مسألة : ليكن الحقل التجهي :

$$\vec{F} = (4xy - 3x^2z^2)\vec{e_x} + (4y + 2x^2)\vec{e_y} + (1 - x^3z)\vec{e_z}$$

والمطلوب : ① برهن أنّ هذا الحقل مُشتق من تابع كمون يُطلب تعيينه .

② عيّن جوّلان الحقل $\vec{F}$ بين النقطتين $P_1(1,-1,-1)$ ، $P_2(2,2,-1)$.

الحل : ①

- $\frac{\partial F_x}{\partial y} = 4x$, $\frac{\partial F_y}{\partial x} = 4x$ $\Big\} \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} = 4x$

- $\frac{\partial F_x}{\partial z} = -6x^2z$, $\frac{\partial F_z}{\partial x} = -6x^2z$ $\Big\} \Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} = -6x^2z$.

- $\frac{\partial F_y}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial F_z}{\partial y} = 0$ $\Big\} \Rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0$

ومنه الحقل $\vec{F}$ يُشتق من تابع الكمون .

• إيجاد تابع الكمون :

$$\begin{aligned} dV &= -dC \\ &= -(F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz) \\ &= -[4xy\,dx - 3x^2z^2\,dx + 4y\,dy + 2x^2\,dy + dz - x^3z\,dz] \\ &= -[4y\,dy + dz + 4xy\,dx - 2x^2\,dy - 3x^2z^2\,dx - x^3z\,dz] \\ &= -[d(2y^2) + dz + d(2x^2y) - d(x^3z^2)] \end{aligned}$$

$$dV = -d[2y^2 + z + 2x^2y - x^3z^2]$$

$$\Rightarrow V = -(2y^2 + z + 2x^2y - x^3z^2) + k$$

②

$$dC = -dV \Rightarrow C = -V(x,y,z)\Big|_{P_1}^{P_2}$$

$$C = -[V(2,-2,-1) - V(1,-1,-1)]$$

$$= -[17 + 2] = +15 .$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

• المبادئ الأساسية في الميكانيك التقليدي :

يعتمد الميكانيك على قوانين يمكن إثباتها علمياً من خلال التجارب و الظواهر التي يمكن ملاحظتها في حياتنا العملية . لقد بنيت الدراسات المختلفة في مجال تطبيق الميكانيك التقليدي وهو مجال واسع يسعى لتفسير طيف واسع من الحركات التي تتضمن حركة كواكب المجموعة الشمسية وذلك ما دامت سرعة الأجسام أقل من سرعة الضوء ، والمبادئ الأساسية هي :

① - مبدأ العطالة (قانون نيوتن الأول) :

يُعتبر العالم الإيطالي "غاليلو" أول من صاغ هذا المبدأ، وقد أعاد صياغته نيوتن أثناء دراسته للتحريك وهذا المبدأ ينص على :

"كل نقطة مادية معزولة (لا تخضع لتأثير أيّة قوة) إلى أن تكون ساكنة ساكناً مطلقاً أو تتحرك بحركة مستقيمة منتظمة .

② - القانون الأساسي في التحريك (قانون نيوتن الثاني) :

اقترح نيوتن العلاقة الآتية والتي سُميت بقانون التحريك الأساسي :

$$m.\vec{\gamma} = \vec{F}$$

m : الكتلة ، $\vec{\gamma}$: التسارع ، $\vec{F}$: محصلة القوى المؤثرة

③ - مبدأ الفعل ورد الفعل (قانون نيوتن الثالث) :

لكل فعل رد فعل يساويه بالشدة ويعاكسه بالاتجاه .

• مسائل تحريك النقطة المادية :

إنّ جميع مسائل التحريك تعتمد على قانون التحريك الأساسي ، ويمكن أن نواجه نوعين من مسائل التحريك :

1) - النوع الأول : تكون القوى معلومة ويطلب تحديد معادلة الحركة .

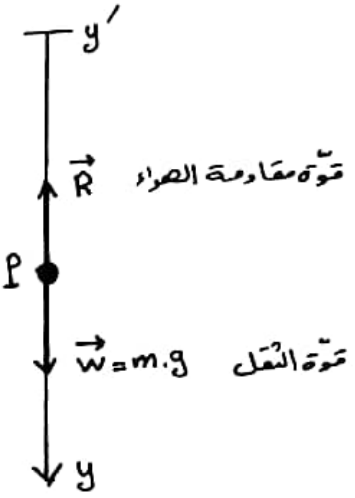
في هذا النوع من المسائل يتوجب علينا حل معادلات تفاضلية من المرتبة الثانية .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

2) النوع الثاني : تكون معادلات الحركة معلومة ويطلب تحديد القوة المؤثرة .
في هذا النوع من المسائل تقتضي إجراء عمليات إشتقاق ومن ثمّ تحديد مركبات القوة .

(مسألة) (1) : مظلي (نقطة مادية) يسقط شاقولياً للأسفل في وسط مقاومته تتناسب طرداً مع السرعة ، فإذا فرضنا أنّ المظلي مع المظلة يمثلان نقطة مادية (P, m) وأنّ سرعة المظلي في سرعة البدء v_0 .
والمطلوب : ① أوجد السرعة والمسافة والتسارع للنقطة المادية في أي لحظة t .
② أوجد السرعة الحدية .

الحل :



* كتلة المظلة مع المظلي هي m وتعتبر نقطة مادية P .
* معنى مقاومته تتناسب طرداً مع السرعة :

$$R = \underbrace{k}_{\text{ثابت طردي}} . m . v$$

* عند البدء يكون : $t=0$ و $y=0$ و $v=v_0$.

من العلاقة الأساسية في التحريك :

$$\sum \vec{F} = m \times \vec{\gamma} \leftarrow \text{محصلة القوى المؤثرة}$$

$$\vec{w} + \vec{R} = m \times \vec{\gamma}$$

$$w - R = m \times \gamma \qquad \text{بالإسقاط على المحور } yy' \text{ الموجه للأسفل:}$$

$$m \times g - m \times k \times v = m . y'' \qquad ; (\gamma = y'')$$

ملاحظة : $\left(y'' = \frac{dy'}{dt} = \frac{dv}{dt}\right)$

$$\Rightarrow y'' = g - k \times v \qquad ; (v = v(t))$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - k \times v$$

$$\left(\frac{-k}{g-kv} \text{ بضرب الطرفين}\right) \Rightarrow \frac{-k\,dv}{g-kv} = -k\,dt$$

$$\Rightarrow \ln(g-kv) = -k.t + \ln(C_1)$$

$$\ln(g-kv) - \ln(C_1) = -kt$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{g-k.v}{c_1}\right) = -kt$$

نحسب c_1 من شروط البدء $(v=v_0 , t=0)$ نجد أنّ :

$$\ln\left(\frac{g-kv_0}{c_1}\right) = 0 \Rightarrow \frac{g-kv_0}{c_1} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{c_1 = g-kv_0}$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{g-kv}{g-kv_0}\right) = -kt \Rightarrow \frac{g-kv}{g-kv_0} = e^{-kt} \Rightarrow g-kv = (g-kv_0)e^{-kt}$$

$$\Rightarrow kv = g-(g-kv_0)e^{-kt}$$

(نقسم الطرفين على k)

$$\Rightarrow v = y' = \frac{g}{k} - \left(\frac{g}{k}-v_0\right)e^{-kt} \longrightarrow$$ وهو تابع السرعة

$$\Rightarrow y = \frac{g}{k}t + \frac{1}{k}\left(\frac{g}{k}-v_0\right)e^{-kt} + c_2$$

نحسب c_2 من شروط البدء $(y=0 , t=0)$:

$$0 = 0 + \frac{1}{k}\left(\frac{g}{k}-v_0\right)e^{0} + c_2 \Rightarrow \boxed{c_2 = -\frac{1}{k}\left(\frac{g}{k}-v_0\right)}$$

وبالتالي تابع المسافة بدلالة الزمن هو :

$$y = \frac{g}{k}t + \frac{1}{k}\left(\frac{g}{k}-v_0\right)e^{-kt} - \frac{1}{k}\left(\frac{g}{k}-v_0\right) \longrightarrow$$ تابع المسافة

ونحصل على تابع التسارع باشتقاق تابع السرعة مرّة بالنسبة للزمن :

$$\gamma = y'' = k\left(\frac{g}{k}-v_0\right)e^{-kt}$$

$$\Rightarrow \gamma = (g-kv_0)e^{-kt} \longrightarrow$$ تابع التسارع

② السرعة الحدية : $(t \to \infty)$

السرعة الحدية $\leftarrow V_h = \lim_{t\to\infty} v = \frac{g}{k}$.

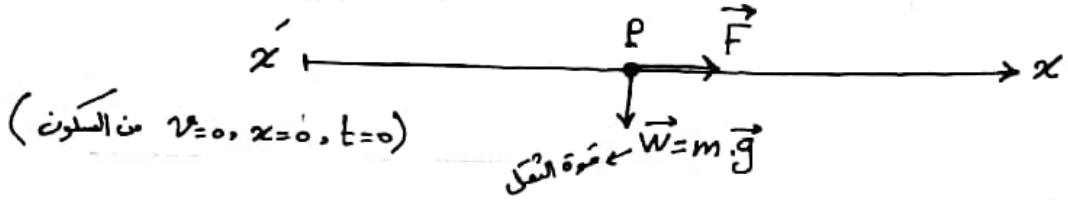
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(مسألة (2)): تتحرك نقطة مادية (p,m) على محور أفقي أملس مبتدئة حركتها من السكون ومن المبدأ وذلك بتأثير قوة تتناسب طرداً مع الزمن :

$$F = k.m\,t$$

والمطلوب : أوجد المسافة التي تقطعها النقطة المادية بدلالة الزمن (معادلة الحركة) .

الحل :



من العلاقة الأساسية في التحريك :

$$\sum \vec{F} = m.\vec{\gamma}$$

$$\vec{w} + \vec{F} = m.\vec{\gamma}$$

بالإسقاط :

$$0 + m.k\,t = m.x''$$

$$\Rightarrow \quad m.x'' = m.k\,t$$

$$x'' = k.t \Rightarrow x' = k.\frac{t^2}{2} + C_1$$

لنوجد C_1 من شروط البدء $(t=0 \,,\, v = x' = 0)$

$$\boxed{C_1 = 0}$$

$$\Rightarrow \{x' = \frac{1}{2}k\,t^2\} \rightarrow \text{معادلة السرعة}$$

وبالمعاملة مرة أخرى نحصل على معادلة الحركة (المسافة) :

$$\Rightarrow x = \frac{1}{6}k\,t^3 + C_2$$

لنوجد C_2 من شروط البدء $(t=0 \,,\, x=0)$

$$\boxed{C_2 = 0}$$

$$\Rightarrow \{x = \frac{1}{6}x\,t^3\} \rightarrow \text{معادلة الحركة (المسافة)}$$

انتهت المحاضرة

تمّ بعون الله...

أ. مروة ملا خلف

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner