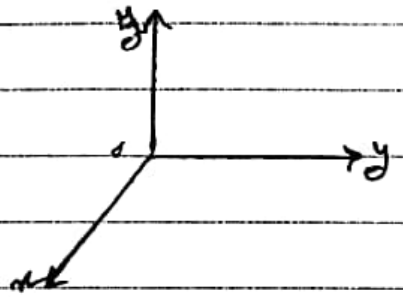
جمل المحاور الإحداثية المختلفة

أ- جملة الإحداثيات الديكارتية : وهي $R(O\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

شعاع الموضع : $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$



معادلات الحركة :

$x = x(t)$

$y = y(t)$

$z = z(t)$

ب- جملة الإحداثيات الإسطوانية (القطبية) وهي $R(o, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

معادلات الحركة :

$r = r(t)$

$\theta = \theta(t)$

$z = z(t)$

تربط بين الإحداثيات الديكارتية بالعلاقات :

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$z = z$

ج- جملة الإحداثيات الكروية : وهي $R(o, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$

معادلات الحركة :

$r = r(t)$

$\theta = \theta(t)$

$\varphi = \varphi(t)$

تربط بين الإحداثيات الديكارتية بالعلاقات :

$x = r\sin\theta\cos\varphi$

$y = r\sin\theta\sin\varphi$

$z = r\cos\theta$

د- جملة الإحداثيات الذاتية (الثلاثية الزمنية) معادلة الحركة $s = s(t)$

وهي $R(p, \vec{e}_t, \vec{e}_n, \vec{e}_r)$

$\vec{e}_t$ شعاع واحدة المماس ، $\vec{e}_n$: شعاع واحدة الناظم

$\vec{e}_r$ شعاع واحدة ثنائي الناظم

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حركة النقطة المادية :

علم الحركة هو فرع من فروع الميكانيك يهدف لدراسة حركة الجمل الفيزيائية (نقطة مادية - جسم صلب) وذلك بغض النظر عن مسببات الحركة والتي ستأخذ بعين الاعتبار عن دراسة التحريك في الفصل الثالث

إنّ دراسة النقطة المادية تتضمن بالدرجة الأولى توصيف الحركة بالنسبة لجملة المقارنة أي تحديد المسار الذي تتحرك عليه النقطة ثم كيفية تحرك النقطة على مسارها (متباطئة، متسارعة) ويتم ذلك بدراسة متجهتين حركيتين هما متجه السرعة والتسارع

المسار والمتجهات الحركية لنقطة مادية :

أ- المسار : هو المنحني الذي ترسمه النقطة المادية أثناء حركتها وللحصول على الصيغة التحليلية للمسار نحذف الزمن t بين معادلات الحركة

مثال : M نقطة مادية تتحرك وفقاً للمعادلات

$$\begin{cases} x = 4\cos 2t \\ y = 8\sin 2t \end{cases}$$

الحل :

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{4} &= \cos 2t \\ \frac{y}{8} &= \sin 2t \end{aligned}\right) \xrightarrow[\text{والجمع}]{\text{بالتربيع}} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1$$

والمسار هو قطع ناقص

ب- المتجهات الحركية :

أ- متجه السرعة : وهو مشتق متجه الموضع بالنسبة للزمن t أي :

$$\vec{v}(M) = \frac{d\vec{OM}}{dt}$$

ب- متجه التسارع : هو مشتق متجه السرعة بالنسبة للزمن t أي :

$$\vec{\gamma}(M) = \frac{d\vec{v}(M)}{dt}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

المركبات الحاسية والناظمية للمتجهة الحركية :

أ- متجه السرعة : $v = \frac{ds}{dt}$ ؛ $\vec{v}(M) = v\,\vec{e}_t$

السرعة العددية v ؛

ب- متجه التسارع : $\vec{\gamma}(M) = \vec{\gamma}_t(M) + \vec{\gamma}_n(M)$

تسارع ناظمي ، تسارع مماسي ، تسارع كلي .

نضع قاعدة تفاضل الجداء :

$$\vec{\gamma}(M) = \frac{dv}{dt}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$$

مركبات المتجهة الحركية في جملة إحداثيات ديكارتية :

$$\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

$$\vec{v}(M) = x'\vec{e}_x + y'\vec{e}_y + z'\vec{e}_z$$

$$\vec{\gamma}(M) = x''\vec{e}_x + y''\vec{e}_y + z''\vec{e}_z$$

السرعة العددية $v = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$

التسارع العددي $\gamma = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

سألة :

M نقطة مادية تتحرك وفقاً للمعادلات الزمنية

$$x = 3\cos 5t + 4\sin 5t$$
$$y = 3\sin 5t - 4\cos 5t$$

المطلوب 1- أوجد مسار النقطة M

2- أوجد قياس متجه السرعة وكل من التسارعات الكلي والمماسي والناظمي ثم استنتج نصف قطر تقوس المسار

الحل :

$$x^2+y^2 = 9\cos^2 5t + 16\sin^2 5t + \cancel{24\cos 5t\sin 5t} + 9\sin^2 5t + 16\cos^2 5t - \cancel{24\cos 5t\sin 5t}$$

$$x^2+y^2 = 9(\cos^2 5t + \sin^2 5t) + 16(\sin^2 5t + \cos^2 5t)$$
$$x^2+y^2 = 9 + 16$$
$$x^2+y^2 = 25$$

والمسار هو دائرة مركزها المبدأ ونصف قطرها $R=5$

$$v = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

لكن :

$$x' = -15\sin 5t + 20\cos 5t$$
$$y' = 15\cos 5t + 20\sin 5t$$

بالتعويض نجد :

$$v = \sqrt{225+400} \Rightarrow v = 25$$

$$\gamma = \sqrt{x''^2 + y''^2}$$

لكن :

$$x'' = -75\cos 5t - 100\sin 5t$$
$$y'' = -75\sin 5t + 100\cos 5t$$

بالتعويض نجد :

$$\gamma = \sqrt{5625+10000} \Rightarrow \gamma = 125$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\vec{\gamma}_t(M) = \frac{dv}{dt} = 0$$

$$\vec{\gamma}(M) = \vec{\gamma}_t(M) + \vec{\gamma}_n(M)$$

$$\vec{\gamma}(M) = \vec{\gamma}_n(M) \Rightarrow \gamma(M) = \gamma_n(M) = 125$$

$$\gamma_n(M) = \frac{v^2}{\rho} = 125 \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{125} = \frac{625}{125} = 5$$

$$\Rightarrow \rho = 5 = R$$

راسم خطي الحركة : هو المحل الهندسي لنهاية متجه السرعة وللحصول على معادلته نحذف الزمن t بين مركبات متجه السرعة

"مسألة"

تتحرك نقطة مادية وفقاً للمعادلات الزمنية التالية :

$$x = 3a\omega^2 t^2$$

$$y = a(3\omega t - \omega^3 t^3) \quad ; \quad a, \omega \text{ ثابتان موجبان}$$

المطلوب :

١- أوجد المتجهين الحركيين

٢- أوجد السرعة العددية .

٣- أوجد التسارع الكلي العددي والمماسي والناظمي ثم استنتج نصف قطر تقوس المسار

٤- أوجد المعادلة الذاتية للحركة (الفاصلة المنحنية s بدلالة الزمن)

الحل :

$$\vec{v}(M) = x'\vec{e}_x + y'\vec{e}_y$$

$$x' = 6a\omega^2 t$$

$$y' = 3a\omega - 3a\omega^3 t^2$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\vec{v}(M) = (6aw^2t)\vec{e}_x + (3aw - 3aw^3t^2)\vec{e}_y$$

$$\vec{\gamma}(M) = x''\vec{e}_x + y''\vec{e}_y$$

$$x'' = 6aw^2$$

$$y'' = -6aw^3t$$

$$\vec{\gamma}(M) = (6aw^2)\vec{e}_x + (-6aw^3t)\vec{e}_y$$

$$v = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

$$v = \sqrt{36a^2w^4t^2 + 9a^2w^2 + 9a^2w^6t^4 - 18a^2w^4t^2}$$

$$v = \sqrt{18a^2w^4t^2 + 9a^2w^6t^4 + 9a^2w^2}$$

$$v = \sqrt{(3aw^3t^2 + 3aw)^2}$$

$$= 3aw(1 + w^2t^2)$$

$$\gamma_t(M) = \frac{dv}{dt} = 6aw^2t$$

$$\vec{\gamma}(M) = \vec{\gamma}_t(M) + \vec{\gamma}_n(M)$$

$$\gamma^2(M) = \gamma_t^2(M) + \gamma_n^2(M) \quad ; \quad \gamma(M) = \sqrt{x''^2 + y''^2}$$

$$\gamma(M) = \sqrt{36a^2w^4 + 36a^2w^6t^2}$$

$$= 6aw^2\sqrt{1 + w^2t^2}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\gamma^2(M) = 36a^2w^4(1+w^2t^2)$$

$$\gamma_n^2(M) = 36a^2w^4 + 36a^2w^6t^2 - 36a^2w^6t^2$$

$$\gamma_n(M) = 6aw^2$$

$$\gamma_n(M) = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{\gamma_n(M)} = \frac{9a^2w^2(1+w^2t^2)^2}{6aw^2}$$

$$= \frac{3}{2}a(1+w^2t^2)^2$$

$$ds = v\,dt \Rightarrow v = \frac{ds}{dt} \Rightarrow s = \int v\,dt \qquad (4)$$

$$s = \int 3aw(1+w^2t^2)\,dt$$

$$s = 3aw\left(t + w^2\cdot\frac{t^3}{3}\right) + c$$

$$t = 0 \Rightarrow s = 0$$

ومنه $c = 0$

$$s = 3aw\left(t + w^2\cdot\frac{t^3}{3}\right)$$

وهي المعادلة الذاتية للحركة.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

معادلات المتجهين الحركيين في الإحداثيات الإسطوانية :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

$$\vec{v}(M) = r'\vec{e}_r + r\theta'\vec{e}_\theta + z'\vec{e}_z$$

$$\vec{\gamma}(M) = (r'' - r\theta'^2)\vec{e}_r + (2r'\theta' + r\theta'')\vec{e}_\theta + z''\vec{e}_z$$

مسألة :

تتحرك نقطة مادية p وفقاً للمعادلات الزمنية التالية:

$r = 2(1+4t)$

$\theta = 3h(1+4t)$

$z = 5(1+4t)$

المطلوب أ- أوجد متجهي سرعة وتسارع النقطة

ب- أوجد نصف قطر تقوس المسار

الحل :

$$\vec{v}(p) = r'\vec{e}_r + r\theta'\vec{e}_\theta$$

$$\left.\begin{array}{l} r' = 8 \\ \theta' = \dfrac{12}{1+4t} \\ z' = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}(p) = 8\vec{e}_r + 24\vec{e}_\theta + 20\vec{e}_z$$

$$\left.\begin{array}{l} r'' = 0 \\ \theta'' = \dfrac{-48}{(1+4t)^2} \\ z'' = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{\gamma}(p) = \left(\frac{-288}{1+4t}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{192-96}{1+4t}\right)\vec{e}_\theta$$

$$\vec{\gamma}(p) = \frac{-288}{1+4t}\vec{e}_r + \frac{96}{1+4t}\vec{e}_\theta$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\gamma_\theta(M) = \frac{dv}{dt}$$

$$v = \sqrt{r'^2 + r^2\theta'^2 + z'^2}$$

$$= \sqrt{64 + 576 + 400}$$

$$= \sqrt{1040}$$

$$\gamma_\epsilon(p) = 0 \Rightarrow \gamma_n(p) = \gamma(p)$$

$$\Rightarrow \gamma(p) = \sqrt{\frac{829444 + 9216}{(1+4t)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{92160}{(1+4t)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{92160}}{1+4t}$$

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{\sqrt{92160}}{1+4t} \Rightarrow \rho = \frac{1040}{\frac{\sqrt{92160}}{1+4t}}$$



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner