P_1(x,y,z)\equiv p_1x+q_1y+r_1z+h_1=0$$
$$P_2(x,y,z)\equiv p_2x+q_2y+r_2z+h_2=0$$

إن المستوي المنصف داخلاً أو خارجاً لإحدى الزوايا الثنائية الحادثة من تقاطع هذين المستويين، هو المحل الهندسي للنقاط المتساوية البعد عن هذين المستويين.

نصطلح عادة على تسمية المستوي المنصف للزاوية الثنائية الحادة المستوي المنصف الداخلي، كما نصطلح على تسمية المستوي المنصف للثنائية المجاورة لها(المنفرجة) المستوي المنصف الخارجي.

إذا كانت $M(x,y,z)$ نقطة تنتمي إلى أحد المستويين المنصفين، فإن بعدها عن المستوي الأول يساوي بعدها عن المستوي الثاني، ونكتب:

$$\frac{\left|P_1(x,y,z)\right|}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}}=\frac{\left|P_2(x,y,z)\right|}{\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}$$
$$\Rightarrow \frac{P_1(x,y,z)}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}}=\pm\frac{P_2(x,y,z)}{\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}$$

فإذا اعتبرنا إشارة الطرف الأيمن موجبة، فإننا نحصل على معادلة أحد المنصفين، وإذا اعتبرنا إشارة الطرف الأيمن سالبة، فإننا نحصل على معادلة المنصف الآخر،والمعادلة الأخيرة تعطي معادلتي المستويين المنصفين معاً.

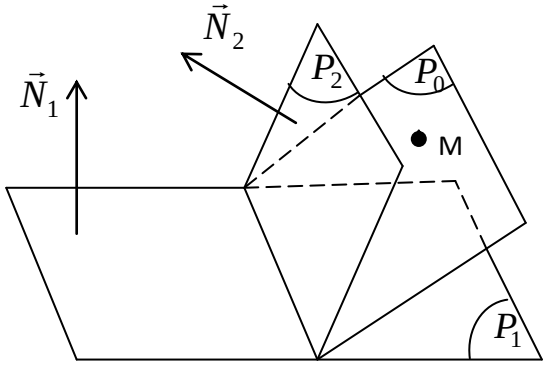
لتمييز المنصف الداخلي(منصف الزاوية الحادة) عن المنصف الخارجي(منصف الزاوية المنفرجة)، نلاحظ مايلي:

إن الإشارة (+) تعطي نقاطاً في الجهة الموجبة أو السالبة لـ $\vec{N}_1$ , $\vec{N}_2$ معاً بالنسبة للمستويين، فإذا كانت الزاوية بين $\vec{N}_1$ , $\vec{N}_2$ حادة؛ أي إذا كان $\vec{N}_1 . \vec{N}_2 > 0$ ،كما في الشكل(2−4).

فإن الإشارة (+) تعطي المنصف الخارجي، وبالعكس الإشارة (−) تعطي المنصف الداخلي.

أما إذا كان $\vec{N}_1 . \vec{N}_2 < 0$ ، فالإشارة (−) تعطي المنصف الخارجي والإشارة (+) تعطي المنصف الداخلي.

وبالطبع لا يمكن تمييز المنصف الداخلي عن المنصف الخارجي إذا كان $\vec{N}_1 . \vec{N}_2 = 0$ ؛ أي إذا تعامد المستويان.




الشكل (2−4)

مثال: أوجد معادلتي المستويين المنصفين الداخلي والخارجي لزاوية المستويين:

$$P_1 \equiv 2x - y + 2z - 1 = 0$$
$$P_2 \equiv -4x + 3y + 5 = 0$$

الحل:

$$\frac{2x - y + 2z - 1}{\sqrt{4+1+4}} = \pm \frac{-4x + 3y + 5}{\sqrt{16+9}} \Rightarrow$$
$$5(2x - y + 2z - 1) = \pm 3(-4x + 3y + 5)$$

نلاحظ أن: $\vec{N}_1 . \vec{N}_2 = -11 < 0$ بالتالي:

$(+) \Leftarrow$ $11x - 7y + 5z - 10 = 0$ تمثل المستوي المنصف الداخلي

$(-) \Leftarrow$ $-x + 2y + 5z + 5 = 0$ تمثل المستوي المنصف الخارجي .

**تمارين محلولة:**

1- أوجد معادلة المستوي المار من النقطة $A(2,3,4)$ والمعامد للشعاع $\vec{N}(0,1,2)$ ، ثم أثبت أن المستوي الناتج يمثل مستوياً موازياً للمحور $\overrightarrow{ox}$.

الحل: نعوض في المعادلة:

$$p(x-x_0)+q(y-y_0)+r(z-z_0)=0$$
$$\Rightarrow\ y+2z-11=0$$

هذه المعادلة تمثل مستوياً موازياً للمحور $\overrightarrow{ox}$، لأنها من الشكل: $qy+rz+h=0$

2- أوجد معادلة مستو يمر من النقطة $A(1,1,0)$ ويوازي المستوي:

$$P\equiv 2x+3y-6z+1=0$$

الحل: بسبب التوازي فإن الناظمين متوازيين، بالتالي $\vec{N}(2,3,-6)$ ، نعوض في المعادلة:

$$p(x-x_0)+q(y-y_0)+r(z-z_0)=0$$
$$\Rightarrow\quad 2x+3y-6z-5=0$$

3- احسب بعد النقطة $A(-1,0,1)$ عن المستوي الإحداثي $oyz$.

الحل:معادلة المستوي $oyz$ هي $P\equiv x=0$ و $\vec{N}(1,0,0)$ ،بالتالي:

$$\delta=\frac{|P(-1,0,1)|}{|\vec{N}|}=\frac{|-1|}{1}=1$$

4- أوجد المحل الهندسي للنقاط التي تبعد كل منها عن المستوي: $P\equiv x+y+2z+2=0$ بعداً قدره 2.

الحل: بفرض $M(x,y,z)$ نقطة كيفية تحقق أنها تبعد عن المستوي بعداً قدره 2.

$$2=\delta=\frac{|x+y+2z+2|}{\sqrt{5}}\Rightarrow 2\sqrt{6}=|x+y+2z+2|$$

$$x+y+2z+2=\pm 2\sqrt{6}\Rightarrow\begin{cases}x+y+2z+2+2\sqrt{6}=0\\ x+y+2z+2-2\sqrt{6}=0\end{cases}$$

5- أوجد معادلة المستوي المار من النقطة $A(2,3,-4)$ والذي يعامد المستقيم المار من النقطتين $B(5,4,-6)$ و $C(8,5,-8)$.

الحل:المستوي يمر من $A(2,3,-4)$ وناظمه له نفس منحى $\overrightarrow{BC}$ حيث:

$$\overrightarrow{BC}=3\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}\Rightarrow\vec{N}=\overrightarrow{BC}(3,1,-2)$$
$$\Rightarrow p(x-x_0)+q(y-y_0)+r(z-z_0)=0$$
$$\Rightarrow\quad 3x+y-2z-17=0$$

6- لتكن لدينا النقاط $C(1,0,2)$ , $B(0,2,1)$ , $A(2,1,0)$ ، المطلوب:

اكتب معادلة المستوي المار بهذه النقاط الثلاثة.

الحل:تعطى معادلة المستوي بالعلاقة:

$$(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=0$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}x-2 & y-1 & z\\ -2 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 2\end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow x+y+z-3=0$$

7- اكتب معادلة المستوي $P$ المعطى بالعلاقة: $P\equiv 2x+4y+6z-24=0$

بدلالة الأجزاء المقطوعة من المحاور الإحداثية.

الحل: نقسم طرفي المعادلة على 24 فنجد:

$$\frac{2x}{24}+\frac{4y}{24}+\frac{6z}{24}=1 \Rightarrow \frac{x}{12}+\frac{y}{6}+\frac{z}{4}=1$$

8- أوجد معادلة المستوي المار بالنقطة $A(2,1,-1)$ والذي يقطع المحور $ox$ بنقطة فاصلتها تساوي 2، والمحور $oz$ بنقطة راقمها يساوي 1.

الحل: المطلوب إيجاد معادلة مستوي يمر بالنقاط: $A(2,1,-1)\ ,B(2,0,0),C(0,0,1)$

ومعادلة المستوي تعطى بالمعادلة: $(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=0$ حيث $M$ نقطة كيفية من المستوي.

$$\begin{vmatrix}x-2 & y-1 & z+1\\ 0 & -1 & 1\\ -2 & -1 & 2\end{vmatrix}=0 \ \Rightarrow -x-2y-2z+2=0$$

9- لدينا المستوي $P$ المعطى بالعلاقة: $P\equiv 3x-\lambda y+6z-6=0$

المطلوب: عين قيمة $\lambda$ بحيث يقطع المستوي $P$ أجزاء متساوية من المحورين $ox$ و $oy$، ثم احسب بعد النقطة $B(1,2,3)$ عن المستوي $P$.

الحل:

$$3x-\lambda y+6z=6 \Rightarrow \frac{3x}{6}-\frac{\lambda y}{6}+\frac{6z}{6}=1$$

$$\frac{x}{\left(\frac{6}{3}\right)}+\frac{y}{\left(\frac{6}{-\lambda}\right)}+\frac{z}{1}=1\Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{y}{\left(\frac{6}{-\lambda}\right)}+\frac{z}{1}=1$$

حتى يقطع أجزاء متساوية من المحورين $ox$ و $oy$ يجب أن يكون:

$$2=\frac{-6}{\lambda} \Rightarrow \lambda=-3\Rightarrow 3x+3y+6z-6=0$$

نحسب بعد $B(1,2,3)$ عن المستوي $P$ $\quad\delta=\dfrac{|3+6+18-6|}{\sqrt{9+9+36}}=\dfrac{21}{\sqrt{54}}=\dfrac{7}{\sqrt{6}}$

10- لدينا المستوي $P$ المعطى بالعلاقة: $P\equiv \lambda x+2y+z-2=0$

المطلوب:

1- عين قيمة $\lambda$ بحيث يقطع المستوي $P$ أجزاء متساوية من المحورين $ox$ و $oz$.

2- ادرس وضع النقطتين $A(0,1,2)$ و $B(2,3,-1)$ بالنسبة لـ $P$.

الحل:

$$\frac{\lambda x}{2}+\frac{2y}{2}+\frac{z}{2}=1 \Rightarrow \frac{x}{\left(\frac{2}{\lambda}\right)}+\frac{y}{1}+\frac{z}{2}=1 \qquad -1$$

حتى يقطع أجزاء متساوية من المحورين $ox$ و $oz$ يجب أن يكون:

$$\frac{2}{\lambda}=2 \Rightarrow \lambda=1 \Rightarrow P \equiv x+2y+z-2=0$$

2- ندرس وضع $A(0,1,2)$ و $B(2,3,-1)$ بالنسبة لـ $P$.

$$P(A)=0+2+2-2=2>0$$
$$P(B)=2+6-1-2=5>0$$

هذا يعني أن النقطتين واقعتين في جهة واحدة من المستوي $P$، وهي الجهة الموافقة لجهة ناظم المستوي $P$.

11- بفرض أن لدينا النقطتين $A(-1,0,2)$ , $B(1,1,3)$ والمستوي $P$ المعطى بالشكل: $P \equiv 2x-y+z+3=0$

المطلوب:

1- احسب أقصر بعد بين النقطة $B(1,1,3)$ والمستوي $P$.

2- اكتب معادلة المستوي المار من النقطة $A(-1,0,2)$ والموازي للمستوي $P$.

الحل: 1- المطلوب هو إيجاد بعد $B$ عن $P$:

$$\delta=\frac{|P(1,1,3)|}{|\vec{N}_P|} \qquad ; \ \vec{N}_P(2,-1,1)$$

$$\delta=\frac{|2-1+6|}{\sqrt{6}}=\frac{7}{\sqrt{6}}$$

2- المستوي المطلوب موازياً لـ $P$، أي له نفسناظمه $\vec{N}_P(2,-1,1)$ ويمر منالنقطة $A(-1,0,2)$، نعوض في المعادلة:

$$p(x-x_0)+q(y-y_0)+r(z-z_0)=0$$
$$\Rightarrow 2x-y+2z=0$$

12- لدينا المستوي $P$ المعطى بالعلاقة: $P \equiv 11x-2y+7z-2=0$

المطلوب: اكتب معادلة هذا المستوي في الإحداثيات الأسطوانية.

الحل: نعوض العلاقات الآتية في معادلة المستوي: $x=\rho\cos\theta$ , $y=\rho\sin\theta$ , $z=z$ فنجد:

$$P \equiv 11\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta+7z-2=0$$

13- اكتب الشكل الأسطواني لمعادلة المستوي المار بالنقطة $A(1,3,1)$ والمعامد للمستويين:

$$P_1 \equiv x+y-2=0 \ \ \& \ P_2 \equiv y-z+1=0$$

الحل: بما أن المستوي يعامد $P_1$ , $P_2$ فمنحاه بالتالي $\vec{N}=\vec{N}_1 \wedge \vec{N}_2$:

$$\vec{N}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \qquad ; \ \vec{N}_1(1,1,0) \ , \ \vec{N}_2(0,1,-1)$$

$$\vec{N}=-\vec{i}+\vec{j}+\vec{k} \ \Rightarrow \ \vec{N}(-1,1,1)$$

لدينا $A(1,3,1)$ نعوض في المعادلة:

$$p(x-x_0)+q(y-y_0)+r(z-z_0)=0$$
$$\Rightarrow -x+y+z-3=0$$

في الإحداثيات الأسطوانية: لدينا $x=\rho\cos\theta$ , $y=\rho\sin\theta$ , $z=z$ نعوض في المعادلة السابقة،فنجد:

$$-\rho\cos\theta+\rho\sin\theta+z-3=0$$

14- لدينا النقطة $A(0,2,0)$ والمستوي $P$ المعطى بالعلاقة: $P\equiv 3x+2y+3z+1=0$

المطلوب:

1- ادرس وضع النقطة $A$ بالنسبة للمستوي $P$.

2- اكتب معادلة المستوي $P$ في الإحداثيات الكروية.

الحل:

1- نعوض إحداثيات $A$ في معادلة المستوي $P$ ،فنجد: $P(0,2,0)=5>0$ هذا يعني أن النقطة $A$ تقع في الجهة الموجبة للناظم، أي وفق اتجاه ناظم المستوي.

2- دساتير الانتقال من الديكارتي إلى الكروي هي:

$$\left.\begin{array}{l} x=r\sin\varphi.\cos\theta \\ y=r\sin\varphi.\sin\theta \\ z=r\cos\varphi \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$P\equiv 3r\sin\varphi.\cos\theta+2r\sin\varphi.\sin\theta+3r\cos\varphi+1=0$$

15- لدينا المستويان $P_1$ , $P_2$ المعينان بالشكل:

$$P_1\equiv x+y+5z-1=0$$
$$P_2\equiv 2x+3y+2=0$$

المطلوب: أوجد الزاوية بين المستويين $P_1$ , $P_2$.

الحل:الزاوية بين $P_1$ , $P_2$ هي نفسها الزاوية بين $\vec{N}_1$ , $\vec{N}_2$.

$$\vec{N}_1(1,1,5)\ ,\ \vec{N}_2(2,3,0)$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{N}_1.\vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right|.\left|\vec{N}_2\right|}\ ;\ \left|\vec{N}_1\right|=\sqrt{27}\ ,\left|\vec{N}_2\right|=\sqrt{13}$$

$$\vec{N}_1.\vec{N}_2=5$$

$$\cos\theta=\frac{5}{\sqrt{27}\ .\sqrt{13}}\Rightarrow\theta=\arccos(\frac{5}{\sqrt{27}\ .\sqrt{13}})\approx 74.5^\circ$$

16- أوجد معادلة المستوي المنصف الداخلي لزاوية المستويين $P_1$ , $P_2$ الآتيين:

$$P_1\equiv 4x+3y+4=0$$
$$P_2\equiv x+2y+2z+1=0$$

الحل:

$$\vec{N}_1(4,3,0)\ ,\ \vec{N}_2(1,2,2)\ ,\ \left|\vec{N}_1\right|=5\ ,\ \left|\vec{N}_2\right|=3$$

$$\frac{P_1(x,y,z)}{\left|\vec{N}_1\right|} = \pm\frac{P_2(x,y,z)}{\left|\vec{N}_2\right|} \Rightarrow \frac{4x+3y+4}{5} = \pm\frac{x+2y+2z+1}{3}$$

المنصف الداخلي يوافق اختيار الإشارة(−):

$$;\ \vec{N}_1\ .\ \vec{N} \qquad > \ (-) \quad \text{داخلي}$$

$$\Rightarrow 17x+19y+10z+17=0$$

$\boxed{17-}$ لدينا المستويان $P_1$ , $P_2$ المعينان بالشكل:

$$P_1 \equiv 4y+2z+1=0$$

$$P_2 \equiv 2x+4z+2=0$$

المطلوب:

1− أوجد الزاوية بين المستويين $P_1$ , $P_2$ .

2− أوجد معادلة المستوي المنصف الداخلي لزاوية هذين المستويين.

الحل:1−

$$\vec{N}_1(0,4,2)\ ,\ \vec{N}_2(2,0,4)$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{N}_1.\vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right|.\left|\vec{N}_2\right|}\quad ;\ \left|\vec{N}_1\right|=\sqrt{20}\quad ,\left|\vec{N}_2\right|=\sqrt{20}$$

$$\vec{N}_1.\vec{N}_2=8$$

$$\cos\theta=\frac{8}{20}\ \Rightarrow \theta=\arccos(\frac{2}{5}) \quad =66.4°$$

2− نعوض في المعادلة:

$$\frac{P_1(x,y,z)}{\left|\vec{N}_1\right|} = \pm\frac{P_2(x,y,z)}{\left|\vec{N}_2\right|} \Rightarrow \frac{4y+2z+1}{\sqrt{20}} = \pm\frac{2x+4z+2}{\sqrt{20}}$$

المنصف الداخلي يوافق اختيار الإشارة (−) $\vec{N}\ .\ \vec{N}_1$ ;

$$\Rightarrow 2x+4y+6z+3=0$$

**تمارين غير محلولة:**

$\boxed{1-}$ بفرض أن $M(1,2,5)$ , $\vec{v}(0,2,3)$ ، المطلوب:

1− أوجد معادلة المستوي $P$ المار من النقطة $M$ والمعامد للشعاع $\vec{v}$ .

2− أثبت أن المستوي الناتج هو مستو موازٍ للمحور $\overrightarrow{ox}$ .

$\boxed{2-}$ لتكن لدينا النقطة $A(1,1,0)$ ، أوجد معادلة المستوي المار من هذه النقطة، والذي يعامد المستقيم المار من النقطتين $B(1,2,5)$ , $C(1,2,4)$ .

$\boxed{3-}$ أوجد معادلة المستوي المار من النقطة $A(1,2,3)$ ، والذي يقطع من المحاور الإحداثية أجزاء متساوية.

4- بفرض $\vec{v}_1(-1,2,-7)$ و $\vec{v}_2(3,3,1)$ المطلوب: أوجد معادلة المستوي المار من النقطة $A(1,2,1)$ والموازي للشعاعين $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$.

5- اكتب معادلة المستوي المار من النقطة $A(0,2,3)$ والموازي للمستوي الإحداثي $xoy$.

6- أوجد معادلة المستوي المار من النقاط: $C(1,0,3)$ , $B(0,3,1)$ , $A(3,1,0)$

(مع العلم أن النقاط $C$ , $B$ , $A$ ليست على استقامة واحدة).

7- أوجد معادلة المستوي المار بالنقطة $A(-5,2,-1)$ والموازي للمستوي الإحداثي $oyz$، ثم المستوي الموازي للمستوي الإحداثي $oxz$.

8- أوجد معادلة مستو يمر من النقطة $A(1,-1,0)$ ويوازي المستوي: $P \equiv 5x - y + 3z - 1 = 0$

9- أوجد معادلة مستوٍ يعامد مستقيماً يمر بالنقطة $A(1,2,3)$ ويقطع هذا المستويفي النقطة $B(3,3,4)$.

10- احسب طول العمود النازل من النقطة $A(4,-2,3)$ على المستوي: $P \equiv -3x + 4y - 8z - 45 = 0$

11- بفرض أن $A(0,1,2)$ , $B(1,1,1)$ نقطتان و $P$ مستوٍ معطى بالعلاقة: $P \equiv 3x + 2y - 4z + 2 = 0$

المطلوب: 1- عين موضع النقطتين $A$ و $B$ بالنسبة لـ $P$. 2- احسب بعد كل من $A$ و $B$ عن $P$.

12- برهن أن المستوي المار من النقاط $A(0,3,1)$ , $B(2,2,0)$, $C(-5,1,2)$، يمر من مبدأ الإحداثيات.

13- أوجد معادلة المستوي المار بالنقطتين: $B(1,1,1)$ , $A(2,2,2)$، والعمودي علىالمستوي: $P \equiv x + y - z = 0$.

14- عين قيمة كل من $\lambda$ , $\mu$ كي يتوازى المستويان:

$$P_1 \equiv 3x - y + \lambda z - 9 = 0$$
$$P_2 \equiv 2x + \mu y + 2z - 3 = 0$$

15- عين قيمة $\mu$ بحيث يتعامد المستويان:

$$P_1 \equiv x + 2\mu y + 3z - 5 = 0$$
$$P_2 \equiv 2x + y - 2\mu z + 1 = 0$$

16- أوجد الشكل الأسطواني لمعادلة المستوي الآتي: $P \equiv 2x + y + z + 4 = 0$

17- بفرض أن لدينا النقطة $A(-1,0,2)$ والمستوي $P$ المعطى بالشكل: $P \equiv 2x - y + z + 3 = 0$

المطلوب:

1- ادرس وضع النقطة $A(-1,0,2)$ بالنسبة للمستوي $P$.

2- اكتب الشكل الأسطواني لمعادلة المستوي $P$.

3- اكتب معادلة المستوي المار من النقطة $A$ والموازي للمستوي الإحداثي $oxy$.

18- لدينا المستويان المعينان بالمعادلتين:

$$P_1 \equiv 2x - y + z - 1 = 0$$
$$P_2 \equiv x + y + 2z + 2 = 0$$

المطلوب: أوجد معادلة المستوي المنصف الخارجي لزاوية هذين المستويين.

19- أوجد معادلة المستوي المنصف الخارجي لزاوية المستويين:

$$P_1 \equiv x + y - z - 3 = 0$$

$$P_2 \equiv x - y + z + 4 = 0$$

20- بفرض لدينا المستويان المتقاطعان:

$$P_1 \equiv -x + 2y + 2z + 3 = 0$$

$$P_2 \equiv 2x + 2y - z + 1 = 0$$

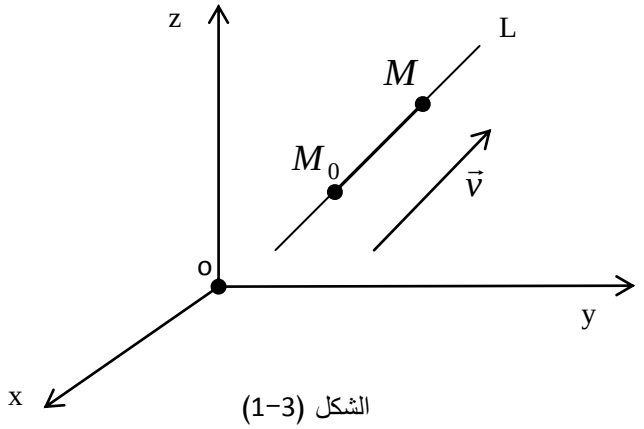
المطلوب:

1- أوجد الزاوية بين المستويين $P_1, P_2$.

2- أوجد معادلة المستوي المنصف الداخلي لزاوية هذين المستويين.

## 2-3-1) تعيين مستقيم في الفراغ:

يتعين مستقيم في الفراغ كما هو معروف في الهندسة الفراغية بنقطة معلومة ومنحى يوازي هذا المستقيم، كما يتعين بنقطتين أو بتقاطع مستويين.



الشكل (3-1)

**1- تعيين مستقيم بمعرفة نقطة منه وشعاع يوازيه:**

لتكن $M_0(x_0, y_0, z_0)$ نقطة معلومة و $\vec{v}(u, v, w)$ شعاع معلوم، ولنوجد معادلات المستقيم المار من $M_0$ والموازي لـ $\vec{v}$. لتكن $M(x, y, z)$ نقطة دارجة على المستقيم المطلوب. نلاحظ من الشكل(3-1):

أن: $\overrightarrow{M_0M} \,//\, \vec{v}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_0M} = \lambda\, \vec{v} \quad ; \lambda \in R$$

تُدعى هذه المعادلة بالمعادلة الشعاعية للمستقيم

المار من $M_0$ والموازي لـ $\vec{v}$، وبإسقاط هذه العلاقة على المحاور الإحداثية نجد:

$$x - x_0 = \lambda u \ ; \ y - y_0 = \lambda v \ ; \ z - z_0 = \lambda w$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda u \\ y &= y_0 + \lambda v \\ z &= z_0 + \lambda w \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.3)$$

تدعى هذه المعادلات بالمعادلات الوسيطية للمستقيم المار من $M_0$ والموازي لـ $\vec{v}$، وبحذف الوسيط $\lambda$ نكتب المعادلات السابقة بالشكل: $\dots\dots\dots$ (2.3)

$$\frac{x - x_0}{u} = \frac{y - y_0}{v} = \frac{z - z_0}{w} = \lambda$$

تدعى هذه المعادلات بالمعادلات التناظرية للمستقيم المار من $M_0$ والموازي لـ $\vec{v}$، (اختصارا نقول معادلات المستقيم)، نسمي الشعاع $\vec{v}$ منحى المستقيم $L$.

ملاحظة:

في المعادلات(2.3) إذا انعدم أحد مقامات هذه النسب، فالبسط المقابل لهذه النسبة يساوي الصفر.

مثال: اكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم $L$ الذي يمر بالنقطة $M_0(1,2,-3)$ والموازي للشعاع $\vec{v}(2,3,1)$، ثم اكتب معادلاته التناظرية؟

الحل: نعوض في العلاقات (1.3)، فنجد:

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases}$$

نعوض المعطيات في المعادلة (2.3) للحصول على المعادلات التناظرية، فنجد:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+3}{1}$$

**2- معادلة مستقيم يمر بنقطتين معلومتين:**

بفرض أن $A(x_1,y_1,z_1)$ , $B(x_2,y_2,z_2)$ نقطتان معلومتان.إنّالمستقيم المار من النقطتين $A$ و $B$ يوازيالمنحى $\overrightarrow{AB}(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

بفرض $M(x,y,z)$ نقطة دارجة على المستقيم المار من $A$ و $B$ ، عندئذ: $\overrightarrow{AM}//\overrightarrow{AB}$

وهذه الخاصة تكتب شعاعياً بالشكل: $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$

وهي المعادلة الشعاعية للمستقيم المار من $A$ و $B$ ، وبإسقاط هذه العلاقة على المحاور الإحداثية نحصل على:

$$\begin{cases} x-x_1=\lambda(x_2-x_1) \\ y-y_1=\lambda(y_2-y_1) \\ z-z_1=\lambda(z_2-z_1) \end{cases}$$

وهي المعادلات الوسطية للمستقيم المار من النقطتين $A$ و $B$ .والتي تكتب بعد حذف الوسيط $\lambda$ بالشكل الآتي:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

والتي تسمى المعادلات التناظرية للمستقيم المار من $A$ و $B$ .

مثال: أوجد معادلات المستقيم المار بالنقطتين $M_1(1,0,2)$ , $M_2(-1,3,4)$ .

الحل: المستقيم المطلوب له منحى الشعاع $\overrightarrow{M_1M_2}(-2,3,2)$ ، وبالتالي فإن المعادلات التناظرية المستقيم هي: $\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{2}$ .

**3- تعيين مستقيم بتقاطع مستويين:**

بفرض أن:

$$P_1\equiv p_1x+q_1y+r_1z+h_1=0$$
$$P_2\equiv p_2x+q_2y+r_2z+h_2=0$$

مستويان متقاطعان بفصل مشترك $L$ مكون من جميع النقاط المشتركة بين المستويين، فكل نقطة تقع على المستقيم $L$ تحقق معادلتي المستويين $P_1$ و $P_2$

في آن واحد، تسمى جملة المعادلتين السابقتين بمعادلتي المستقيم $L$ .

ولتعيين منحى المستقيم $L$ :

نلاحظ أن ناظم المستوي $P_1$ عمودي على منحى المستقيم $L$ وكذلك الأمر بالنسبة لناظم المستوي $P_2$ ، فإذا فرضنا أن منحى المستقيم هو $\vec{v}$ ،فإن $\vec{v}$ متعامد مع كل من $\vec{N}_1$ , $\vec{N}_2$ ، فإن مركبات الشعاع $\vec{v}$ تتعين بالشكل الآتي:

$$\vec{v}=\vec{N}_1\wedge\vec{N}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}$$

ملاحظة:

تتم كتابة المعادلات التناظرية والوسيطية لمستقيم معطى بتقاطع مستويين بإحدى الطريقتين الآتيتين:

1- نختار نقطة تحقق معادلتي المستويين، ثم نعين منحى المستقيم من العلاقة $\vec{v}=\vec{N}_1\wedge\vec{N}_2$

في هذه الحالة ننتقل إلى حالة تعيين مستقيم يمر من نقطة ويوازي شعاعاً معلوماً.

2- نفترض أحد المتحولات $x$ أو $y$ أو $z$ وسيطاً ما مثل $\lambda$، ثم نحسب المتحولين الباقيين بدلالة الوسيط $\lambda$، فمثلا إذا افترضنا $x=\lambda$ نعوض في معادلتي المستقيم:

$$p_1\lambda+q_1y+r_1z+h_1=0$$
$$p_2\lambda+q_2y+r_2z+h_2=0$$

ونحل جملة هاتين المعادلتين، ونحسب كلاً من $z,y$ بدلالة $\lambda$، ونكون بذلك قد أوجدنا المعادلات الوسيطية للفصل المشترك بين المستويين.

مثال: اكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم المعين بتقاطع المستويين:

$$L:\begin{cases}P_1\equiv 2x-3y+6z-12=0\\ P_2\equiv x-3y+3z-6=0\end{cases}$$

الحل:أولاً نجد منحى المستقيم $L$:

$$\vec{v}=\vec{N}_1\wedge\vec{N}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&-3&6\\1&-3&3\end{vmatrix}=9\vec{i}-3\vec{k}\Rightarrow\vec{v}(9,0,-3)$$

ثانياً نجد نقطة $M_0$ من $L$: نفرض $z=0$ نعوض في معادلتي $L$، فنجد:

$$2x-3y-12=0$$
$$x-3y-6=0$$

بالحل المشترك نجد أن: $x=6\ ,\ y=0\Leftarrow M_0(6,0,0)$.

نعوض في العلاقات $(1.3)$ للحصول على المعادلات الوسيطية:

$$\begin{cases}x=6+9\lambda\\ y=0\\ z=-3\lambda\end{cases}$$

أما للحصول على المعادلات التناظرية، فنعوض فيالعلاقة $(2.3)$: $\dfrac{x-6}{9}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{-3}$

ملاحظة: للانتقال من المعادلات التناظرية لمستقيم إلى شكل تقاطع مستويين نتبع الآتي :

$$\frac{x-x_0}{u}=\frac{y-y_0}{v}=\frac{z-z_0}{w}$$
$$(1)\qquad(2)\qquad(3)$$

$$L\begin{cases}(1)=(2)\\(2)=(3)\end{cases}\ \text{أو}\ L\begin{cases}(1)=(2)\\(1)=(3)\end{cases}\ \text{أو}\ L\begin{cases}(1)=(3)\\(2)=(3)\end{cases}$$

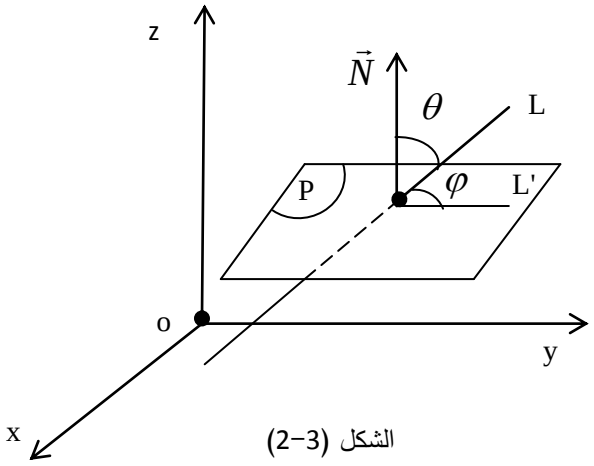
**( 2-3-2) الزاوية بين مستقيمين:**

ليكن لدينا المستقيم $L_1$ ذو المنحى $\vec{v}_1(u_1,v_1,w_1)$، والمستقيم $L_2$ ذو المنحى $\vec{v}_2(u_2,v_2,w_2)$، تعرف الزاوية بين المستقيمين $L_1$ و $L_2$ بأنها الزاوية بين $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ والتي تعين من العلاقة:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{v}_1 \,.\, \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1| \,.|\vec{v}_2|}$$

**( 2−3−3) الزاوية بين مستقيم ومستوٍ:**

ليكن لدينا المستقيم $L$ ذو المنحى $\vec{v}(u,v,w)$،والمستوٍ $P$ المعين بالمعادلة: $P(x,y,z) \equiv px+qy+rz+h=0$ منحى الناظم لهذا المستوي هو $\vec{N}(p,q,r)$ .



الشكل (3−2)

الزاوية بين المستقيم $L$ والمستوي $P$ هي الزاوية الحاصلة بين المستقيم $L$ ومرتسمه على المستوي، انظر الشكل (3−2).

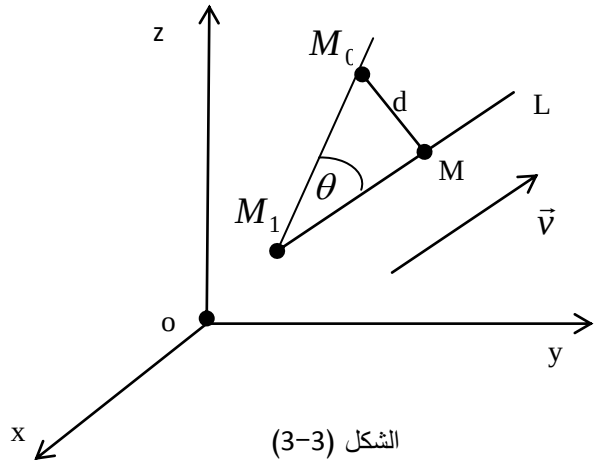
فإذا كانت $\varphi$ الزاوية بين $L, L'$ ، حيث $L'$ المرتسم القائم على المستوي $P$ و $\theta$ الزاوية الكائنة بين المستقيم $L$ و $\vec{N}$ حيث $\vec{N}$ ناظم المستوي $P$ ، فإن:

$$\sin\varphi = \cos\theta = \frac{|\vec{N} \,.\, \vec{v}|}{|\vec{N}| \,.|\vec{v}|} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{|\vec{N} \,.\, \vec{v}|}{|\vec{N}| \,.|\vec{v}|}$$

وهو الدستور الذي يعطي الزاوية الحادة بين المستقيم $\vec{N}$ والمستوي $P$ .

**(2−3−4) بعد نقطة عن مستقيم:**

بفرض أن $L$ مستقيم معلوم له المنحى $\vec{v}(u,v,w)$ و $M_0(x_0,y_0,z_0)$ نقطة نريد إيجاد بعدها $d$ عن المستقيم $L$ ، انظر الشكل (3−3) .



الشكل (3−3)

لتكن $M$ المسقط القائم للنقطة $M_0$ على المستقيم $L$ ،نأخذ النقطة $M_1$ الاختيارية على المستقيم $L$ .

من الشكل (3−3) نجد:

$$\left|\overrightarrow{M_1M_0} \wedge \vec{v}\right| = \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|.\,|\vec{v}|.\sin\theta = |\vec{v}| \,.d$$

ومنه يكون:

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{M_1M_0} \wedge \vec{v}\right|}{|\vec{v}|}$$

وتمثل هذه العلاقة بعد النقطة $M_0$ عن المستقيم $L$ .

مثال: احسب بعد النقطة $M_0(1,2,3)$ عن المستقيم:

$$L \begin{cases} x = -3+3\lambda \\ y = -2+2\lambda \\ z = 8-2\lambda \end{cases}$$

الحل: إن منحى $\vec{N}$ هو $\vec{v}(3,2,-2)$ ، ولتكن النقطة $M_1(-3,-2,8)$ نقطة اختيارية من $\vec{N}$ .

عندئذ نطبق الدستور:

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_1M_0}\ \wedge\vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|}$$

$$\overrightarrow{M_1M_0}\ \wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 4 & -5\\ 3 & 2 & -2\end{vmatrix}=2\vec{i}-7\vec{j}-4\vec{k}$$

$$\left|\overrightarrow{M_1M_0}\ \wedge\vec{v}\right|=\sqrt{69}\quad,\ \left|\vec{v}\right|=\sqrt{17}\Rightarrow d=\frac{\left|\overrightarrow{M_1M_0}\ \wedge\vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|}=\frac{\sqrt{69}}{\sqrt{17}}$$

**( 2-3-5) حزمة المستويات المارة من المستقيم $L$ :**

ليكن لدينا المستقيم $L$ المعين بتقاطع المستويين $P_1$ و $P_2$ ، تسمى مجموعة جميع المستويات المارة من هذا المستقيم (وعددها لانهائي) بحزمة المستويات المارة من المستقيم $L$ .يدعى المستويان $P_1$ و $P_2$ بأساس الحزمة أو قاعدة الحزمة.

فإذا كان المستويان معينين بالمعادلتين:

$$P_1(x,y,z)\equiv p_1x+q_1y+r_1z+h_1=0$$
$$P_2(x,y,z)\equiv p_2x+q_2y+r_2z+h_2=0$$

فالمعادلة العامة لحزمة المستويات المذكورة تكتب بالشكل:

$$P_\lambda\equiv p_1x+q_1y+r_1z+h_1+\lambda(p_2x+q_2y+r_2z+h_2)=0$$

حيث $\lambda$ وسيط (عدد) حقيقي،فمن أجل كل قيمة له نحصل على مستو من مستويات الحزمة، نعبر عن معادلة الحزمة بالعلاقة الآتية: $P_\lambda\equiv P_1(x,y,z)+\lambda P_2(x,y,z)=0$

مثال: أوجد معادلة مستو يمر بالفصل المشترك للمستويين:

$$P_1\equiv 2x+3y-z-5=0$$
$$P_2\equiv x-2y-4z+9=0$$

ويوازي المنحى $\vec{v}(1,2,3)$ .

الحل: نكتب معادلة حزمة المستويات المارة بالفصل المشترك للمستويين:

$$P_\lambda\equiv P_1+\lambda P_2=0$$
$$\Rightarrow P_\lambda\equiv(2+\lambda)x+(3-2\lambda)y+(-1-4\lambda)z+(-5+9\lambda)=0$$

ناظم هذه الحزمة هو : $\vec{N}_\lambda(2+\lambda\ ,\ 3-2\lambda\ ,-1-4\lambda)$ .

نختار من هذه الحزمة المستوي الموازي لـ $\vec{v}$ ، بالتالي ناظم الحزمة عمودي على $\vec{v}$

$$\vec{v}.\vec{N}_\lambda=0$$
$$\Rightarrow(1)(2+\lambda)+(3-2\lambda)(2)+(3)(-1-4\lambda)=0\Rightarrow\lambda=\tfrac{1}{3}$$

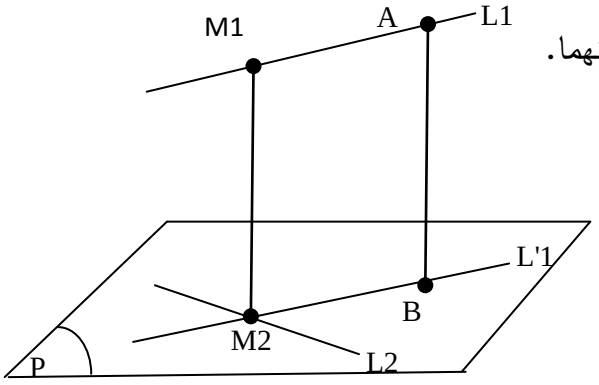
بالتالي معادلة المستوي المطلوبة هي: $P(\tfrac{1}{3})\equiv 7x+7y-7z-6=0$ .

**( 2-3-6) حساب أقصر بعد بين مستقيمين معلومين:**

بفرض $L_1$و $L_2$ مستقيمين في الفراغ، ولنحسب أقصر بعد بينهما.

ولنبدأ بالحل الفراغي لهذه المسألة.

انظر الشكل (3-4).




الشكل (3-4)

1- نمرر من $L_2$مستوياً $P$ يوازي المستقيم $L_1$.

2- نسقط $L_1$ على المستوي $P$فنحصل على المستقيم $L_1'$.

3- نقيم من النقطة $M_2$ (نقطة تلاقي $L_1'$مع $L_2$)عموداً على المستوي $P$ ،فيقطع $L_1$على التعامد في النقطة $M_1$ ،

فالقطعة المستقيمة $M_1M_2$تمثل أقصر بعد بين المستقيمين $L_1, L_2$.

فلو أخذنا أي نقطة اختيارية مثل $A$من المستقيم $L_1$وأنزلنا منها عموداً على المستوي $P$ مثل $AB$ ، فإن:

$$AB = M_1M_2$$

أي لحساب أقصر بعد بين مستقيمين يكفي أن نحسب بعد نقطة اختيارية من $L_1$ عن المستوي $P$.

أما الحل التحليلي لهذه المسألة فيصبح كالآتي:

1- نمرر من $L_2$ حزمة المستويات،

2- نختار من الحزمة مستوياً مثل $P$ يوازي المستقيم $L_1$ ،

3- نختار نقطة ما من المستقيم $L_1$ ونحسب بعدها عن المستوي $P$ ، فنحصل على أقصر بعد بين المستقيمين $L_1, L_2$.

مثال:

احسب أقصر بعد بين المستقيمين الآتيين:

$$L_1:\begin{cases}x+y-z+2=0\\x+z-1=0\end{cases}\quad,\quad L_2:\begin{cases}2x+y-2z+1=0\\x-y+2=0\end{cases}$$

الحل:

1- نمرر حزمة المستويات من $L_2$:

$$P_\lambda \equiv (2+\lambda)x+(1-\lambda)y+(-2)z+(1+2\lambda)=0$$

فنجد منحى $L_1$.

$$\vec{v}_1=\vec{N}_1\wedge\vec{N}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&-1\\1&0&1\end{vmatrix}=\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$$

2- نختار من الحزمة المستوي الموازي لـ $\vec{v}_1$ لذلك نأخذ ناظم الحزمة:

$$\vec{N}_\lambda(2+\lambda\ ,1-\lambda\ ,-2)$$

$$\vec{N}_\lambda\ .\vec{v}_1=0\Rightarrow\ \lambda=-\tfrac{2}{3}\ \Rightarrow P(-\tfrac{2}{3})\equiv 4x+5y-6z-1=0$$

3- نختار نقطة من $L_1$:

مثلا نفرض $z=0\ \Leftarrow\ x=1\ ,\ y=-3$

بالتالي $A(1,-3,0)$ هي النقطة المختارة، نحسب بعدها عن $P(-\frac{2}{3})$:

$$\delta=\frac{|4-15-1|}{\sqrt{16+25+36}}=\frac{12}{\sqrt{77}}$$

**( 2-3-7) تقاطع مستقيم مع مستو:** نناقش حالتين:

**1- المستقيم $L$ معطى وسيطياً:**

بفرض أن: $P(x,y,z)\equiv px+qy+rz+h=0$ معادلة مستوٍ وأن $L$ مستقيم معادلاته الوسيطية هي:

$$x=x_0+\lambda u\ \ ,\ \ y=y_0+\lambda v\ \ \ ,z=z_0+\lambda w$$

نعوض المعادلات الوسيطية في معادلة المستوي $P$ ، فنحصل على:

$$px_0+qy_0+rz_0+h+\lambda(pu+qv+rw)=0\ \ \ .....(3.3)$$

$$\Rightarrow\lambda=-\frac{px_0+qy_0+rz_0+h}{pu+qv+rw}$$

نناقش الحالات:

- إذا كان المقام غير معدوم، أي إذا كان: $pu+qv+rw\neq 0$ عندئذ، توجد قيمة للوسيط $\lambda$ ، وبتعويض هذه القيمة في المعادلات الوسيطية، فنحصل على نقطة تقاطع المستقيم $L$ مع المستوي $P$ .

-إذا كان المقام معدوم $pu+qv+rw=0$ فإما أن يكون $px_0+qy_0+rz_0+h=0$ :، عندئذ تكون المعادلة(3.3)محققة مهما كانت قيمة الوسيط $\lambda$ ، وفي هذه الحالة يكون المستقيم واقعا على المستوي.

أما إذا لم يكن المقدار $px_0+qy_0+rz_0+h$ مساوياًالصفر، فالمعادلة $(3.3)$ تكون مستحيلة الحل، ويكون المستقيم موازيا للمستوي.

**2- المستقيم $L$ معطى بتقاطع مستويين:**

في هذه الحالة نحصل على ثلاث معادلات(معادلتي $L$مع معادلة المستوي $P$)، ندرس الحل المشترك لهذه المعادلات و نميزأيضاً الحالات الآتية:

- إذا كان $\Delta\neq 0$ (محدد أمثال الجملة الخطية المؤلفة من ثلاث معادلات)،

نوجد نقطة التقاطع(نتبع طريقة كرامر ،مثلاً)بحساب $\Delta_x,\Delta_y,\Delta_z$

عندها يكون:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}\ \ ,\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}\ \ ,\ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}$$

- أما إذا كان $\Delta=0$ ؛ أي إذا كانت نواظم المستويات واقعة في مستو واحد، نكون عندها أمام حالتين:

1- للمعادلات الثلاث عدد لانهائي من الحلول، وهذا يتم إذا كانت المستويات الثلاثة مشتركة بفصل مشترك واحد.

2- ليس للمعادلات الثلاث حل وبالتالي لا تتقاطع المستويات معاً بأية نقطة، ويكون المستقيم $L$ موازياً للمستوي $P$ .

مثال: ادرس وضع المستقيم $L$ المعطى وسيطياً: $x=2-3\lambda \ , \ y=1+\lambda \ , z=\lambda$

بالنسبة للمستوي: $P\equiv x+y+z+4=0$

الحل: نعوض معادلات المستقيم في المستوي $P$ ، فنجد: $\lambda=7$ ، وتكون نقطة تقاطع المستقيم مع المستوي هي $M(-19,8,7)$ .

مثال: ادرس تقاطع المستقيم $L$ المعطى بالشكل:

$$L:\begin{cases}x+y+2z-3=0\\x-2y+5z=0\end{cases}$$

مع المستوي: $P\equiv x+4y-z-6=0$ .

الحل:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&-2&5\\1&4&-1\end{vmatrix}=0 \qquad ,\ \Delta_x=\begin{vmatrix}3&1&2\\0&-2&5\\6&4&-1\end{vmatrix}=0$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&3&2\\1&0&5\\1&6&-1\end{vmatrix}=0 \qquad ,\Delta=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&-2&0\\1&4&6\end{vmatrix}=0$$

وهذا يعني أن للجملة عدداً لانهائياً من الحلول، بالتالي المستقيم يتوضع على المستوي.

**( 2-3-8) شرط وقوع مستقيمين في مستوٍ واحد:**

ليكن لدينا المستقيم $L_1$ المعين بالنقطة $M_1(x_1,y_1,z_1)$ والمنحى $\vec{v}_1(u_1,v_1,w_1)$

والمستقيم $L_2$ المعين بالنقطة $M_2(x_2,y_2,z_2)$ والمنحى $\vec{v}_2(u_2,v_2,w_2)$ .

إن الشرط اللازم والكافي لوقوع المستقيمين $L_1$ و $L_2$ في مستو واحد، هو نفسه الشرط اللازم والكافي لوقوع الأشعة $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ و $\overrightarrow{M_1M_2}$ في مستو واحد؛ أي عندما يكون الجداء المختلط للأشعة الثلاثة السابقة معدوماً،أي:

$\left(\overrightarrow{M_1M_2},\vec{v}_1,\vec{v}_2\right)=0$ .

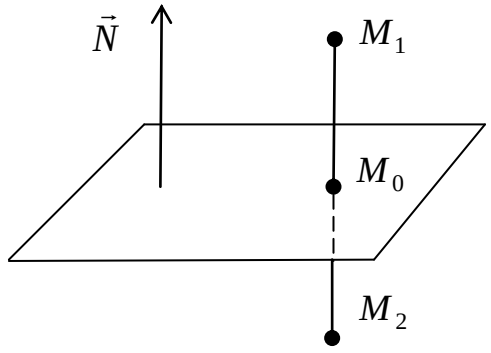
**( 2-3-9) التناظر:**

**1- نظيرة نقطة بالنسبة لمستو:**

**تعريف:** يقال عن النقطتين $M_1(x_1,y_1,z_1)$ و $M_2(x_2,y_2,z_2)$ ،

إنهما متناظرتان بالنسبة للمستوي $P$ المعطى بالعلاقة: $P\equiv px+qy+rz+h=0$

إذا كان المستوي $P$ معامداً للقطعة المستقيمة $\overline{M_1M_2}$ في منتصفها $M_0$ ،ينتج من هذا التعريف أن $\vec{N}$ ناظم المستوي




الشكل (3-5)

$P$ يوازي $\overline{M_1M_2}$، انظر الشكل(3−5). أي إن: $\frac{x_2-x_1}{p}=\frac{y_2-y_1}{q}=\frac{z_2-z_1}{r}$ .....(4.3)

والنقطة $M_0$ الواقعة على المستوي تحقق معادلته: $p\frac{x_1+x_2}{2}+q\frac{y_1+y_2}{2}+r\frac{z_1+z_2}{2}+h=0$.....(5.3)

وبواسطة المعادلات(4.3)و(5.3) يمكن حساب إحداثيات النقطة $M_2$ المطلوبة .

مثال: أوجد نظيرة النقطة $M_1(1,2,-4)$ بالنسبةللمستوي: $P\equiv x+y+z+1=0$

الحل: نفرض أن $M_2(x_2,y_2,z_2)$ نظيرة النقطة $M_1$ بالنسبة للمستوي $P$ ،

هذا يعني أن: $\frac{x_2-1}{1}=\frac{y_2-2}{1}=\frac{z_2+4}{1}=\lambda$

$$\Rightarrow x_2=1+\lambda \ , \ y_2=2+\lambda \ , z_2=-4+\lambda \quad (1)$$

النقطة $M_0\left(\frac{1+x_2}{2},\frac{2+y_2}{2},\frac{-4+z_2}{2}\right)$ تحقق معادلة المستوي $P$ .

$$\Rightarrow x_2+y_2+z_2+1=0 \quad (2)$$

نعوض المعادلات (1) في (2) فنجد: $\lambda=0$ . وبالتالي، فإن إحداثيات $M_2$ نظيرة $M_1$ هي: $M_2(1,2,-4)$ .

**2- نظير مستو بالنسبة لمستو آخر:**

نفترض أن لدينا المستويين:

$$P\equiv px+qy+rz+h=0$$
$$P_1\equiv p_1x+q_1y+r_1z+h_1=0$$

ولنوجد المستوي $P_2$ نظير المستوي $P_1$ بالنسبة لـ $P$ .اعتمادا على تعريف نظير نقطة بالنسبة لمستو، نفرض أن $M_1(x_1,y_1,z_1)$ نقطة من المستوي $P_1$ ولنوجد نظيرتها $M_2(x_2,y_2,z_2)$بالنسبة للمستوي $P$ بالطريقة السابقة، وباعتبار أن $M_1$ نقطة من المستوي $P_1$ فهي تحقق معادلته، هذه المعادلة تضاف إلى مجموعة المعادلات الثلاث التي حلت في الفقرة السابقة،ثم نوجد العلاقة التي تربط $x_2,y_2,z_2$ إحداثيات $M_2$ والتي تشير إلى معادلة $P_2$ المطلوبة، وسنوضح هذه العمليات من خلال عرض المثال الآتي:

مثال: أوجد نظير المستوي $P(x,y,z)\equiv 2x+y-z+1=0$ بالنسبة للمستوي: $Q(x,y,z)\equiv x+2y-3z=0$

الحل:نفترض أن $M_1(x_1,y_1,z_1)$ نقطة من المستوي $P$ونظيرتها بالنسبة للمستوي $Q$ هيالنقطة $M_2(x_2,y_2,z_2)$من المستوي المطلوب(نظير المستوي $P$ بالنسبة لـ $Q$).

$M_0$منتصف القطعة $\overline{M_1M_2}$ تحقق معادلة المستوي $Q$ و $\overrightarrow{M_1M_2}$ الذي يوازي $\vec{N}_Q$ بالتالي:

$$\frac{x_2-x_1}{1}=\frac{y_2-y_1}{2}=\frac{z_2-z_1}{-3} \quad (1)$$
$$x_1+x_2+2y_1+2y_2-3z_1-3z_2=0 \quad (2)$$

نكتب (1) بالشكل الوسيطي: $x_1=x_2-\lambda \ , \ y_1=y_2-2\lambda \ , z_1=z_2+3\lambda$ (3)

نعوض المعادلات (3) في المعادلة (2):

$$\lambda=\frac{x_2+2y_2-3z_2}{7}$$

بتعوض قيمة $\lambda$ في المعادلات (3)، ينتج:

$$x_1 = \frac{6\ x_2 - 2y_2 + 3z_2}{7}\ ,\ y_1 = \frac{-2x_2 + 3y_2 + 6z_2}{7}\ ,\ x_1 = \frac{3x_2 + 6y_2 - 2z_2}{7}$$

وبما أن النقطة $M_1(x_1, y_1, z_1)$ من المستوي $P$ فهي تحقق معادلته:

$x_2 - y_2 + 2z_2 + 1 = 0$ وهي معادلة المستوي المطلوب.

**3- نظير مستقيم بالنسبة لمستو:**

سنوضح خطوات إيجادنظير مستقيم بالنسبة لمستو من خلال المثال الآتي:

مثال: أوجد معادلتي المستقيم $L'$ الذي يناظر المستقيم:

$$L: \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

بالنسبة للمستوي: $P \equiv x + y + z + 3 = 0$.

الحل: بفرض أن $M_1(x_1, y_1, z_1)$ نقطة من المستقيم $L$ونظيرتها بالنسبة للمستوي $P$ هي النقطة $M_2(x_2, y_2, z_2)$. حسب تعريف التناظر نكتب:

$$\frac{x_2 - x_1}{1} = \frac{y_2 - y_1}{1} = \frac{z_2 - z_1}{1} \quad (1)$$

$$x_1 = x_2 - \lambda\ ,\ y_1 = y_2 - \lambda\ ,\ z_1 = z_2 - \lambda \quad (2)$$

$M_0$منتصف القطعة $\overline{M_1M_2}$ تحقق معادلة المستوي $P$، أي:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{z_1 + z_2}{2} + 3 = 0$$

$$x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + z_1 + z_2 + 6 = 0 \quad (3)$$

نعوض (2) في (3): $\lambda = \frac{1}{3}(2x_2 + 2y_2 + 2z_2 + 6)$

نعوض قيمة $\lambda$ في المعادلات (2)، فنجد:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -2 + \tfrac{1}{3}(x_2 - 2y_2 - 2z_2) \\ y_1 &= -2 + \tfrac{1}{3}(-2x_2 + y_2 - 2z_2) \\ z_1 &= -2 + \tfrac{1}{3}(-2x_2 - 2y_2 + z_2) \end{aligned}\right\}$$

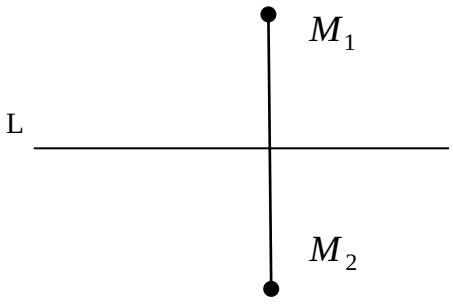
نعوض في معادلتي $L$ باعتبار أن $M_1(x_1, y_1, z_1)$ نقطة منه فنحصل على:

$$L' \begin{cases} x_2 - 5y_2 + z_2 - 6 = 0 \\ x_2 + 2z_2 + 7 = 0 \end{cases}.$$

**4- نظير نقطة بالنسبة لمستقيم:**

**تعريف:**يقال عن النقطتين $M_1(x_1, y_1, z_1)$و $M_2(x_2, y_2, z_2)$،إنهما متناظرتان بالنسبة للمستقيم $L$إذا كان هذا المستقيم يعامد القطعة $\overline{M_1M_2}$في المنتصف،

انظر الشكل (3-6).




الشكل (3-6)

فإذا كان المستقيم $L$ معيناً بالمعادلتين:

$$L:\begin{cases}P_1 \equiv p_1x+q_1y+r_1z+h_1=0\\ P_2 \equiv p_2x+q_2y+r_2z+h_2=0\end{cases}$$

الذي له المنحى $\vec{v}(u,v,w)$، وبما أن $\vec{v}$ يعامد $\overrightarrow{M_1M_2}$، فإن:

$$\vec{v}.\ \overrightarrow{M_1M_2}=0 \ \Rightarrow u(x_2-x_1)+v(y_2-y_1)+w(z_2-z_1)=0 \quad (1)$$

و $M_0$ منتصف $\overline{M_1M_2}$ تحقق معادلتي المستقيم $L$، أي:

$$P_1\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)=0 \quad (2)$$

$$P_2\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)=0 \quad (3)$$

بحلجملة المعادلات(1)و(2)و(3)نوجد $x_2, y_2, z_2$ إحداثيات $M_2$ نظيرة النقطة $M_1$ بالنسبة للمستقيم $L$.

سنوضح الخطوات السابقة من خلال عرض المثال الآتي:

مثال: أوجد نظير النقطة $M_1(4,1,6)$ بالنسبة لـ $L$ المعين بالمعادلتين:

$$L:\begin{cases}P_1 \equiv x-y-4z+12=0\\ P_2 \equiv 2x+y-2z+3=0\end{cases}$$

الحل:بفرض أن $M_2(x_2,y_2,z_2)$ نظير $M_1$ بالنسبة لـ $L$، بدايةً نوجد منحنى $L$:

$$\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -4\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}=6\vec{i}-6\vec{j}+3\vec{k}$$

وبالتالي:

$$\vec{v}.\ \overrightarrow{M_1M_2}=0 \ \Rightarrow 6(x_2-x_1)-6(y_2-y_1)+3(z_2-z_1)=0$$
$$\Rightarrow\ 2x_2-2y_2+z_2-12=0 \quad (1)$$

بما أن النقطة $M_0$ منتصف $\overline{M_1M_2}$، فهي تحقق معادلتي المستقيم $L$، أي:

$$x_2-y_2-4z_2+3=0 \quad (2)$$

$$2x_2+y_2-2z_2+3=0 \quad (3)$$

بحل المعادلات (1) و(2) و(3) نجد أن: $x_2=2\ ,y_2=-3\ ,z_2=2$.

أي إن نظيرة النقطة $M_1(4,1,6)$ بالنسبة للمستقيم $L$ هي النقطة $M_2(2,-3,2)$.

مثال: سنوضح من خلاله كيفية إيجاد نظير مستو بالنسبة لمستقيم معطى

أوجد نظير المستوي $P_1$ بالنسبة للمستقيم $L$ ،حيث:

$$L:\begin{cases}x-z=0\\ x+y+2=0\end{cases} \text{و} P_1 \equiv x+y-2z+1=0$$

الحل: إن منحى المستقيم $L$ هو الشعاع $\vec{v}$ الذي يساوي:

$$\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$$

بفرض أن $M_1(x_1,y_1,z_1)$ نقطة من المستوي $P$ وأن $M_2(x_2,y_2,z_2)$ نظيرتها بالنسبة لـ $L$، أي إن $L\perp\overrightarrow{M_1M_2}$:

بالتالي لدينا: $\vec{v}\ .\overrightarrow{M_1M_2}=x_2-x_1-y_2+y_1+z_2-z_1=0$ (1)

$M_0$ منتصف $\overline{M_1M_2}$، فهي تحقق معادلتي المستقيم $L$، أي:

$$x_1+x_2-z_1-z_2=0 \quad (2)$$

$$x_1+x_2+y_1+y_2+4=0 \quad (3)$$

بحل جملة المعادلات (1)و(2)و(3)، نجد أن:

$$x_1=\frac{-x_2-2y_2+z_2-4}{3}$$

$$y_1=\frac{-2x_2-y_2-z_2-8}{3}$$

$$z_1=\frac{2x_2-2y_2-2z_2-4}{3}$$

بما أن النقطة $M_1(x_1,y_1,z_1)$ هي نقطة من المستوي $P$، فهي تحقق معادلته.

نعوض القيم السابقة في المستوي $P$، فنحصل على معادلة المستوي $P'$ نظير $P$ بالنسبة لـ $L$:

$$P'\equiv 7x_2-y_2-4z_2+1=0$$

أو نكتبها: $P'\equiv 7x-y-4z+1=0$.

ملاحظة: بالنسبة لإيجاد نظير مستقيم $L_1$ بالنسبة لمستقيم $L$ يتم بشكل مشابه تماماً لطريقة إيجاده في المثال السابق ولكن النقطة $M_1(x_1,y_1,z_1)$ من المستقيم $L_1$، والنقطة $M_2(x_2,y_2,z_2)$ من المستقيم $L_2$ المناظر لـ $L_1$، إذ نعوض مركبات $M_1$ بعد كتابتها بدلالة $x_2,y_2,z_2$ في معادلتي المستقيم $L_1$، فنحصل على معادلتي $L_2$.

**( 2-3-10) مسقط نقطة على مستو:**

لنفرض أن $M_1(x_1,y_1,z_1)$ نقطة ما في الفراغ، ولنفرض أن مسقطها $M_2(x_2,y_2,z_2)$ على المستوي:

$$P(x,y,z)\equiv px+qy+rz+h=0$$

لإيجاد $M_2(x_2,y_2,z_2)$، لدينا طريقتان:

1)- يمكن إيجاد نظيرة $M_1(x_1,y_1,z_1)$ بالنسبة للمستوي $P$ حسب الفقرة الأولى من (2-3-9) ونحسب إحداثيات $M_2$ مباشرة على اعتبار أنها منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين $M_1$ ونظيرتها بالنسبة للمستوي $P$.

2)- يمكن إيجاد $M_2$ بأن نوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم المار من $M_1(x_1,y_1,z_1)$ وله نفس منحى المستوي $P$، ثم نوجد نقطة تقاطع هذا المستقيم مع المستوي $P$، فنحصل على مركبات $M_2(x_2,y_2,z_2)$.

لنوضح الخطوات السابقة من خلال عرض المثال الآتي:

مثال: أوجد مسقط النقطة $M_1(1,0,1)$ على المستوي $P \equiv x - y + 2z + 1 = 0$

الحل: لدينا $M_1(1,0,1)$ , $\vec{N}_P(1,-1,2)$

نوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم المار من $M_1(1,0,1)$ وله المنحى $\vec{N}_P(1,-1,2)$ :

$$x = 1 + \lambda \ , \ y = -\lambda \ , \ z = 1 + 2\lambda$$

نعوض هذه المعادلات في معادلة المستوي $P$ : فنجد أن $\lambda = \frac{-2}{3}$ .

نعوض في المعادلات الوسيطية السابقة، فنجد: $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \Rightarrow x = \frac{1}{3} \ , \ y = \frac{2}{3} \ , \ z = \frac{-1}{3}$

**( 2-3-11) مسقط مستقيم على مستو:**

بفرض أن المستقيم $L$ معطى بالشكل:

$$L \begin{cases} P_1 \equiv p_1 x + q_1 y + r_1 z + h_1 = 0 \\ P_2 \equiv p_2 x + q_2 y + r_2 z + h_2 = 0 \end{cases} :$$

و $P$ مستو معطى بالمعادلة: $P(x, y, z) \equiv px + qy + rz + h = 0$ .

لإيجاد معادلتي المستقيم المسقط لـ $L$ على $P$ :

نوجد المستوي $P'$ المار من المستقيم $L$ والمتعامد مع $P$ ، يشكل تقاطع $P$ مع $P'$ المستقيم المسقط لـ $L$ على $P$ .

سنوضح الخطوات السابقة من خلال عرض المثال الآتي:

مثال: أوجد معادلتي المسقط القائم للمستقيم $L$ المعطى بالشكل:

$$L \begin{cases} x + 2y - z - 2 = 0 \\ 3x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases} :$$

على المستوي $P \equiv 3x + 2y + z = 0$

الحل: نوجد حزمة المستويات المارة من $L$ ونختار منها المستوي المعامد لـ $P$ .

$$P_\lambda \equiv (1 + 3\lambda)x + (2 - \lambda)y + (-1 + 2\lambda)z + (-2 - \lambda) = 0$$

$$\vec{N}_\lambda(1 + 3\lambda, \ 2 - \lambda \ , -1 + 2\lambda) \ , \ \vec{N}_P(3,2,1)$$

$$\vec{N}_\lambda \cdot \vec{N}_P = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-2}{3} \Rightarrow P(\tfrac{-2}{3}) \equiv -3x + 8y - 7z - 4 = 0$$

$$L' \begin{cases} P(\frac{-2}{3}) \equiv -3x + 8y - 7z - 4 = 0 \\ P \equiv 3x + 2y + z = 0 \end{cases} :$$

تمثل معادلتي $L'$ معادلتي المستقيم المسقط لـ $L$ على $P$ المطلوب.

**تمارين محلولة:**

1- بفرض أن لدينا النقطتان $A(-1,0,1)$ , $B(1,2,3)$ ،المطلوب: اكتب معادلات المستقيم المار من النقطتين $A$ , $B$ .

الحل: نعوض في المعادلات:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{z-z_A}{z_B-z_A}$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{2}$$

2- بفرض $B(-1,1,1)$ نقطة من الفراغ، المطلوب:أوجد معادلتي المستقيم المار من $B$ والمعامد لـ $P$ ،حيث: $P\equiv 2x+y+2z+1=0$ .

الحل: المستقيم المطلوب له نفس منحى ناظم المستوي $P$ وهو $\vec{v}(2,1,2)$ .

نكتب المعادلات التناظرية للمستقيم:

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$$

$$(1) \quad (2) \quad (3)$$

$$\begin{cases}(1)=(2) \Rightarrow x-2y+3=0\\ (2)=(3) \quad 2y-z-1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-2y+3=0\\ 2y-z-1=0\end{cases}$$

3- أوجد معادلة المستوي المار من المستقيم $L$ والمعامد للمستوي $P$ حيث:

$$P\equiv x-y+z+2=0 \quad , \quad L:\begin{cases}3y+4z+1=0\\ x-y-z=0\end{cases}$$

الحل:

$$P_\lambda \equiv \lambda x+(3-\lambda)y+(4-\lambda)z+1=0$$

$$\vec{N}_\lambda(\lambda,3-\lambda,4-\lambda) \quad , \vec{N}_P(1,-1,1)$$

$$\vec{N}_\lambda.\vec{N}_P=0 \Rightarrow \lambda=-1 \Rightarrow$$

$$P(-1)\equiv -x+4y+5z+1=0$$

4- ليكن لدينا المستقيم:

$$L:\begin{cases}2x-y+z-1=0\\ x+y-3=0\end{cases}$$

المطلوب:

1- أوجد النقطة التي تنتمي إلى $L$ والتي راقمها يساوي $(1)$؟

2- أوجد نقطة تقاطع هذا المستقيم مع المستو الإحداثي $xoz$ ؟

الحل:

1- لدينا $z=1$ ، نعوض في معادلتي $L$ ، فنجد:

$$\left.\begin{matrix}2x-y=0\\ x+y-3=0\end{matrix}\right\}$$

بالحل المشترك لهاتين المعادلتين، نجد أن: $x=1$ , $y=2$ بالتالي النقطة المطلوبة هي: $M(1,2,1)$ .

2- معادلة المستوي $xoz$ هي $P \equiv y=0$ ، نعوضها في معادلتي المستقيم حتى نحصل على نقطة التقاطع مع هذا المستوي:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+z-1=0 \\ x-3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=3\,,\, z=-5$$

وعليه فنقطة التقاطع هي: $(3,0,-5)$ .

5- أثبت أن المستوي المار بالفصل المشترك للمستويين:

$$P_1 \equiv 2x-y+1=0 \;\;,\; P_2 \equiv x+y+3=0$$

والمعامد للمستوي $P_3 \equiv x+y-z-7=0$ هو مستو موازي للمحور $oz$ .

الحل:

$$P_\lambda \equiv (2+\lambda)x+(-1+\lambda)y+(1+3\lambda)=0$$

$$\vec{N}_\lambda(2+\lambda,-1+\lambda,0) \;\;,\; \vec{N}_3(1,1,-1)$$

$$\vec{N}_\lambda.\vec{N}_3=0 \Rightarrow \lambda=\tfrac{-1}{2} \Rightarrow$$

$$P(\tfrac{-1}{2}) \equiv 3x-5y-1=0$$

وهذا المستوي موازي للمحور $\overrightarrow{oz}$، لأنه من الشكل: $px+qy+h=0$ .

6- أوجد مسقط النقطة $B(-2,3,4)$ على المستوي: $P \equiv x-2y+5z-1=0$ .

الحل: لدينا $B(-2,3,4)$ و $\vec{N}(1,-2,5)$ نجد المعادلات الوسيطية للمستقيم المار من $B$ وله منحى $\vec{N}$ .

$$x=-2+\lambda \;\;;y=3-2\lambda \;\;;z=4+5\lambda$$

نعوض في $P$ ، فنجد أن:

$$\lambda=-\tfrac{11}{30} \Rightarrow x=-\tfrac{71}{30} \;\;,\; y=\tfrac{56}{15} \;\;,z=\tfrac{13}{6}$$

$$\Rightarrow (-\tfrac{71}{30},\tfrac{56}{15},\tfrac{13}{6})$$

7- أوجد معادلة المستوي المار بالمستقيم المعطى بالمعادلات:

$$x=-1+3\lambda \;\;;y=3+2\lambda \;\;;z=-2-\lambda$$

والموازي للمستقيم المعين بالمعادلتين:

$$L:\begin{cases} 2x-y+z-3=0 \\ x+2y-z-5=0 \end{cases}$$

الحل: نجد أولاً المعادلات التناظرية للمستقيم:

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+2}{-1}$$

$$(1) \quad (2) \quad (3)$$

$$\begin{cases} (1)=(2) \Rightarrow 2x-3y+11=0 & (1)' \\ (2)=(3) \Rightarrow y+2z+1=0 & (2)' \end{cases}$$

نجد حزمة المستويات المارة بالمستقيم المعين بالمعادلتين $(1)$, $(2)$ :

$$P_\lambda \equiv 2x+(-3+\lambda)+2\lambda z+(11+\lambda)=0$$

نختار منها الموازي لمنحى المستقيم $L$ نجد منحاه أولاً:

$$\vec{v}=\vec{N}_1\wedge\vec{N}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=-\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}\Rightarrow\vec{v}(-1,3,5)$$

$$\vec{N}_\lambda(2,-3+\lambda,2\lambda)\Rightarrow\vec{N}_\lambda.\vec{v}=0\Rightarrow\lambda=\tfrac{11}{13}$$

$$\Rightarrow P(\tfrac{11}{13})\equiv 13x-14y+11z+77=0$$

8- احسب قيم $p, q$ التي تجعل المستوي: $P\equiv px+qy+6z-7=0$ ، معامداً للمستقيم:

$$L:\begin{cases}\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+5}{-4}=\dfrac{z+1}{3}\end{cases}$$

الحل: لدينا $\vec{N}(p,q,6),\vec{v}(2,-4,3)$

حتى يكون المستويمعامداً للمستقيم يكون $\vec{N}\,\backslash\backslash\,\vec{v}$ ، بالتالي:

$$\Rightarrow\frac{p}{2}=\frac{q}{-4}=\frac{6}{3}\Rightarrow\frac{p}{2}=\frac{6}{3}\Rightarrow p=4$$

$$\&\ \frac{q}{-4}=\frac{6}{3}\Rightarrow q=-8$$

9- احسب قيمة $\lambda$ التي تجعل المستوي: $P\equiv\lambda x-2\lambda y+2z+1=0$ ، موازياً للمستقيم: $L:\begin{cases}\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+5}{-4}=\dfrac{z+1}{3}\end{cases}$ ، ثم اكتب معادلة المستوي.

الحل: يصبح المستوي $P$ موازياً للمستقيم $L$ ، إذا كان $\vec{N}$ معامداً لمنحى المستقيم $\vec{v}$ حيث

$$\vec{N}(\lambda,-2\lambda,2)\ ,\ \vec{v}(2,-4,3)$$

$$\vec{v}.\vec{N}=0\Rightarrow\lambda=-\tfrac{3}{5}\Rightarrow P\equiv-3x+6y+10z+5=0$$

10- أوجد معادلتي المسقط القائم للمستقيم:

$$L:\begin{cases}x+y+z-1=0\\ 2x+y-z+2=0\end{cases}$$

على المستوي الإحداثي $xoz$ ؟

الحل: معادلة المستوي الإحداثي $xoz$ هي $P\equiv y=0$

نجد معادلة المستوي $P'$ المار من $L$ والمتعامد مع $P$ ، ويشكل تقاطع $P$ و $P'$ المستقيم المسقط المطلوب.

$$P_\lambda\equiv(1+2\lambda)x+(1+\lambda)y+(1-\lambda)z+(-1+2\lambda)=0$$

نختار منها المتعامد مع $P$ ، أي:

$$\vec{N}(0,1,0)\ ,\ \vec{N}_\lambda(1+2\lambda,1+\lambda,1-\lambda)$$
$$\vec{N}.\vec{N}_\lambda=0\ \Rightarrow\lambda=-1$$
$$P(-1)\equiv -x+2z-3=0\Rightarrow P'\equiv -x+2z-3=0$$
$$\begin{cases}P\equiv y=0\\P'\equiv -x+2z-3=0\end{cases}$$

11- أوجد المسقط القائم للمستقيم $L$ المعين بالمعادلات: $\frac{x+3}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{4}$، على المستوي $P$ المعطى بالمعادلة: $P\equiv x-y+z-1=0$.

الحل: نكتب معادلات المستقيم بشكل تقاطع مستويين بالشكل:

$$L:\begin{cases}3y+x=0\\4y+z-4=0\end{cases}$$

نجد حزمة المستويات المارة من $L$ ونختار منها المعامد لـ $P$.

$$P_\lambda\equiv x+(3+4\lambda)y+\lambda z-4\lambda=0$$
$$\vec{N}_\lambda(1,3+4\lambda,\lambda)\ \ ,\vec{N}_P(1,-1,1)$$
$$\vec{N}_\lambda.\vec{N}_P=0\Rightarrow\lambda=-\tfrac{2}{3}\Rightarrow P(-\tfrac{2}{3})\equiv 3x+y-2z+8=0$$
$$\begin{cases}P\equiv x-y+z-1=0\\P(-\frac{2}{3})\equiv 3x+y-2z+8=0\end{cases}$$

12- بفرض $L_1$ و $L_2$ مستقيمان معينان بالشكل:

$$L_1:\begin{cases}2x-2y+3z-2=0\\z+5=0\end{cases}\ ,\ L_2:\begin{cases}\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{5}=\frac{z-1}{1}\end{cases}$$

المطلوب: أوجد معادلة المستوي المار من $L_1$ والموازي لـ $L_2$، في الإحداثيات الكروية.

الحل:

$$P_\lambda\equiv 2x-2y+(3+\lambda)z+(-2+5\lambda)=0$$
$$\vec{N}_\lambda(2,-2,3+\lambda)\ \ ,\vec{v}_2(3,5,1)$$
$$\vec{N}_\lambda.\vec{v}_2=0\Rightarrow\lambda=1\Rightarrow$$
$$P(1)\equiv 2x-2y+4z+3=0$$

وفي الاحداثيات الكروية تكتب المعادلة بعد تعويض الدساتير الآتية فيها:

$$x=r\sin\varphi\cos\theta$$
$$y=r\sin\varphi\sin\theta$$
$$z=r\cos\theta$$
$$\Rightarrow 2(r\sin\varphi\cos\theta)-2(r\sin\varphi\sin\theta)+4r\cos\theta+3=0$$

13- احسب أقصر بعد بين المستقيمين $L_1$ و $L_2$ حيث:

$$L_2:\begin{cases}x+y+z-1=0\\ y+z+1=0\end{cases}\quad,\ L_1:\begin{cases}\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{2}\end{cases}$$

الحل:لدينا $\vec{v}_1(2,3,2)$، نجد حزمة المستويات المارة من $L_2$ ونختار منها الموازي لـ $\vec{v}_1$.

$$P_\lambda \equiv x+(1+\lambda)y+(1+\lambda)z+(-1+\lambda)=0$$

$$\vec{N}_\lambda(1,1+\lambda,1+\lambda)\quad,\vec{N}_\lambda.\vec{v}_1=0\Rightarrow\lambda=-\tfrac{7}{5}$$

$$\Rightarrow P(-\tfrac{7}{5})\equiv 5x-2y-2z-12=0$$

نأخذ $M(0,0,1)$ ∋ $L_1$، ونحسب بعدها عن $P(-\frac{7}{5})$:

$$\Rightarrow\delta=\frac{|P(0,0,1)|}{\sqrt{25+4+4}}=\frac{14}{\sqrt{33}}$$

14-بفرض أن $L$مستقيم معطى بالشكل:

$$L:\begin{cases}x+z+2=0\\ y-z+1=0\end{cases}$$

المطلوب: أثبت أن المستوي المار من $L$ والموازي للمستقيم $L'$المعطى وسيطياً بالمعادلات:

$x=2+\lambda$ ; $y=3+2\lambda$ ; $z=1+\lambda$ ،يمثل مستوياً ماراً من مبدأ الإحداثيات.

الحل:

$$P_\lambda \equiv x+(\lambda)y+(1-\lambda)z+(2+\lambda)=0$$

$$\vec{N}_\lambda(1,\lambda,1-\lambda)\quad,\vec{v}'(1,2,1)$$

$$\vec{N}_\lambda.\vec{v}'=0\Rightarrow\lambda=-2$$

$$\Rightarrow P(-2)\equiv x-2y+3z=0$$

بما أن معادلة المستوي الناتج من الشكل: $px+qy+rz=0$ ، فهو يمثل مستوياً يمر من مبدأ الإحداثيات.

15-لدينا المستقيم $L$ والمستوي $P$ المعينان بالشكل:

$$L:\begin{cases}\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+3}{1}\end{cases}\quad,\ P\equiv 8x+z-2=0$$

المطلوب:

أثبت أن المستوي المار من $L$ والمعامد لـ $P$ ، لا يمثل مستوياً موازياً للمحور $oy$.

الحل:نكتب $L$بشكل تقاطع مستويين أولاً:

$$L:\begin{cases}2x-y=0\\ 2z-y+4=0\end{cases}$$

$$P_\lambda \equiv 2x+(-1-\lambda)y+(2\lambda)z+(4\lambda)=0$$

$$\vec{N}_\lambda(2,-1-\lambda,2\lambda)\quad,\quad\vec{N}_P(8,0,1)\Rightarrow\vec{N}_\lambda.\vec{N}_P=0\Rightarrow\lambda=-8$$

$$\Rightarrow P(-8)\equiv 2x+7y-16z-28=0$$

بما أن المعادلة الأخيرة ليست من الشكل: $px+rz+h=0$ ، فهي لا تمثل مستوياً موازياً للمحور $oy$.

16-أوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم الموازي للمستويين:

$$P_1 \equiv x+y+z-1=0$$
$$P_2 \equiv 2x+y-z+5=0$$

والمار من نقطة تقاطع المحور $oz$ مع المستوي: $P_3 \equiv x+2y+z+1=0$ .

الحل:نجد منحى المستقيم: بما أن المستقيم يوازي المستويين $P_1$ و $P_2$ فإن منحاه $\vec{v}$ يعامد $\vec{N}_1$ و $\vec{N}_2$ معاً، أي أن:

$$\vec{v} = \vec{N}_1 \wedge \vec{N}_2 \quad ; \vec{N}_1(1,1,1) \ , \vec{N}_2(2,1,-1)$$

$$\vec{v} = \vec{N}_1 \wedge \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k} \Rightarrow \vec{v}(-2,3,-2)$$

نجد نقطة تقاطع المحور $oz$ مع المستوي $P_3$ :

نعلم أن معادلتي المحور $oz$ هما :

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

نعوض في معادلة المستوي $P_3$ ، فنحصل على: $z=-1$ بالتالي $M_0(0,0,-1)$ هي نقطة التقاطع المطلوبة.

والمعادلات الوسيطية للمستقيم المار من $M_0$ وله المنحى $\vec{v}$ هي:

$$\begin{cases} x=-2\lambda \\ y=3\lambda \\ z=-1-\lambda \end{cases}$$

17- أوجد معادلة المستوي المار من المستقيم $L$ المعين بالمعادلتين:

$$L: \begin{cases} x-2y+z+1=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

والمعامد للمستوي الإحداثي $oxy$ ، ثم أثبت أن المستوي الناتج موازي للمستوي الإحداثي $oxz$ .

الحل:نجد حزمة المستويات المارة من $L$ :

$$P_\lambda \equiv (1+\lambda)x+(-2+\lambda)y+(1+\lambda)z+1=0$$

نختار منها المستوي المعامد للمستوي الإحداثي $oxy$ الذي معادلته: $P \equiv z=0$

$$\vec{N}_\lambda(1+\lambda \ ,-2+\lambda, 1+\lambda) \quad , \quad \vec{N}_P(0,0,1) \Rightarrow \vec{N}_\lambda . \vec{N}_P = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$
$$\Rightarrow P(-1) \equiv -3y+1=0$$

والمعادلة الناتجة من الشكل: $qy+h=0$ ، لذلك تمثل معادلة مستوي موازي للمستوي الإحداثي $oxz$ .

18- بفرض $A(1,2,3)$ نقطة من الفراغ، والمطلوب: أوجد معادلتي المستقيم $L$ المار من النقطة $A$ والموازي للمحور $\overrightarrow{oz}$ .

الحل: منحى $\overrightarrow{oz}$ هو $(0,0,1)$ ، بالتالي:

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{1} \quad \Rightarrow \quad L \begin{cases} x-1=0 \\ y-1=0 \end{cases} \quad :$$

19- بفرض $L$ مستقيم معطى بالشكل: $L\ \begin{cases}\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{1}\end{cases}$ :

المطلوب:

1- اكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم $L$.

2- احسب بعد النقطة $B(1,1,1)$ عن المستقيم $L$.

الحل:

1)- لدينا $\vec{v}(2,1,1)$ , $L \ni M_0(1,-1,-2)$

نعوض في المعادلات $(1.3)$:

$$x=1+2\lambda\ ,\ y=-1+\lambda\ ,\ z=-2+\lambda$$

2- لدينا $\vec{v}(2,1,1)$ , $L \ni M_0(1,-1,-2)$ و $\overrightarrow{BM_0}(0,-2,-3)$ , $B(1,1,1)$

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{BM_0}\wedge\vec{v}\right|}{|\vec{v}|}\quad ;\ \overrightarrow{BM_0}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&-2&-3\\2&1&1\end{vmatrix}=\vec{i}-6\vec{j}+4\vec{k}$$

$$\left|\overrightarrow{BM_0}\wedge\vec{v}\right|=\sqrt{1+36+16}=\sqrt{53}\ \ \&|\vec{v}|=\sqrt{6}\ \Rightarrow d=\frac{\sqrt{53}}{\sqrt{6}}$$

20- أوجد إحداثيات المسقط القائم للنقطة $A(3,2,0)$ على المستوي المعطى بالعلاقة: $P\equiv 7y-z-2=0$

الحل: لدينا $\vec{N}(0,7,-1)$

نجد المعادلات الوسيطية للمستقيم المار من $A$ وله نفس منحى ناظم المستوي $P$ وهي $x=3\ ,\ y=2+7\lambda\ ,\ z=-\lambda$

نعوض في معادلة المستوي $P$، فنجد أن: $\lambda=-\frac{6}{25}$ ،نعود ونعوض في المعادلات الوسيطية السابقة، فنحصل على إحداثيات المسقط القائم للنقطة $A$ وهي:

$$x=3\ \ ,y=\tfrac{8}{25}\ ,\ z=\tfrac{6}{25}\Rightarrow\ (3,\tfrac{8}{25},\tfrac{6}{25})$$

21- لدينا النقطة $A(0,2,1)$ والمستقيم $L$ والمستوي $P$ المعينين بالشكل:

$$L\begin{cases}x+2y-z+4=0\\3x+2y+2=0\end{cases}\ ,\ P\equiv x+y-2z+2=0$$ :

المطلوب:

1- أوجد نقطة من المستقيم ترتيبها يساوي$(2)$.

2- احسب بعد النقطة $A(0,2,1)$ عن المستقيم $L$.

3- أوجد معادلتي المسقط القائم للمستقيم $L$ على المستوي $P$.

الحل: 1- نعوض $y=2$ في معادلتي المستقيم $L$، فنحصل على:

$$x - z + 8 = 0$$
$$3x + 6 = 0$$

بالحل المشترك لهاتين المعادلتين نجد أن: $x = -2$ , $z = 6$

$$\Rightarrow M(-2,2,6) \in L$$

2- لدينا $A(0,2,1)$ و $M(-2,2,6) \in L$ و $\overrightarrow{AM}(-2,0,5)$

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|}$$

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{v}(2,-3,-4) \Rightarrow \left|\vec{v}\right| = \sqrt{29}$$

$$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 5 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 15\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k} \Rightarrow$$

$$\left|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}\right| = \sqrt{265} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\sqrt{265}}{\sqrt{29}}$$

3- نجد حزمة المستوي المارة من $L$ ونختار منها المستوي المعامد لـ $P$.

$$P_\lambda \equiv (1+3\lambda)x + (2+2\lambda)y + (-1)z + (4+2\lambda) = 0$$

$$\vec{N}_\lambda(1+3\lambda,\ 2+2\lambda\ ,-1) \quad , \vec{N}_P(1,1,-2)$$

$$\vec{N}_\lambda . \vec{N}_P = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow P(-1) \equiv -2x - z + 2 = 0$$

: $$L' \begin{cases} P(-1) \equiv -2x - z + 2 = 0 \\ P \equiv x + y - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

تمثل معادلتي $L'$ معادلتي المستقيم المسقط لـ $L$ على $P$ المطلوب .

22- احسب أقصر بعد بين المستقيمين $L_1, L_2$ المعينين بالشكل:

: $$L_1 \begin{cases} x + 2z - 1 = 0 \\ x + 2y + z - 2 = 0 \end{cases} : \quad , \ L_2 \begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1} \end{cases}$$

الحل:نجد حزمة المستويات المارة من $L_1$:

$$P_\lambda \equiv (1+\lambda)x + (2\lambda)y + (2+\lambda)z + (-1-2\lambda) = 0$$

$$\vec{N}_\lambda(1+\lambda,\ 2\lambda\ ,2+\lambda)$$

نختار منها المستوي الموازي للمستقيم $L_2$ الذي منحاه $\vec{v}_2(2,1,1)$ أي:

$$\vec{N}_\lambda . \vec{v}_2 = 0 \Rightarrow \lambda = \tfrac{-4}{5} \ \Rightarrow P(\tfrac{-4}{5}) \equiv x - 8y + 6z + 3 = 0$$

ثم نختار نقطة $M_0(1,0,-1)$ ∋ $L_2$ ونحسب بعدها عن $P(\frac{-4}{5})$:

$$\delta = \frac{\left|P(1,0,-1)\right|}{\sqrt{1+64+36}} = \frac{2}{\sqrt{101}} \quad ; \ \vec{N}(1,-8,6)$$

23- لدينا المستقيم $L$ والمستوي $P$ المعينان بالشكل:

$$L\begin{cases}2x+y+2z+1=0\\ y+z+2=0\end{cases} \quad , \quad P\equiv 2x+4y+3=0$$ :

والمطلوب:

1- أثبت أن المستوي المار من المستقيم $L$ والمعامد للمستوي $P$، موازٍ للمحور $oz$.

2- أوجد نظيرة النقطة $C(1,0,-1)$ بالنسبة للمستوي $P$.

الحل:

1- لدينا $\vec{N}_P(2,4,0)$، نجد حزمة المستويات المارة من $L$:

$$P_\lambda \equiv (2)x+(1+\lambda)y+(2+\lambda)z+(+1+2\lambda)=0$$

$$\vec{N}_\lambda(2,\,1+\lambda\,,2+\lambda)$$

نختار منها المعامد لـ $P$.

$$\vec{N}_\lambda.\vec{N}_P=0\Rightarrow\lambda=-2\ \Rightarrow P(-2)\equiv 2x-y-3=0$$

وهي معادلة مستو يوازي المحور $oz$، لأنها من الشكل: $px+qy+h=0$.

2- نفرض أن $C_2(x_2,y_2,z_2)$ نظيرة النقطة $C$ بالنسبة للمستوي $P$،

هذا يعني أن:

$$\vec{N}_P\,//\,\overrightarrow{CC_2}\Rightarrow\frac{x_2-1}{2}=\frac{y_2}{4}=\frac{z_2+1}{0}$$

$$\Rightarrow x_2=1+2\lambda\ ,\ y_2=4\lambda\ \ ,z_2=-1 \qquad (1)$$

ومن تعريف التناظر، لدينا: النقطة $C_0\left(\frac{1+x_2}{2},\frac{y_2}{2},\frac{-1+z_2}{2}\right)\in P$، فهي تحقق معادلته:

$$\Rightarrow x_2+2y_2+4=0 \qquad (2)$$

نعوض المعادلات الوسيطية(1) في(2)، فنجد أن: $\lambda=-\frac{1}{2}$.

ثم نعوض في المعادلات الوسيطية (1)، بالتالي نحصل على إحداثيات $C_2$ نظيرة $C$ وهي: $C_2(0,-2,-1)$.

24- عين نقطة تقاطع المستقيم:

$$L:\begin{cases}\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+3}{4}\end{cases}$$

مع المستوي: $P\equiv x+2y+z+3=0$، ثم احسب بعد النقطة $A(1,0,1)$ عن هذا المستقيم.

الحل: نجد أولاً المعادلات الوسيطية لهذا المستقيم: $x=1-2\lambda\ ;\ y=-1+\lambda\ ;\ z=-3+4\lambda$

لإيجاد نقطة التقاطع مع المستوي $P$، نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم في $P$، فنجد أن:

$\lambda=\frac{1}{4}$، نعوض في المعادلات الوسيطية فنجد:

$x=\frac{1}{2}\ ,y=\frac{-3}{4}\ ,z=-2\Rightarrow(\frac{1}{2},\frac{-3}{4},-2)$ وهي نقطة التقاطع المطلوبة

نحسب بعد النقطة $A(1,0,1)$ عن هذا المستقيم:

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_1A}\wedge\vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|} \quad ,\vec{v}(-2,1,4)\ ,M_1(1,-1,-3)$$

$$\overrightarrow{M_1A}(0,1,4) \quad , \quad \left|\vec{v}\right|=\sqrt{21}$$

$$\overrightarrow{M_1A}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 4\\ -2 & 1 & 4\end{vmatrix}=0\vec{i}-8\vec{j}+2\vec{k}$$

$$\left|\overrightarrow{M_1A}\wedge\vec{v}\right|=\sqrt{68} \quad ,d=\frac{\sqrt{68}}{\sqrt{21}}$$

**تمارين غير محلولة:**

1- أوجد المعادلات التناظرية للمستقيم المار من النقطة $A(2,0,-1)$ والموازي للمحور $ox$، ثم أوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم المار من $A(2,0,-1)$ والموازي للشعاع $\vec{v}(1,1,2)$.

2- أوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم المار بالنقطتين: $M_1(2,8,3)$ , $M_2(3,-1,2)$

3- أوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم المار من النقطة $A(-3,4,-2)$ والموازي للشعاع $\vec{v}(4,2,-1)$ .

4- أوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم المعين بالشكل:

$$L\begin{cases}x+y+z-1=0\\ y-z=0\end{cases}$$

5- بفرض أن $L$ مستقيم معطى بالشكل:

$$L\begin{cases}P_1\equiv x+2y+4=0\\ P_2\equiv 3x-5y+z-5=0\end{cases}$$

المطلوب: اكتب المعادلات الوسيطية لهذا المستقيم.

6- أوجد الزاوية بين المستقيمين:

$$L_1\begin{cases}\frac{x-2}{-2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-3}{4}\end{cases} \quad , \quad L_2\begin{cases}x=1-2\lambda\\ y=\lambda\\ z=2-\lambda\end{cases}$$

7- أوجد الزاوية بين المستقيم $L\begin{cases}\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{1}\end{cases}$ ،والمستوي المعطى بالعلاقة: $P\equiv x-y+z-7=0$

8- لتكن لدينا النقاط: $C(1,0,0)$, $B(1,-2,1)$ , $A(1,2,3)$ . المطلوب:

احسب بعد هذه النقاط عن المستقيم $L$ المعطى بالمعادلات: $L\begin{cases}\frac{x-3}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{-5}\end{cases}$

9- ادرس وضع المستقيم $L$ المعطى وسيطياً بالشكل:

$$L\begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 2+3\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases} \quad : \quad$$

بالنسبة للمستويات الآتية:

1) $P_1 \equiv z+2=0$
2) $P_2 \equiv x+2y+z+1=0$
3) $P_3 \equiv 2x+y+2z+4=0$

10- ليكن لدينا المستقيم:

$$L:\begin{cases} 2x-y+z-1=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$$

المطلوب:

1- أوجد النقطة التي تنتمي إلى المستقيم $L$، والتي فاصلتها تساوي (1).

2- أوجد نقطة تقاطع هذا المستقيم مع المستوي الإحداثي $yoz$.

11- أوجد معادلة المستوي المار بالمستقيم $L$ المعطى بالشكل:

$$L\begin{cases} x-3y+z-1=0 \\ 2x-y+z+2=0 \end{cases} \quad : \quad$$

والموازي للمستقيم $L'$ المعين وسيطياً بالمعادلات: $x=\lambda \;;\; y=2 \;;\; z=1+\lambda$

12- أوجد معادلة المستوي المار من المستقيم $L$ المعطى بالشكل:

$$L\begin{cases} 3z+5=0 \\ x-y+2z+1=0 \end{cases} \quad : \quad$$

والمعامد للمستوي $P \equiv 2x-2y-3z-2=0$ .

13- بفرض $L_1, L_2$ مستقيمان معينان بالشكل:

$$L_1\begin{cases} 4x+3y+4=0 \\ x+2y+2z+1=0 \end{cases} \quad , \quad L_2\begin{cases} \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+2}{5} \end{cases} \quad : \quad$$

المطلوب: إيجاد معادلة المستوي المار $L_1$ والموازي لـ $L_2$.

14- احسب أقصر بعد بين المستقيمين $L_1, L_2$:

$$L_1\begin{cases} 2x-3y-2=0 \\ y-2z=0 \end{cases} \quad , \quad L_2\begin{cases} \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+4}{1}=\dfrac{z}{2} \end{cases} \quad : \quad$$

15- لدينا المستوي $P$ المعطى بالعلاقة: $P \equiv 2x+y+2z+3=0$

المطلوب: عين إحداثيات مسقط النقطة $A(3,0,4)$ على $P$.

16- أوجد مسقط النقطة $A(-2,3,4)$ على المستوي المعين بالعلاقة: $P \equiv x-2y+z-2=0$

17- أوجد مسقط النقطة $A(0,1,3)$ على المستوي المعين بالعلاقة: $P \equiv x-y+2z-1=0$

18- أوجد معادلتي المسقط القائم للمستقيم $L$ على المستوي $P$ حيث:

$$P \equiv 2x+y-2z+3=0 \quad , \quad L:\begin{cases} x-y+2z+1=0 \\ x-z+1=0 \end{cases}$$

19- لدينا النقطة $A(-1,2,1)$ والمستوي $P$ المعطى بالمعادلة: $P \equiv 4x+y+2z-2=0$

المطلوب:

1- اكتب معادلة المستوي $P$ بدلالة الأجزاء المقطوعة من المحاور الإحداثية.

2- أوجد مسقط النقطة $A$ على المستوي $P$.

20- أوجد معادلة المستوي المار من المستقيم $L$ المعين بالمعادلتين:

$$L:\begin{cases} x+y-z+2=0 \\ x-z-1=0 \end{cases}$$

والمعامد للمستوي $P$ المعطى بالعلاقة: $P \equiv 2x+y-2z-1=0$.

21- أوجد معادلة المستوي المار بالمستقيم $L$ المعطى وسيطياً بالمعادلات:

$$x=1+\lambda \; ; \quad y=\lambda \; ; \; z=1+2\lambda$$

والموازي للمستقيم $L'$ المعطى بالشكل: $\dfrac{x-2}{3}=y-1=\dfrac{z+2}{3}$

22- أوجد نظيرة النقطة $M_1(2,-1,3)$ بالنسبة للمستوي المعطى بالمعادلة: $P \equiv 2x-y+z-1=0$

23- لدينا النقطة $A(1,1,2)$ والمستوي $P$ المعطى بالعلاقة: $P \equiv 2x+2y-z+2=0$

المطلوب:

1- ادرس وضع النقطة $A$ بالنسبة للمستوي $P$.

2- أوجد نظيرة النقطة $A$ بالنسبة للمستوي $P$.

24- بفرض $L$ و $L'$ مستقيمان معينان بالشكل:

$$L:\begin{cases} 5x+2y+3=0 \\ x+2y+z+4=0 \end{cases} \quad , \quad L':\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-2}{0} \end{cases}$$

المطلوب: أوجد معادلة المستوي المار من $L$ والموازي لـ $L'$.

25- بفرض $L_1$ و $L_2$ مستقيمان معينان بالشكل:

$$L_1:\begin{cases} x-y+3z+4=0 \\ -2x+y+1=0 \end{cases} \quad , \quad L_2:\begin{cases} \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+1}{1} \end{cases}$$

المطلوب: احسب أقصر بعد بين المستقيمين $L_1$ و $L_2$.

26- بفرض $L_1$ و $L_2$ مستقيمان معينان بالشكل:

$$L_1:\begin{cases} 3x+2y+z+1=0 \\ x+3y-2z=0 \end{cases} \quad , \quad L_2:\begin{cases} \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{1} \end{cases}$$

المطلوب: احسب أقصر بعد بين المستقيمين $L_1$ و $L_2$.

27- لدينا المستقيم $L$ والمستوي $P$ المعينان بالشكل:

$$P \equiv x-3y-2z+1=0 \ , \quad L: \begin{cases} 3x+2z+1=0 \\ x-2y+4z+1=0 \end{cases}$$

المطلوب:

1- عين نقطة من المستقيم $L$ فصلها يساوي (1).

2- أوجد معادلتي المسقط القائم للمستقيم $L$ على المستوي $P$ .

28- لدينا المستقيم $L$ المعين بالشكل:

$$L \begin{cases} y+2z-1=0 \\ x+z-2=0 \end{cases}$$

المطلوب:إيجاد معادلتي المسقط القائم للمستقيم $L$ على المستوي $P$ المعطى بالعلاقة: $P \equiv 2x+4y+z+1=0$ .

29- أوجد نظيرة النقطة $A_1(1,1,1)$ بالنسبة للمستوي $P$ المعطىبالعلاقة: $P \equiv 3x+2y+z=0$ .

30- أوجد نظيرة النقطة $A_1(-1,2,3)$ بالنسبة للمستقيم $L$ المعطىبالشكل:

$$L \begin{cases} x+2y-1=0 \\ 2x+y+z-4=0 \end{cases}$$

31- أوجد نظير المستوي $P_1 \equiv x+2y-z+5=0$ بالنسبة للمستوي $P \equiv 3x-4y+5z-1=0$ .

32- أوجد نظير المستقيم:

$$L \begin{cases} 2x+2y-z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$$

بالنسبة للمستوي: $P \equiv x+2y+3z-1=0$ .

33- أوجد نظير المستوي $P \equiv x+y-2z+1=0$ بالنسبة للمستقيم

$$L \begin{cases} x-z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} .$$

الموضوع :

التاريخ : / /

## 1 السطوح في الفراغ :

تعريف السطح : هو المحل الهندسي لمجموعة جميع النقاط من الفراغ التي تحقق صفة معينة تسمى بالصفة المميزة لهذا السطح
نعبر عن هذه الصفة بعلاقة رياضية من الشكل

$$S \equiv f(x,y,z) = 0 \quad (1)$$

نسمي العلاقة (1) بالمعادلة الديكارتية للسطح S في الفراغ.

مثال:

1) الكرة : هي المحل الهندسي لمجموعة جميع النقاط المتساوية البعد عن نقطة ثابتة منه في الفراغ نسمي هذه النقطة الثابتة بـ مركز الكرة والبعد الثابت نسمية نصف قطر الكرة

الهيئة الطلابية
كلية العلوم
Faculty of Science

- لنفرض $C(a,b,c)$ مركز الكرة $R$ نصف قطر هذه الكرة
لنأخذ نقطة كيفية من الكرة $M(x,y,z)$
$\overline{CM} = R \quad , \forall M \in S$ الكرة

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} = R$$

بالتربيع

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2}$$

ملاحظة: إذا استطعنا كتابة المعادلة (1) بأحد الأشكال



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\left.\begin{aligned} X &= x(y,z) \\ Y &= y(x,z) \\ Z &= z(x,y) \end{aligned}\right\} (2)$$

نسمي الأشكال (2) أشكال ظاهرية للسطح S

* تمرين: نفرض S سطح معطى ديكارتيا بالعلاقة

$$S \equiv x + Zy^2 - 1 = 0$$

أعط شكلا ظاهريا لـ S

$$x = 1 - Zy^2$$

- المعادلات الوسيطية للسطح S من الفراغ :

من المعادلات (2) نلاحظ أن لكل نقطة من نقاط السطح درجتان من الحرية ويمكننا التعبير عن هاتين الدرجتين بوسيطين ( $u, v$ ) ونسمي المعادلات الوسيطية للسطح بالشكل الآتي

$$\left.\begin{aligned} X &= x(u,v) \\ Y &= y(u,v) \\ Z &= z(u,v) \end{aligned}\right\} (3)$$

ملاحظة: للانتقال من الشكل (1) لسطح إلى الشكل (3)

- نفرض أحد المتحولات و ليكن $x = u$ ثم نفرض $y = v$ ثم نعوض في المعادلة (1) فنحصل على شكل وسيطي للسطح S



الهيئة الطلابية
كلية العلوم
Faculty of Science
CamScanner الممسوحة ضوئيا بـ

وبالعكس للإنتقال من الـ ③ الى ① يتم ذلك بالتخلص من الوسيطين "$u$ و $v$" (حذف الوسيطين $(v,u)$ بين المعادلات ③)

تمرين : بفرض $S$ سطح معطى وسيطياً بالمعادلات

$x = u^2 + v$ ①  ،  $y = 2v$ ②  ،  $z = v + u$ ③

أعطِ شكلاً ديكارتياً لـ $S$

من ② $\Rightarrow v = \frac{y}{2}$

$z = \frac{y}{2} + u \Rightarrow \boxed{u = z - \frac{y}{2}}$

نعوض بـ ①

$x = \left(z - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{y}{2}$

وهو أحد الأشكال الديكارتية للسطح $S$

الهيئة الطلابية
كلية العلوم
Faculty of Science

تمرين : بفرض $S$ سطح معطى ديكارتياً بالعلاقة

$S \equiv xy + x + 2y^2 - 1 = 0$

- أعطِ شكلاً وسيطياً للسطح $S$

نفرض $x = u$  $y = v$

نعوض في $S$

$S \equiv uv + u + 2v^2 - 1 = 0$

$2v^2 = 1 - u \cdot v - u$

$$\boxed{z = \frac{1 - u \cdot v - u}{v^2}}$$



CamScanner الممسوحة ضوئيا بـ
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الموضوع :

التاريخ : / /

معادلة المستوي المماس ومعادلات المستقيم الناظم للسطح S في نقطة من نقاطه.

نميز حالتين إذا السطح S معطى ديكارتيا نعطى معادلة المستوي المماس لـ S في النقطة $M_0$ ذات العلاقة $M_0(x_0, y_0, z_0)$ الذي يحقق

$$S \equiv f(x, y, z) = 0$$

$$f'_{x_0}(x - x_0) + f'_{y_0}(y - y_0) + f'_{z_0}(z - z_0) = 0$$

$f'_{x_0}$ المشتق الجزئي للتابع f بالنسبة لـ x في النقطة $M_0$

$f'_{y_0}$ " " y " " f " " " " $M_0$

$f'_{z_0}$ " " z " " f " " " " $M_0$

$$N(f'_{x_0}, f'_{y_0}, f'_{z_0})$$

- ناظم المستوي المماس للسطح S في النقطة $M_0$
- ناظم السطح S في النقطة $M_0$

مثال:

$$S \equiv xy^2 + 2yz + z^3x + 2 = 0$$

$$S'_x = y^2 + z^3$$

$$S'_y = 2xy + 2z$$

$$S'_z = 2y + 3z^2x$$

الهيئة الطلابية
كلية العلوم
Faculty of Science



CamScanner الممسوحة ضوئيا بـ

ملاحظة: نسمي المستقيم المار من النقطة $M_0$ وله منحى الشعاع $\vec{N}$ السابق بالمستقيم الناظم للسطح في النقطة $M_0$ ونعطي معادلاته بالشكل

$$\frac{x-x_0}{f'_{x_0}} = \frac{y-y_0}{f'_{y_0}} = \frac{z-z_0}{f'_{z_0}}$$

تمرين: لدينا السطح $S$ المعطى ديكارتياً بالعلاقة

$$S \equiv 2x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-6=0$$

- أوجد معادلة المستوي المماس ومعادلات المستقيم الناظم لـ $S$ في النقطة $M_0(1,-2,0)$ منه.

الحل: نجد مركبات ناظم السطح $S$ في $M_0$

$$\vec{N}(S'_{x_0}, S'_{y_0}, S'_{z_0})$$

$S'_x = 4x-4 \Rightarrow S'_{x_0} = 4(1)-4=0$

$S'_y = 2y-2 \Rightarrow S'_{y_0} = 2(-2)-2=-6$

$S'_z = 2z+2 \Rightarrow S'_{y_0} = 2(0)+2=2$

هي نفسها مركبات ناظم المستوي المماس لـ $S$ في $M_0$ $\quad \vec{N}(0,-6,2)$

$$p(x-x_0)+q(y-y_0)+r(z-z_0)=0$$

نعوض

$$-6(y+2)+2(z)=0 \Rightarrow -6y-12+2z=0$$

معادلات المستوي المماس لـ $S$ في النقطة $M_0$ $\quad \boxed{-6y+2z-12=0}$



الهيئة الطلابية كلية العلوم Faculty of Science

CamScanner الممسوحة ضوئيا بـ

التاريخ : / /

الموضوع :

- مركبات $\bar{N}$ هي نفسها مركبات منحنى المستقيم الناظم لـ S في $M_0$

$$\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$$

$$\boxed{\frac{x-1}{0} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z-0}{2}}$$

CamScanner الممسوحة ضوئيا بـ

إيجاد معادلة المستوي المماس ومعادلات المستقيم الناظمي لسطح S في نقطة M

$\boxed{2}$ S معطى وسيطياً :

$$S: \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

نوضح طريقة الإيجاد من خلال عرض المثال الآتي

تمرين : أوجد معادلات المستقيم الناظمي ومعادلة المستوي المماس للسطح S المعطى وسيطياً بالمعادلات

$$S: \begin{cases} x = \lambda \sin \overset{\text{ثابت}}{\ell} \\ y = \lambda \cos \ell \\ z = \lambda \end{cases} \quad \text{المعادلات} = (1)$$

وذلك في النقطة من السطح الموافقة للقيمتين $\lambda = 1$ $\quad \ell = \frac{\pi}{2}$

الحل : 1. نجد مركبات النقطة $M_0$ تنتمي لـ S فنعوض $\lambda = 1$ و $\ell = \frac{\pi}{2}$ في المعادلات (1)

$x = \lambda \sin \ell \qquad y = \lambda \cos \ell \qquad z = \lambda$

$x = 1 \qquad y = 0 \qquad z = 1$

$\Rightarrow M_0(1, 0, 1) \in S$

2. نجد مركبات ناظم السطح S في $M_0$ وهي نفسها مركبات الناظم المستوي المماس لـ S في $M_0$ وكذلك مركبات منحنى المستقيم الناظم لـ S في $M_0$

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_{\lambda_0} & y'_{\lambda_0} & z'_{\lambda_0} \\ x'_{\ell_0} & y'_{\ell_0} & z'_{\ell_0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

مشتقات من أجل $\lambda$ :

$x'_\lambda = \sin \overset{\text{ثابت}}{\ell} \Rightarrow x'_{\lambda_0} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$

$y'_\lambda = \cos \ell \Rightarrow y'_{\lambda_0} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$

$z'_\lambda = 1 \Rightarrow z'_{\lambda_0} = 1$

يتبع

الهيئة الطلابية
كلية العلوم
Faculty of Science

مشتقات من أجل $l$ :

$$x'_l = \lambda \cos l \Rightarrow x'_{l_0} = 1 \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$y'_l = -\lambda \sin l \Rightarrow y'_{l_0} = -1 \cdot \sin\frac{\pi}{2} = -1$$

$$z'_l = 0 \Rightarrow z'_{l_0} = 0$$

٣- نشر المحدد .

الجواب :

$$\vec{N}(\underset{a}{1}, \underset{b}{0}, \underset{c}{-1})$$

للحصول على معادلة المستوي المماس نعوض في المعادلة :

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

$$1(x-1) + \cancel{0(y-0)} - 1(z-1) = 0$$

$$\boxed{x - z = 0}$$ معادلة المستوي المماس .

يوازي المحور $oy$ يمر من المبدأ .

الهيئة الطلابية
كلية العلوم
Faculty of Science

* معادلات المستقيم :

للحصول على معادلات المستقيم المناظر لـ $C$ في $M_0$

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

$$\boxed{\frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-1}{-1}}$$

تمرين 2.

ا- سطح S معطى ديكارتياً بالمعادلة :

$$S = x^2 y + z^2 + 3x = 0$$

المطلوب : ١- أعطي شكل وسيطي للسطح S

٢- أوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم الناظم لـ S في النقطة $M_0(-1,-1,2)$ منه .

[1] الحل : نفرض $\boxed{x = u}$ و $\boxed{z = v}$ نعوض في معادلة S

$$u^2 y + v^2 + 3u = 0$$

$$u^2 y = -v^2 - 3u$$

$$\boxed{y = \frac{-3u - v^2}{u^2}}$$

[2] الحل : يلزمنا معين المستقيم الناظم $\vec{N}(S'_{x_0}, S'_{y_0}, S'_{z_0})$

$$S'_{x_0} = 2yx + 3 \Rightarrow S'_{x_0} = 2(-1)(-1) + 3 = 5$$

$$S'_{y_0} = x^2 \Rightarrow S'_{y_0} = (-1)^2 = 1^2 = 1$$

$$S'_{z_0} = 2z \Rightarrow S'_{z_0} = 2(2) = 4$$

$$\vec{N}(\underset{a}{5}, \underset{b}{1}, \underset{c}{4})$$

نعوض في المعادلات

$$\frac{x - x_0}{S'_{x_0}} = \frac{y - y_0}{S'_{y_0}} = \frac{z - z_0}{S'_{z_0}} = \lambda$$

$$\frac{x + 1}{5} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z - 2}{4} = \lambda$$

الانتقال للشكل الوسيطي

$$x = -1 + 5\lambda$$

$$y = -1 + \lambda$$

$$z = 2 + 4\lambda$$

الهيئة الطلابية
كلية العلوم
Faculty of Science

تمرين 3

لدينا سطح معطى ديكارتياً

$$S = x^2 - 4y^2 + 3z^2 - 4 = 0$$

المطلوب:

1) برهن أن المستوي المماس للسطح S في النقطة $M_0(2,0,0)$ هو مستوي موازي للمستوي الاحداثي $y \circ z$

2) برهن أن المحور $\vec{ox}$ يمثل المستقيم الناظم لـ S في النقطة $M_0$ هو

الحل

1) نجد معادلة المستوي المماس

$$S'_x = 2x \Rightarrow S'_{x_0} = 4$$

$$S'_{y_0} = -8y \Rightarrow S'_{y_0} = 0$$

$$S'_{z_0} = 6z \Rightarrow S'_{z_0} = 0$$

$$\vec{N}(\underset{a}{4}, \underset{b}{0}, \underset{c}{0})$$

يمكن أن نبرهن هندسياً

نعوض في المعادلة

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$4(x - 2) = 0$$

$$4x - 8 = 0$$

$$x - 2 = 0$$

نلاحظ معادلة المستوي المماس من الشكل $px + h = 0$ لذلك يمثل معادلة مستوي موازي للمستوي $y \circ x$

2) الحل: $\vec{v}(4,0,0)$ نعوض في المعادلات

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = l$$

$$\frac{x - 2}{4} = \frac{y - 0}{0} = \frac{z - 0}{0} \Rightarrow \frac{x - 2}{4} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$$

معادلتي المستقيم:

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

معادلتي المحور $\vec{ox}$

الهيئة الطلابية
كلية العلوم
Faculty of Science

تمرين 4 :

ص S سطح معطى وسيطياً بالمعادلات $x = u^2 + v$ ، $y = 2u$ ، $z = v + u$

المطلوب :

1- أكتب معادلة المستوي المماس للسطح S في النقطة الموافقة لـ $u = 1$ و $v = -1$ وذلك في جملة جديدة ناتجة عن الجملة القديمة بانسحاب شعاعه $\vec{O}(1,1,-1)$ .

الحل : 1- نجد $M_0$ بتعويض u و v بالمعادلات ①

$$x = 1^2 + (-1) = 0 \qquad y = 2(-1) = -2 \qquad z = -1 + 1 = 0$$

$$M_0(0,-2,0) \in S$$

2- مركبات ناظم السطح S في $M_0$

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_{u_0} & y'_{u_0} & z'_{u_0} \\ x'_{v_0} & y'_{v_0} & z'_{v_0} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{N}(\underset{p}{-2}, \underset{q}{-1}, \underset{r}{4})$$

$$p(x - x_0) + q(y - y_0) + r(z - z_0) = 0$$

$$-2(x - 0) + (-1)(y + 2) + 4(z - 0) = 0$$

$$\boxed{-2x - y + 4z - 2 = 0}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + X \\ y &= y_0 + Y \\ z &= z_0 + Z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 1 + X \\ y &= 1 + Y \\ z &= -1 + Z \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

نعوض في المعادلة

$$-2(1 + X) - (1 - Y) + 4(-1 + Z) - 2 = 0$$

$$-2X - Y + 4Z - 9 = 0$$

الانسحاب يحافظ على التوازي

الهيئة الطلابية
كلية العلوم
Faculty of Science

# المنحنيات في الفراغ :

التعريف : هو المحل الهندسي لمجموعة جميع نقاط تقاطع سطحين في الفراغ نرمز له بـ $C$ و نعبر عنه بالمعادلتين

$$C : \begin{cases} S_1 = f(x, y, z) \\ S_2 = g(x, y, z) \end{cases} \rightarrow 1$$

نسمي العلاقة (1) بالمعادلتين الديكارتيتين للشكل $C$

ملاحظة

- نعبر عنه بتقاطع سطحين .

- نعبر عن المنحني وسيطياً بالمعادلات :

$x = (x)t \quad y = (y)t \quad z = z(t)$

الهيئة الطلابية
كلية العلوم
Faculty of Science

REDMI A5
11/12/2025 21:55

نظري هندسة تحليلية الثلاثاء :

**تمرين :** لنفرض S معطى

$$S \equiv x^2 + z^2 - 3y + 2 = 0$$

1- اوجد نقطة تحقق من S

$\Leftarrow z = 0 \ , \ x = 0$

$-3y + 2 = 0$

$\Rightarrow y = \frac{2}{3}$

$(0, \frac{2}{3}, 0) \in S$

2- اوجد نقطة من S تحقق راقمها وفاصلتها

$z = 1 \ , \ x = -1$

$\Rightarrow 1 + 1 - 3y + 2 = 0$

$-3y = -4$

$\Rightarrow \boxed{y = \frac{4}{3}}$

$(1, \frac{4}{3}, 1)$

3) اثبت أن المستوي المماس لـ S

$M_0(-1, 1, 0)$

منه يمثل مستوي موازياً

لـ $\overrightarrow{oz}$

- أوجد معادلتي المستقيم الناظم لـ S في $M_0(-1, 1, 0)$

- أوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم الناظم لـ S في $M_0$

(منطلع المستقيم الناظم

بعدين منطلع الوسيطية)

نقطة دمنى = الناظم

**المنحنيات في الفراغ**

$$C : \begin{cases} S_1 \equiv f(x, y, z) = 0 \\ S_2 \equiv g(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (2)$$

ملاحظة : الانتقال من الشكل

(1) ⟵ (2)

نفرض أحد المتحولات ولتكن

$\boxed{t = x}$

ثم نعوض في المعادلتين (1)

في الحل المشترك نحصل على

$\boxed{y = y(t)}$

$\boxed{z = z(t)}$

شكل وسيطي.

الهيئة الطلابية
كلية العلوم
Faculty of Science

② ⇐ ① نحسب $t$ في إحدى المعادلات الوسيطية ونفرض أن المعادلتين الباقيتين ندخل ع شكل ديكارتي لـ $C$

**ملاحظة:** ~~[illegible]~~

لإيجاد نقطة من $C$

(-1) $C$ معطى ديكارتياً:

- نعطي قيمة لـ $x=0$

نعوض في معادلتي $C$ ندخل على $z_0 , y_0$

---

تمرين: لدينا المنحني المعطى وسيطياً

$$x = 1-t^2 \quad (1) \qquad y = t \quad (2) \qquad z = -t \quad (3)$$

المطلوب: 1- اوجد شكلاً ديكارتياً للمنحني $C$

(المعادلتين الديكارتيتين)

1- ندخل قيمة $t$

$t=y$ من ②

نعوض في ① و ③

$$C: \begin{cases} x = 1-y^2 \\ z = -y \end{cases}$$

شكل ديكارتي للمنحني $C$

تمرين: لدينا المنحني $C$ المعين بالشكل

$$C: \begin{cases} x^2+8y+4z-8=0 \\ x-y-z+2=0 \end{cases}$$

اوجد شعاعاً وسيطياً لـ $C$

$\boxed{x=t}$ نعوض في معادلتين $C$

$$t^2+8y+4z-8=0$$
$$t-y-z+2=0$$

بالحل المشترك

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}t^2 - t \\ z = \frac{1}{4}t^2 + 2t + 2 \end{cases}$$

إحد الاشكال الوسيطية

---

السطوح أو منحنيات في الامتحان).

**فقرة مهمة:** (منحنيات):

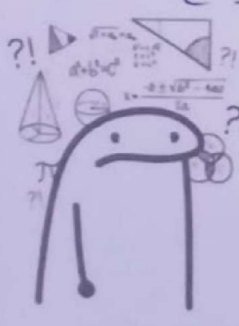
مساقط منحني على المستويات الاحداثية:

نناقش حالتين:

① $C$ معطى ديكارتياً:

$$C: \begin{cases} S_1 = f(x,y,z) = 0 \quad (1) \\ S_2 = g(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

⇐ يتبع



الهيئة الطلابية
كلية العلوم
Faculty of Science

مسقط c على المستوي الاحداثي

$(xoy)$

نحذف z بين ① و ②

نحصل على معادلة $f(x,y)=0$

(إيجاد علاقة فيها x, y فقط)

(نحذف بين ⇐ نشيل وحدة منحط بوحدة)

نسمي $f(x,y)=0$ مسقط

المنحني على $xoy$

- أوجد معادلتي المسقط:

$$\begin{cases} f(xoy)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

بنفس الطريقة: نجد مسقط

c على $yoz$

نحذف x بين ① و ②

فنحصل على معادلة من الشكل

$f(y,z)=0$ مسقط c

$$\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$$

وكذلك معادلتي المستقيم على

$xoz$

$$\begin{cases} F(x,z) \\ y=0 \end{cases}$$

الحالة ②: c معطى وسيطياً

$x=x(t)$ ... ①

$y=y(t)$ ... ②

$z=z(t)$ ... ③

مسقط c على $xoy$

من الشكل $F(x,y)=0$

نحذف t بين ① و ② الوسيطين

فنحصل على معادلة من الشكل

$F(x,y)=0$

ومعادلة المسقط

$$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

وبنفس الاسلوب نجد مسقط

على $xoz$ نحذف t بين

المعادلة ① و ③ الوسيطين

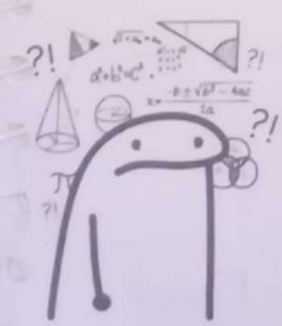
فنحصل على معادلة

$f(x,z)$ المسقط

معادلتي المسقط

$$\begin{cases} f(x,z) \\ y=0 \end{cases}$$

الهيئة الطلابية
كلية العلوم
Faculty of Science



س: ماذا تمثل معادلة المسقط
دائرة - قطع زائد - قطع ناقص
- مستقيم - قطع مكافئ.

$x^2-y^2$ قطع زائد
$x^2+y^2$ قطع ناقص / دائرة
$x^2+y$ مستقيم
$x^2+y$ قطع مكافئ

---

تمرين: لدينا المنحني المعرف وسيطيا

$x = t+1$ ... ①
$y = t^2$ ... ②
$z = 2t+1$ ... ③

المطلوب: ① أوجد معادلتي المسقط للمنحني C في المستوي الإحداثي $oxz$.

② ماذا تمثل معادلة هذا المسقط؟

الحل: نحذف t بين x و z

من ① $t = x-1$

نعوض في ③

$z = 2(x-1)+1$
$= 2x-2+1$

$\begin{cases} z = 2x-1 \\ y = 0 \end{cases}$

تمثل معادلة مستقيم واقع في المستوي $y=0$ أي $xoz$

---

تمرين: نعرف C منحنى فضائيا:

$C = \begin{cases} x^2+z^2-2y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$

① أوجد معادلة مسقط C القائم على المستوي $yoz$

② ماذا تمثل معادلتا المسقط:

الحل: نحذف x بين ① و ②

من ② $x=-y$

نعوض في ①

$y^2+z^2-2y=0$

معادلتا المسقط:

$\begin{cases} y^2+z^2-2y=0 \\ x=0 \end{cases}$

② ماذا تمثل؟

$y^2+z^2-2y=0$

(بإتمام المربع كامل)

$z^2+y^2-2y+1-1=0$

$z^2+(y-1)^2=1$

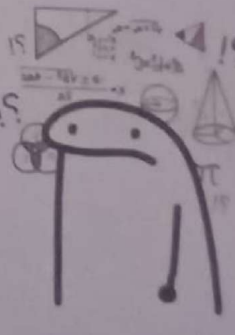
معادلة دائرة مركزها $(1,0)$

واقعة في المستوي $x=0$

أي دائرة مركزها $(0,1,0)$

دائرة أو قطع زائد في الأحوال المتبقية = دائرة

الهيئة الطلابية
كلية العلوم
Faculty of Science



## معادلات المستقيم المماس ومعادلة المستوي الناظم للمنحني C في نقطة من نقاطه $M_0$ :

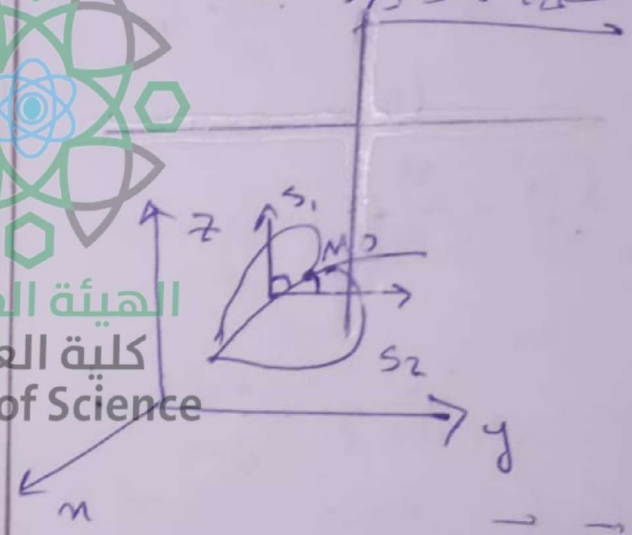
① C معطى ديكارتياً :

(منطلع المستقيم المماس وليس المستوي المماس)

$$C \begin{cases} S_1 \equiv f(x,y,z)=0 \\ S_2 \equiv g(x,y,z)=0 \end{cases}$$

بدنا منحنى : نجد منحنى المستقيم المماس لـ C في $M_0$

رسمة للتوضيح (بس مو واضحة ن)




$$\vec{T} = \vec{N_1} \cap \vec{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f'_{x_0} & f'_{y_0} & f'_{z_0} \\ g'_{x_0} & g'_{y_0} & g'_{z_0} \end{vmatrix}$$

مشتقات جزئية

المحدد ⇐ مركبات الشعاع T بعد النشر

$$\vec{T}(a,b,c)$$

نعوض في المعادلات :

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

فنحصل على المستقيم المماس لـ C في $M_0$

- المستوي الناظم لنفس المنحنى يلي طلع معنا

(المستوي المعامد للمستقيم المماس أي أن توجيه T هو ناظم للمستوي المماس).

(الحكي يلي بالاقواس هو حكي الدكتورة الشفهي يمكن يكون مو دقيق بس أنا بكتبو شان أفهم فينكم ما تكتبوه)

ملاحظة : نسمي بالتعريف المستوي المعامد للمستقيم المماس لـ المنحني C في النقطة $M_0$ بالمستوي الناظم لـ C في $M_0$

وتعطى معادلته

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

(مركبات الـ T السابقة هي نفسها مركبات ناظم المستوي الناظم)

الهيئة الطلابية
كلية العلوم
Faculty of Science

الحالة (2) :

C معطى وسيطياً

$x = x(t)$

$y = y(t)$

$z = z(t)$

تعطى مركبات منى المستقيم المماس لـ C في النقطة $M_0$ بالشكل

$\vec{T}(x'_{t_0}, y'_{t_0}, z'_{t_0})$

($t_0$ : المستقيم الجزئي لـ t بالنسبة لـ $M_0$)

وتعطى معادلاته بالشكل

$$\frac{x - x_0}{x'_{t_0}} = \frac{y - y_0}{y'_{t_0}} = \frac{z - z_0}{z'_{t_0}}$$

وتعطى معادلة المستقيم الناظم لـ C في $M_0$ بالعلاقة :

$$x'_{t_0}(x - x_0) + y'_{t_0}(y - y_0) + z'_{t_0}(z - z_0) = 0$$

الهيئة الطلابية
كلية العلوم
Faculty of Science

محاضرة الخميس : ١٧/١٨

تمرين : نفرض $C$ منحني معطى ديكارتياً

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ y + x = 0 \end{cases}$$

المطلوب : ١- أوجد معادلة المستوي الماسي للناظم في $C$ في $M_0(-1,1,1)$

ومنه

٢- أوجد معادلات المماس $d$ لـ $C$ في $M_0$

الحل :

نحدد مركبات ناظم المستوي الناظم

$$\overrightarrow{T} = \overrightarrow{N_1} \wedge \overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f'_{x_0} & f'_{y_0} & f'_{z_0} \\ g'_{x_0} & g'_{y} & g'_{z} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

الهيئة الطلابية
كلية العلوم
Faculty of Science

$$f'_x = 2x \Rightarrow f_{x_0} = -2$$

$$f'_y = -2y \Rightarrow f_{y_0} = -2$$

$$f'_z = 2z \Rightarrow f_{z_0} = 2$$

---

$$g'_x = 1 \Rightarrow g_{x_0} = 1$$

$$g'_y = 1 \Rightarrow g_{y_0} = 1$$

$$g'_{z_0} = 0 \Rightarrow g_{z_0} = 0$$

$\vec{T}(-2, 2, 0)$
$\quad\;\; p \quad q \quad r$

نعوض في المعادلة

$p(x-x_0)+q(y-y_0)+r(z-z_0)=0$

$-2(x+1)+2(y-1)+0=0$

$\Rightarrow -2x+2y-2-2=0$

$\boxed{\Rightarrow -2x+2y-4=0}$

② $\vec{T}(-2,2,0)$ منحى المستقيم المماس لـ $C$ في النقطة $M_0$

نعوض $z$: $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{x+1}{-2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{0}}$

معادلات الشكل التناظري.

لو بدها معادلتين أول معادلة

$$\begin{cases} \frac{z-1}{0}=0 \\ \frac{x+1}{-2}=\frac{y-1}{2} \end{cases}$$

تمارين فيها أفكار جانبية:

نفرض $C$ منحنى معطى وسيطياً بالمعادلات:

$x=t+1;\ y=2t^2+1,\ z=t^2+4$

المطلوب:

① أوجد معادلات المستقيم المماس ومعادلة المستوي الناظم لـ $C$ في النقطة الموافقة لـ $t=0$

الحل:

النقطة منطلقها من المعادلات الوسيطية

إيجاد النقطة $M_0 \in C$

نعوض $t=0$ في معادلات $C$

$x=1$
$y=1$
$z=4$

$\boxed{M_0(1,1,4)}$

منطلق المستقيم المماس والمستوي المماس

(بدنا منحى المستقيم المماس)

نجد المنحى للمستقيم المماس

$\vec{T}(x'_{t_0}, y'_{t_0}, z'_{t_0})$

$x'_t=1 \Rightarrow x'_t=1$

$y'_t=4t \Rightarrow y'_{t_0}=4(0)=0$

$z'_t=2t \Rightarrow z'_{t_0}=2(0)=0$

الهيئة الطلابية
كلية العلوم
Faculty of Science

$\Rightarrow \vec{T}(\underset{a}{1},\underset{b}{0},\underset{c}{0})$

نعوض $\boxed{\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-4}{0}}$

$\Rightarrow$ يوازي $\vec{OX}$

(لإيجاد المستوي الناظم نعوض المعادلات في معادلة المستوي)

نعوض:

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$1(x-1)+0 \Rightarrow \boxed{x-1=0}$

مستوي يوازي $\vec{yoz}$ المستوي

تمرين: دوات: (مسألة منحني):

بفرض $S$ سطح معطى ديكارتياً بالشكل

(المنحني $\Rightarrow$ تقاطع سطحين)

$S\equiv y^2+z^2+2x-2=0$

إذا قُطع السطح السابق بالمستوي $P=y+z=0$

المطلوب:

① - أوجد معادلة المسقط لمنحني التقاطع الناتج على المستوي الإحداثي $xoy$

ماذا تمثل معادلة المسقط؟

② أوجد معادلات المستقيم المماس والمستوي الناظم لمنحني التقاطع المذكور في النقطة $M_0(0,1,-1)$ منه

الحل:

$$C:\begin{cases} S\equiv y^2+z^2+2x-2=0 & ① \\ P\equiv y+z=0 & ② \end{cases}$$

① المسقط على $oxy$ نحذف $z$ بين المعادلتين ① و ②.

من ② $\Rightarrow \boxed{z=y}$

نعوض في ①

$y^2+y^2+2x-2=0$

$\Rightarrow 2y^2+2x-2=0$

$\boxed{y^2+x-1=0}$ معادلة المسقط

قطع مكافئ (ذروة / تقعر)

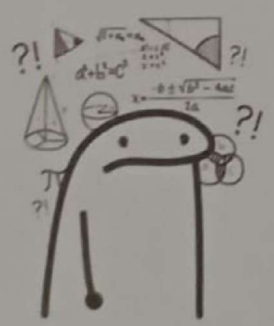
(وحدة درجة أولى والثانية درجة ثانية)

نرده للشكل النموذجي:

$(y-y_0)^2=x-x_0$

الذروة $(x_0,y_0)$

التقعر (الجهة يلي بلا تربيع)



الهيئة الطلابية
كلية العلوم
Faculty of Science

جواب ماذا يمثل :

$y^2 + x - 1 = 0$

$\Rightarrow y^2 = -x + 1$

$\Rightarrow y^2 = -(x-1)$

قطع مكافئ

ذروته $(1, 0)$

تقعره نحو $\vec{ox}$ سالب .

(أو الجهة السالبة لـ $\vec{ox}$ .

② الطلب الثاني وظيفة

(طريقة الحل : ننشر المحدد مع مشتقات جزئية ونحل مثل السؤال يلي قبله)

مثال : (إيجاد نقطة تقاطع منحني مع مستوٍ إحداثي)

لدينا المنحني المعطى وسيطياً بالمعادلات

$x = 1 - t^2 \; ; \; y = t \; ; \; z = -t^2$

المطلوب : ① أوجد معادلتي المسقط القائم للمنحني $C$ على المستوي الإحداثي $xoy$ ، ماذا تمثل معادلة المسقط .

② عين نقاط تقاطع هذا المنحني مع المستوي المعطى بالمعادلة :

$P \equiv 2x + y - z - 2 = 0$

الحل : لإيجاد معادلتي المسقط .

من العلاقة ① و ②

$t = y$

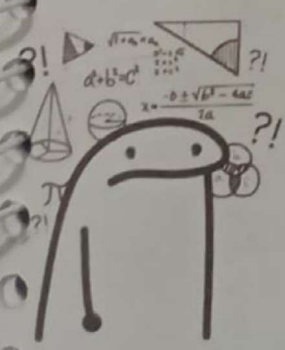
نعوض في ①

$\boxed{x = 1 - y^2}$

معادلة المسقط

$$\begin{cases} x = 1 - y^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

الهيئة الطلابية
كلية العلوم
Faculty of Science



ماذا تمثل معادلة الاسقاط؟

$x - 1 + y^2 = 0$

$\Rightarrow y^2 = -(x-1)$

قطع مكافئ

ذروته $(1,0)$

تقعره نحو $ox$ سالب.

② التقاطع: المنحني شكل وسيطي

او تقاطع مستويين

لايجاد نقاط تقاطع المنحني $C$ مع

$P$ نعوض معادلات $C$ في $P$:

$2(1-t^2)+t-(-t^3)-2=0$

$\Rightarrow 2-2t^2+t+t^2-2=0$

$\Rightarrow -t^2+t=0$

$\Rightarrow t(1-t)=0$

$\Rightarrow t=0$

$t=1$ طلع معنا متمين

لـ $d$

منعوض في المعادلات $C$

من أجل

$t=0 \Rightarrow x=1-0=1$

$y=0 \quad z=0$

$(1,0,0)$

نقطة التقاطع ①

من أجل $t=1$

$x=1-1=0$

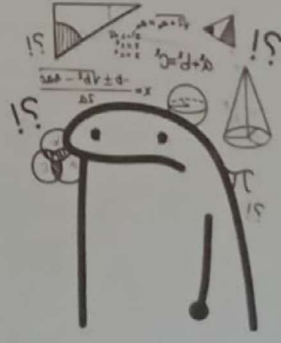
$y=1$

$z=-1$

$(0,1,-1)$

نقطة التقاطع ②

الهيئة الطلابية
كلية العلوم
Faculty of Science



نظري تلاتا المحاضرة الرابعة (كتابة)

الكرة: هي المحل الهندسي

لمجموعة جميع النقاط من

الفراغ التي تبعد بعداً

ثابتاً عن نقطة ثابتة منه

نسمي هذه النقطة الثابتة

بمركز الكرة ونرمز له بـ C

$C(a,b,c)$

ونسمي البعد الثابت

بنصف قطر الكرة ونرمز له

بالرمز R.

تُعطى المعادلة المختزلة (القياسية)

للكرة التي مركزها S ونصف

قطرها R بالعلاقة

(1) $\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2}$

~~[illegible]~~

ننشر المعادلة (فك المطابقات)

(2) $\boxed{x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0}$

حيث

$d=a^2+b^2+c^2-R^2$

العلاقة (2): تسمى بالمعادلة

العامة لكرة مركزها C

ونصف قطرها R

ملاحظة: معادلة الكرة (2)

تتمتع بعدة خواص منها

أمثال الحدود التربيعية متساوية

وتساوي الـ 1

(نرمز لها بهذه الحالة $S^*$)

أما إذا كانت الأمثال متساوية

ويساوي عدداً ما وليكن A.

(سنرمز لها بهذه الحالة بـ S)

فننتقل من الشكل S إلى الشكل

$S^*$ عن طريق تقسيم المعادلة على A.

2- الحدود المستطيلة معدودة (أمثالها)

ملاحظة: حساب مركز ونصف

قطر الكرة المكتوبة بالشكل

(2) (بالشكل العام)

$C(a,b,c)$

$a=\frac{\text{أمثال } x}{-2}$

$b=\frac{\text{أمثال } y}{-2}$

$c=\frac{\text{أمثال } z}{-2}$

ونحسب نصف القطر من العلاقة

$R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$

(حصرا المعادلة مكتوبة بالشكل 2)

ملاحظات:

$R = \sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$

مجموعة أقل من d

$R > 0 \Leftarrow$ (2) المعادلة تمثل كرة حقيقية

$R < 0 \Leftarrow$ (2) تمثل كرة تخيلية

$R = 0 \Leftarrow$ (2) تمثل كرة متجمعة في مركزها

تمرين: أوجد مركز ونصف قطر الكرة المعطاة:

$S \equiv 2x^2+2y^2+2z^2+4x-8y+12z-2=0$

نقسم على 2

$S^* \equiv x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z-1=0$

$a = \frac{2}{-2} = -1$ امثال x على -2

$b = \frac{-4}{-2} = 2$

$c = \frac{6}{-2} = -3$

$\boxed{C(-1, 2, -3) \text{ مركز الكرة}}$

نصف القطر: ؟

بدنا العدد d

$d = -1$

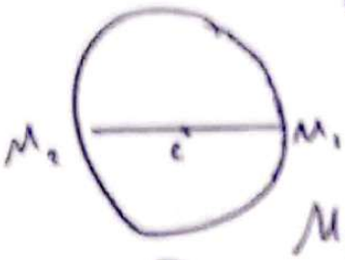
$R = \sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$

$= \sqrt{1+4+9+1} = \sqrt{15}$

مثال ص 4 من المقرر

السؤال 3

- إيجاد معادلة كرة علم نهايتي قطر فيها




نفرض $M_1$ ، $M_2$ هما نهايتي قطر والكرة.

المطلوب: نحسب c من

منتصف $\overline{M_1M_2}$ $C\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$

لحساب R: نطبق دستور البعد بين نقطتين أي:

$R = \overline{CM_1}$ ، $R = \overline{CM_2}$

$R = M_1M_2$

$\boxed{\overline{M_1M_2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$

تمرين: أوجد معادلة الكرة التي تكون النقطتين $M_2(4,1,-3)$ ، $M_1(2,-3,5)$ نهايتي القطر فيها.

منتصف $M_1M_2$ $C\left(\frac{6}{2}, \frac{-2}{2}, \frac{2}{2}\right)$

$\Rightarrow C(3,-1,1)$

$R = C\vec{M} = \sqrt{(2-3)^2+(3+1)^2+(5-1)^2}$

$= \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}$

$$\boxed{(x-3)^2+(y+1)^2+(z-1)^2 = 21}$$

- دراسة وضع مستوي بالنسبة للكرة

$S^* \equiv 0$

$P \equiv px+qy+rz+h=0$

لدراسة وضع أولاً نجد مركز ونصف قطر الكرة $S^*$

2- نقارن بين $R$ وبعد $C$ عن المستوي $P$ الذي نرمز له بـ $S$

نناقش: (1) اذا كان $R < \delta$

نصف القطر

بعد $C$ عن $R$

$\Leftarrow$ $P$ لا يقطع الكرة $S^*$

(2) اذا كان $R = \delta$ هنا نقول بان المستوي $P$ يمس الكرة $S^*$ نقطة.

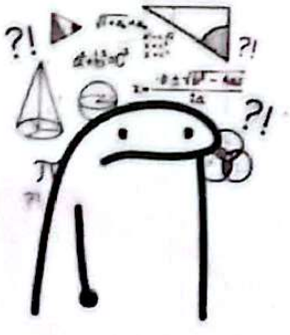
نسمي هذه النقطة بنقطة التماس. نجد مركباتها:

نجد المعادلات الوسيطية للمستقيم المار من $C$ وله منحى ناظم المستوي $P$.

- نجد نقطة تقاطع هذا المستقيم مع $P$.

وهي نفسها نقطة التماس المطلوبة.

(3) - إذا كان $R > \delta$ هنا نقول بان المستوي $P$ يقطع الكرة $S^*$ بدائرة تسمى دائرة التقاطع



$\{C\}$ $S^* \equiv$ ... تعبر عنها

$P =$ ...

يمكن الدمج مع المتجهات

ونحسب مركز دائرة التقاطع بنفس الطريقة التي حسبنا بها نقطة التماس.

ونحسب نصف قطرها عن طريق القانون

$$\boxed{r = \sqrt{R^2 - \delta^2}}$$

(دائماً لازم تكون مكتوبة بشكل $S^*$)

ص 86 : 9.5 :

$C(4,7,-1), d = 30$

$R = \sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$

$= \sqrt{16+49+1-30} = \sqrt{36} = 6$

$\delta = \dfrac{|P(4,7,-1)|}{|\vec{N}|}$ بعد C عن P

$\vec{N}(3,1,-1)$

$|\vec{N}| = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$

$\dfrac{\sqrt{11}\cdot\sqrt{11}}{\sqrt{11}} =$

$\delta = \dfrac{|3(4)+7+|-9|}{\sqrt{11}}$

$= \dfrac{11}{\sqrt{11}} = \sqrt{11}$

$R = 6 \qquad \sqrt{11} = \delta$

لين الـ 4,3

$R > \delta$

بالتالي P يقطع الكرة $S^*$ ج دائرة.

- عين مركز ونصف قطر دائرة التقاطع.

$r^2 = R^2 - \delta^2$

$r^2 = 36 - 11 = 25$

$\boxed{r = 5}$

مركز دائرة التقاطع:

نجد المعادلات الوسيطية للسيتم المار من $C(4,7,-1)$

ومنحناه $\vec{N}(3,1,-1)$



$\Leftarrow$

$$\left.\begin{aligned} x &= 4+3\lambda \\ y &= 7+\lambda \\ z &= -1-\lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow P \quad (*)$$

$$3(4+3\lambda)+(7+\lambda)-(-1-\lambda)-9=0$$

$$\boxed{\lambda=-1}$$

نعوض في (*)

$x = 4-3 = 1$

$y = 7-1 = 6$

$z = -1+1 = 0$

مركز دائرة التقاطع $(1, 6, 0)$

---

دراسة وضع مستقيم وكرة :

$S^* \equiv 0$

نناقش حالتين

(1) معطى وسيطياً :

عندئذٍ نعوض المعادلات الوسيطية للمستقيم في معادلة $S^*$

فنحصل على معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة للوسيط $\lambda$

فنناقش حسب قيم $D$ :

إذا كانت $D>0$ ⇐ يوجد قيمتين للوسيط $\lambda$

⇐ المستقيم $L$ يقطع $S^*$ بنقطتين نسميهما نقطتي التقاطع.

لإيجاد مركباتهما نعوض قيمتي الوسيط في المعادلات الوسيطية لـ $L$.

---

أما إذا كانت $D=0$

توجد قيمة وحيدة لـ وسيط $\lambda$ ⇐ $L$ يمس $S^*$ بنقطة تسمى نقطة التماس.

نجد مركباتها: تعويض قيمة $\lambda$ بالمعادلات الوسيطية لـ $L$.

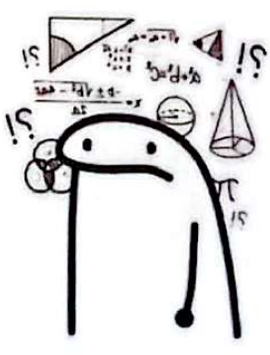
---

أما إذا كان $D<0$

⇐ $L$ 8 يقطع الكرة $S^*$

تمرين محلول ص 85

9,5



**تمارين محلولة:**

1- أوجد معادلة كرة تمر بالنقاط: $M_1(0,0,0), M_2(1,0,0), M_3(0,2,1), M_4(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$

الحل: بالتعويض في معادلة الكرة:

$$S^*(x,y,z) \equiv x^2+y^2+z^2+2c_1x+2c_2y+2c_3z+d=0$$

$$\left.\begin{array}{l} d=0 \\ 2c_1+d+1=0 \\ 4c_2+2c_3+d+5=0 \\ c_1+2c_2+c_3+d+\frac{3}{2}=0 \end{array}\right\}$$

بالحل المشترك نجد: $c_1=\frac{-1}{2}$ و

$$\left.\begin{array}{l} 4c_2+2c_3=-5 \\ 2c_2+c_3=-1 \end{array}\right\}$$

الجملة الأخيرة مستحيلة، لذلك فالنقاط الأربع تقع في مستو واحد دون أن تقع على محيط دائرة واحدة، وبالتالي لا تمر بهذه النقاط أية كرة.

2- أوجد معادلة كرة تكون النقطتان $M_1(1,2,3)$ , $M_2(0,-1,2)$ طرفي أحد أقطارها.

الحل: نجد $C$ مركز الكرة:

$$C\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right) \Rightarrow C(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{5}{2})$$

$$R=\overline{CM_1}=\frac{\sqrt{11}}{2}$$

$$\Rightarrow (x-\tfrac{1}{2})^2+(y-\tfrac{1}{2})^2+(z-\tfrac{5}{2})^2=\tfrac{11}{4}$$

3- اكتب معادلة كرة مركزها النقطة $C(3,4,1)$ وتمس المحور $oz$.

الحل:لدينا المركز، بقي لتعيين معادلة الكرة أن نعين نصف القطر $R$.

في البداية سأكتب معادلتي المحور $oz$ وهي:

$$L=oz:\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

ولحساب $R$ نحسب بعد مركز الكرة $C$ المعطى عن المستقيم $L$كون الكرة تمس المحور $oz$.

$$R=d=\frac{\left|\overrightarrow{M_1C}\wedge\vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|}$$

ليكن $\vec{v}(0,0,1)$و $M_1 \ni L$ نقطة اختيارية أختارها $(0,0,0)$تحقق معادلتيه.

$$\overrightarrow{M_1C} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k} \qquad , |\vec{v}| = 1$$

$$\overrightarrow{M_1C} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 3\vec{j} \Rightarrow \left|\overrightarrow{M_1C} \wedge \vec{v}\right| = \sqrt{5}$$

$$R = d = 5 \Rightarrow$$

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 25.$$

4- لدينا الكرة $S^*$ والمستوي $P$ المعينين بالشكل:

$$S^* \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 4z + 4 = 0$$

$$P \equiv 3y + 4z + 1 = 0$$

المطلوب: أثبت أن المستوي $P$ يقطع الكرة $S^*$ ثم أوجد إحداثيات مركز ونصف القطر دائرة التقاطع ؟

الحل: $\vec{N}_P(0,3,4)$ , $C(0,3,-2)$ $d = 4 \Rightarrow R = \sqrt{3}$

$$\delta = \frac{|9-8+1|}{\sqrt{9+16}} = \frac{2}{5} < 3 = R$$

بالتالي المستوي يقطع الكرة بدائرة، نجد نصف قطرها:

$$r^2 = R^2 - \delta^2 \Rightarrow r^2 = 9 - \frac{4}{25} \Rightarrow r^2 = \frac{221}{25} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{221}}{5}$$

ولتعيين المركز لهذه الدائرة نوجد نقطة تقاطع المستقيم المار من $C$ والعمودي على $P$ ، لذلك نجد المعادلات الوسيطية للمستقيم المار من $C$ وله نفس منحى ناظم $P$ .

$$x = 0 \;\; ; \;\; y = 3 + 3\lambda \;\; ; \; z = -2 + 4\lambda$$

نعوض هذه المعادلات في معادلة المستوي $P$ ، فنجد : $\lambda = -\frac{2}{25}$ ثم نعوض في المعادلات الوسيطية، فنجد:

$\left(0, \frac{69}{25}, \frac{-58}{25}\right)$ وهو مركز الدائرة المطلوبة .

5- لدينا الكرة $S^*$ المعطاة بالعلاقة: $S^* \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 12 = 0$

والمستقيم $L$ المعطى وسيطياً بالمعادلات: $x = 2 + \lambda \;\; ; \;\; y = 1 + 2\lambda \;\; ; \; z = -1 + \lambda$

المطلوب: أثبت أن المستقيم $L$ يقطع الكرة $S^*$ ، ثم عين نقطتي التقاطع.

الحل: نعوض معادلات $L$ في معادلة $S^*$ ، فنجد: $6\lambda^2 - 6 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1$ المستقيم يقطع الكرة.

لإيجاد نقطتي التقاطع نعوض قيمتي $\lambda$ في المعادلات الوسيطية للمستقيم $L$ :

$$\lambda_1 = 1 \;\; \Rightarrow (3,3,0)$$

$$\lambda_2 = -1 \Rightarrow (1,-1,-2)$$

وهما نقطتا التقاطع .

**تمارين غير محلولة:**

1- أوجد معادلة كرة تكون النقطتان $M_1(2,3,-1)$ , $M_2(1,1,3)$ طرفي أحد أقطارها.

2- أوجد معادلة الكرة التي مركزها النقطة $A(1,2,-3)$ وتمس المستوي: $P \equiv 6x+6y-7z+42=0$

3- لدينا الكرة $S^*$ والمستوي $P$ المعينان بالشكل:

$$S^* \equiv x^2+y^2+z^2-8x+2y+6z+2=0$$
$$P \equiv -2y+2z+1=0$$

المطلوب:

1- ادرس الوضع النسبي للمستوي $P$ بالنسبة للكرة $S^*$.

2- أوجد معادلة الكرة التي مركزها $C(-1,2,-3)$ وتمس المستوي $P$.

4- ادرس وضع المستوي $y=3$ بالنسبة للكرة: $S^* \equiv x^2+y^2+z^2-4x+6y-8z+22=0$

5- أثبت المستوي $P \equiv 3x+y-z-9=0$ يقطع الكرة $S^*$ المعطى بالشكل:

$S^* \equiv x^2+y^2+z^2-8x-14y+2z+30=0$ ثم عين نصف قطر ومركز دائرة التقاطع .

6- بين وضع المستقيم $L$ المعطى بالشكل:

$$L \begin{cases} x+y+z-4=0 \\ y-3z-1=0 \end{cases} :$$

بالنسبة للكرة: $S^* \equiv x^2+y^2+z^2-6x+2y-4z+5=0$

7- أثبت أن المستقيم $L$ المعطى وسيطياً بالشكل: $x=4+4\lambda \;\; ; \;\; y=1+3\lambda \;\; ; \;\; z=1+\lambda$

يمس الكرة: $S^* \equiv x^2+y^2+z^2-2x+6y+2z+8=0$ ثم أوجد إحداثيات نقطة التماس.