ميكانيك النقطة المادية - نظري - الجلسة السابعة
+عملي

- أوجد قانون حركة نقطة مادية P تتحرك على المنحني

$$\begin{cases} x = ch\theta \\ y = sh\theta \end{cases}$$

بحيث أن حركة مسقطها على المستوي oxy خاضعة لقانون السطوح حول القطب o .

الحل: بما أن الحركة خاضعة لقانون السطوح فإن السرعة السطحية ثابتة أي:

$$a = C$$

$$\frac{1}{2}(xy' - x'y) = C \Rightarrow xy' - x'y = 2C$$

لدينا : $x' = \theta' sh\theta$, $y' = \theta' ch\theta$:

$$\theta' ch^2\theta - \theta' sh^2\theta = 2C$$

$$\theta'\underbrace{(ch^2\theta - sh^2\theta)}_{=1} = \underbrace{2C}_{ثابت} \Rightarrow \theta' = k \not\Rightarrow \theta = kt$$

وهي المعادلة الزمنية للحركة .

- مسألة(1) : تتحرك نقطة مادية P وفقاً للمعادلات الزمنية :

$$x = e^t . \cos t$$
$$y = e^t . \sin t$$
$$z = e^t .$$

والمطلوب : 1) أوجد سرعة النقطة P .

2) أوجد نصف قطر تقوس المسار للنقطة P .

الحل : عبارة السرعة هي :

$$\vec{V}(p) = x'\vec{e}_x + y'\vec{e}_y + z'\vec{e}_z$$

$$V = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

- $x' = e^t . \cos t - e^t . \sin t = e^t(\cos t - \sin t)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

- $y' = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t(\sin t + \cos t)$
- $z' = e^t$

$$V = \sqrt{[e^t(\sin t + \cos t)]^2 + [e^t(\cos t - \sin t)]^2 + (e^t)^2}$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{3e^{2t}} = \sqrt{3}\, t$$

$$\gamma_t = \frac{dV}{dt} = \sqrt{3} \qquad \text{(التسارع المماسي)}$$

$$\gamma = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}$$

- $x'' = e^t(\cos t - \sin t - \sin t - \cos t) = -2e^t \sin t$.
- $y'' = e^t(\sin t + \cos t + \cos t - \sin t) = 2e^t \cos t$.
- $z' = e^t$.

$$\Rightarrow \gamma = \sqrt{4e^{2t} + e^{2t}} = \sqrt{2}\, e^t \qquad \text{(التسارع الكلي)}$$

$$\therefore \gamma = \sqrt{\gamma_t^2 + \gamma_n^2} \Rightarrow \gamma^2 = \gamma_t^2 + \gamma_n^2$$

$$\Rightarrow \gamma_n^2 = \gamma^2 - \gamma_t^2 \qquad \text{(التسارع الناظمي)}$$

$$= 5e^{2t} - 3e^{2t}$$

$$= 2e^{2t}$$

$$\Rightarrow \gamma_n = \sqrt{2}\, e^t$$

$$\therefore \gamma_n = \frac{V^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{V^2}{\gamma_n} = \frac{3e^{2t}}{\sqrt{2}\, e^t} = \frac{3}{\sqrt{2}} e^t$$

وهو نصف قطر تقوس مسار النقطة P .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

- مسألة (2) : تتحرك نقطة مادية P على المنحني وفقاً للمعادلات الزمنية :

$$x = \theta \cos\theta$$
$$y = \theta \sin\theta \quad ; \quad \theta^3 = 6t$$
$$z = \theta$$

والمطلوب : 1) برهن أن حركة مسقط النقطة P على المستوي خاضعة لقانون السطوح حول القطب O .

2) أوجد متجه سرعة وتسارع النقطة P .

الحل: حتى تكون النقطة P خاضعة لقانون السطوح يجب أن تكون السرعة السطحية ثابتة، أي :

$$\sigma = \frac{1}{2}(xy' - x'y) = Const.$$

لنوجد θ معادلة الحركة :

$$\theta^3 = 6t \Rightarrow \theta = \sqrt[3]{6}\, t^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \theta' = \frac{1}{3}\sqrt[3]{6}\, t^{-\frac{2}{3}}$$

$$x' = \theta'\cos\theta - \theta\theta' \sin\theta = \theta'(\cos\theta - \theta\sin\theta)$$

$$y' = \theta' \sin\theta + \theta\theta' \cos\theta = \theta'(\sin\theta + \theta\cos\theta)$$

$$\sigma = \frac{1}{2}[\theta\theta'\sin\theta\cos\theta + \theta^2\theta'\cos^2\theta - \theta\theta'\cos\theta\sin\theta + \theta^2\theta'\sin^2\theta]$$

$$\sigma = \frac{1}{2}\theta^2\theta'(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$$

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1 = Const$$

$$\theta^3 = 6t \Rightarrow 3\theta^2\theta' = 6 \Rightarrow \theta^2\theta' = 2$$

2) الحل كما هو في الطلب الأول والثاني من المسألة (1) .

انتهت المحاضرة - - -

أ. مروة ملا خلف

2025

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner