محاضرة (٣)

التورسورات (Torsors)

يستخدم مفهوم التورسور بشكل واسع في أبحاث الميكانيك المختلفة من حركة وتحريك وتوازن وسوف نستعرض في هذه الفقرة أهم مجموعات المتجهات وعناصر اختزالها.

تعاريف ومفاهيم أساسية:

١- المتجه المنزلق $\vec{v}$: هو متجه ذو حامل ثابت & وبدايته نقطة من هذا الحامل

٢- العزم الحاصل في نقطة: يعرّف عزم الشعاع $\vec{v}$ حول النقطة O بالعلاقة:

$$\vec{M}_O(\vec{v}) = \vec{OA} \wedge \vec{v}$$

A: نقطة من حامل $\vec{v}$.

٣- عنصرا الاختزال: لتكن لدينا أسرة المتجهات يمكن أن نقابل هذه الأسرة بمتجهات

① الحاصلة العامة $\vec{R}$ $\quad \vec{R} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_n$

② العزم الحاصل في O $\quad \vec{M}(O) = \sum_{i=1}^{n} \vec{OA_i} \wedge \vec{v}_i$

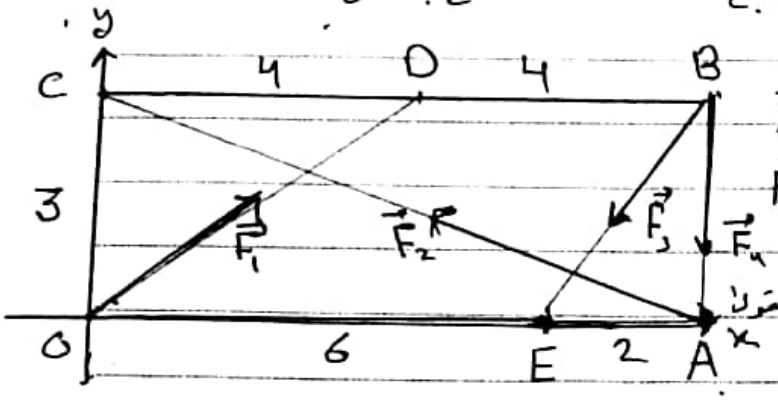
يدعى هذان العنصران بعنصري اختزال جملة المتجهات

٤- التورسور: إن أسر المتجهات المنزلقة التي لها نفس عنصري الاختزال في نقطة O تدعى أسراً متكافئة ويدعى كل صنف تكافؤ بتورسور أي أن التورسور والذي نرمز له بالرمز $\vec{\tau}$ (تاو) يوصف تماماً بمعرفة عنصري اختزاله وهذان العنصران يسميان بعنصري اختزال التورسور

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مسألة :

صفيحة مستطيلة الشكل تؤثر عليها أربع قوى كما هو موضح بالشكل والأطوال معطاة



مع الشكل بالمتر وشدة القوى هي :

$\vec{F_1} = 5\,N$ $\qquad$ $\vec{F_3} = \sqrt{13}\,N$

$\vec{F_2} = \sqrt{73}\,N$ $\qquad$ $\vec{F_4} = 3\,N$

المطلوب :

أوجد عنصري اختزال التورسور الممثل لهذه القوى في النقطة O

الحل :

عنصري اختزال التورسور هما :

① الحاصلة العامة :

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4}$$

$$\vec{F_1} = F_1\,\vec{e}_{\vec{OD}} \;;\; \vec{e}_{\vec{OD}} = \frac{\vec{OD}}{|\vec{OD}|} \;;\; O(0,0)\,,\; D(4,3)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{OD} = 4\vec{e_x} + 3\vec{e_y} \\ |OD| = \sqrt{4^2+3^2} = 5\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{F_1} = 4\vec{e_x} + 3\vec{e_y} \rightarrow 5 \times \frac{4\vec{e_x}+3\vec{e_y}}{5}$$

$$\vec{F_2} = F_2\,\vec{e}_{\vec{AC}} \;;\; \vec{e}_{\vec{AC}} = \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} \;;\; A(8,0)\,,\; C(0,3)$$

$$\vec{AC} = -8\vec{e_x} + 3\vec{e_y} \;;\; |\vec{AC}| = \sqrt{64+9} = \sqrt{73}$$

$$\vec{e}_{\vec{AC}} = \frac{-8\vec{e_x} + 3\vec{e_y}}{\sqrt{73}} \Rightarrow \vec{F_2} = -8\vec{e_x} + 3\vec{e_y} \rightarrow \sqrt{73} \times \frac{-8\vec{e_x}+3\vec{e_y}}{\sqrt{73}}$$

$$\vec{F_3} = F_3\,\vec{e}_{\vec{BE}} \;;\; B(8,3) \quad E(6,0)$$

$$\vec{BE} = -2\vec{e_x} - 3\vec{e_y}\,,\; |\vec{BE}| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\vec{e}_{\vec{BE}} = \frac{-2\vec{e}_x - 3\vec{e}_y}{\sqrt{13}} \Rightarrow \vec{F}_3 = -2\vec{e}_x - 3\vec{e}_y$$

$$\vec{F}_4 = F_4 \vec{e}_{\vec{BA}} \quad ; \quad B(8,3) \cdot A(8,0)$$

$$\vec{BA} = -3\vec{e}_y \quad ; \quad |\vec{BA}| = \sqrt{9} = 3$$

$$\vec{e}_{\vec{BA}} = \frac{-3\vec{e}_y}{3} \Rightarrow \vec{F}_4 = -3\vec{e}_y$$

الحاصلة لطقم: $\vec{R} = -6\vec{e}_x$

2) العزم الحاصل في O :

$$\vec{M}_o = \vec{M}_o(F_1) + \vec{M}_o(F_2) + \vec{M}_o(F_3) + \vec{M}_o(F_4)$$

$$\vec{M}_o(F_1) = \vec{O_o} \wedge \vec{F}_1 = 0$$

$$\vec{M}_o(F_2) = o\vec{A} \wedge \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 8 & 0 & 0 \\ -8 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 24\vec{e}_z$$

$$\vec{M}_o(F_3) = o\vec{B} \wedge \vec{F}_3 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 6 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -18\vec{e}_z$$

$$\vec{M}_o(F_4) = o\vec{A} \wedge \vec{F}_4 = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 8 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -24\vec{e}_z$$

ومنه $\vec{M}_o = -18\vec{e}_z$



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ومنه عنصري اختزال لتورسور في O

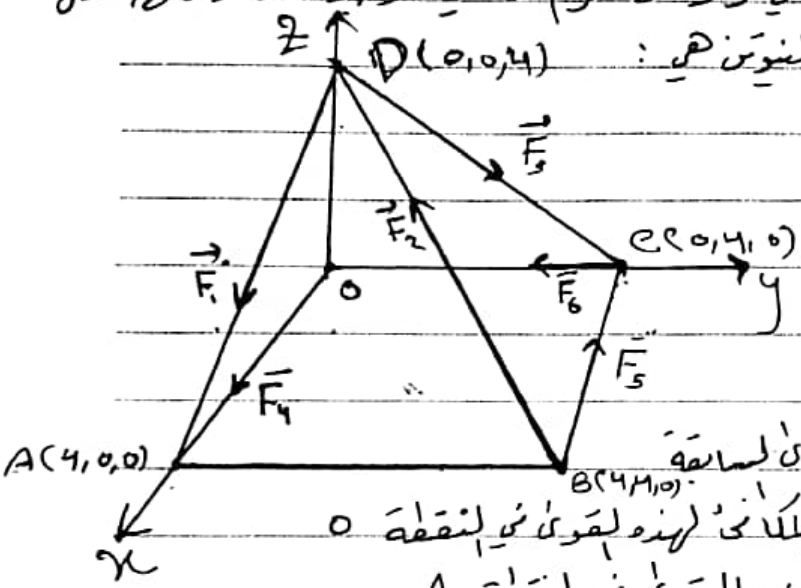
$$\mathcal{T}_O = \left[\vec{R} = -6\vec{e}_x \quad , \vec{M}_O = -18\vec{e}_z \right]$$

خاصة : استنتج عنصري الاختزال في نقطة أخرى

$$\vec{M}_A = \vec{M}_O + \vec{R} \wedge \vec{OA}$$

مسألة :

لدينا القوى من $\vec{F}_1$ حتى $\vec{F}_6$ التي تؤثر على الجسم متماسي الوجوه كما هو موضح بالشكل :



$$\vec{F}_1 = \vec{F}_3 = \vec{F}_5 = 5\sqrt{2}$$
$$\vec{F}_2 = 6\sqrt{3}$$
$$\vec{F}_4 = \vec{F}_6 = 2$$

المطلوب :

1- أوجد الصيغ التحليلية لكل من القوى السابقة

2- أوجد عنصري اختزال لتورسور المكافئ لهذه القوى في النقطة O

3- استنتج عنصري لتورسور المكافئ لهذه القوى في النقطة A

حل :

$$\vec{F}_1 = F_1 \vec{e}_{\vec{DA}} \qquad \vec{DA} = 4\vec{e}_x - 4\vec{e}_z \;,\; |\vec{DA}| = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$$

$$\vec{e}_{\vec{DA}} = \frac{\vec{e}_x - \vec{e}_z}{\sqrt{2}} \Rightarrow \vec{F}_1 = 5\vec{e}_x - 5\vec{e}_z$$

$$\vec{F}_2 = F_2 \vec{e}_{\vec{BD}} \qquad \vec{BD} = -4\vec{e}_x - 4\vec{e}_y + 4\vec{e}_z \qquad |\vec{BD}| = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$\vec{e}_{\vec{BD}} = \frac{-\vec{e}_x - \vec{e}_y + \vec{e}_z}{\sqrt{3}} \Rightarrow \vec{F}_2 = -6\vec{e}_x - 6\vec{e}_y + 6\vec{e}_z$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\vec{F_3} = F_3\,\vec{e}_{\vec{DC}} \;;\; \vec{DC} = +4\vec{e_y} - 4\vec{e_z} \;,\; |\vec{DC}| = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$$

$$\vec{e}_{DC} = \frac{\vec{e_y} - \vec{e_z}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \underline{\vec{F_3} = 5\vec{e_y} - 5\vec{e_z}}$$

$$\underline{|\vec{F_4} = 2\vec{e_x}|}$$

$$\vec{F_5} = F_5\,\vec{e}_{BC} \;,\; \vec{BC} = -4\vec{e_x} \;,\; |\vec{BC}| = \sqrt{16} = 4$$

$$\vec{e}_{BC} = -\vec{e_x} \Rightarrow \underline{\vec{F_5} = -5\sqrt{2}\,\vec{e_x}}$$

$$\underline{\vec{F_6} = -2\vec{e_y}}$$

2_ عنصري اختزال التورسور في O :

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} + \vec{F_5} + \vec{F_6}$$

$$\vec{R} = (1-5\sqrt{2})\,\vec{e_x} - 3\vec{e_y} - 4\vec{e_z}$$

العزم الحاصل :

$$\vec{M_o} = \vec{M_o}(F_1) + \vec{M_o}(F_2) + \vec{M_o}(F_3) + \vec{M_o}(F_4) + \vec{M_o}(F_5) + \vec{M_o}(F_6)$$

لأن حامل $\vec{F_4}$ ، $\vec{F_6}$ يمر من O $\quad \vec{M_o}(F_4) + \vec{M_o}(F_6) = 0$

$$\vec{M_o}(F_1) = \vec{OA} \wedge \vec{F_1} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -5 \end{vmatrix} = +20\,\vec{e_y}$$

$$\vec{M_o}(F_2) = \vec{OD} \wedge \vec{F_2} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 0 & 0 & 4 \\ -6 & -6 & 6 \end{vmatrix} = 24\,\vec{e_x} - 24\,\vec{e_y}$$

$$\vec{M_o}(F_3) = \vec{OD} \wedge \vec{F_3} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -5 \end{vmatrix} = -20\,\vec{e_x}$$

$$\vec{M_o}(F_5) = \vec{OC} \wedge \vec{F_5} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ 0 & 4 & 0 \\ -5\sqrt{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 20\sqrt{2}\,\vec{e_z}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\overrightarrow{\tau} = \left[\overrightarrow{R} = (1-5\sqrt{2})\overrightarrow{e_x} - 3\overrightarrow{e_y} - 4\overrightarrow{e_z} \;,\; \overrightarrow{M_o} = 4\overrightarrow{e_x} - 4\overrightarrow{e_y} + 20\sqrt{2}\,\overrightarrow{e_z}\right]$$

انتهت المحاضرة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner