١- نظرية

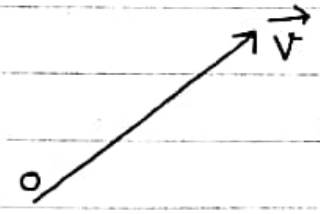
« الحساب الشعاعي »

أ- المقدار السلمي : يعبر عنه المقدار السلمي بقيمة عددية في الوحدة المناسبة (الحجم، الكتلة، درجة الحرارة ...)

ب- المقدار الشعاعي : يستلزم تحديد حامله، جهته، نقطة تأثيره، زيادة على قيمته العددية.

تسمى هذه المقادير بالمتجهات أو الأشعة (الانتقال، السرعة، القوة، الحقل الكهربائي ...)

ج- التمثيل البياني للشعاع :

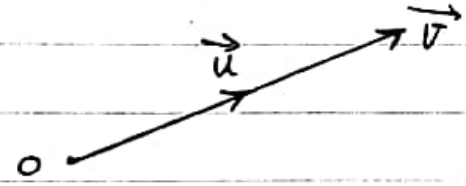


$\vec{v}$: يرمز إلى الشعاع أي مقدار أو اتجاهها .

$v = |\vec{v}| = \|\vec{v}\|$ يرمز إلى القيمة العددية أو الشدة أو الطويلة

د- شعاع الواحدة :

هو شعاع طويلته تساوي الواحد. يمكن التعبير عن شعاع مواز لشعاع الواحدة بالشكل :

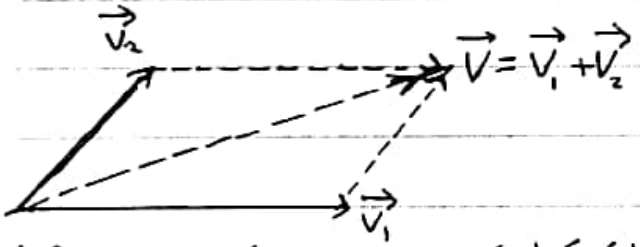


$$\vec{v} = \vec{u} \cdot v = v \cdot \vec{u}$$

ه- الجمع الهندسي للأشعة :

يمكن جمع الأشعة بيانياً. ولذا فقد تسمية العملية بالجمع الهندسي .

- جمع شعاعين :



عملية جمع الأشعة عملية تبديلية

$$\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$$

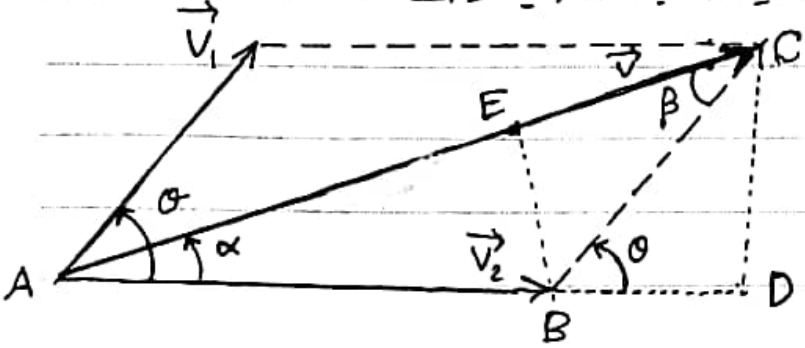
$$\vec{v} = \vec{v_2} + \vec{v_1}$$

نحصل على شدة الشعاع بواسطة العلاقة التالية والتي سنبرهن عنها لاحقاً في نقرة الجداء السلمي .

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2 v_1 v_2 \cos(\vec{v_1}, \vec{v_2})}$$

لتحديد جهة (أي حامل) $\vec{v}$ كفي تحديد الزاوية α حيث نلاحظ :

في المثلث ACD



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\sin\alpha = \frac{CD}{AC} = \frac{CD}{v} \qquad \sin\theta = \frac{CD}{BC} = \frac{CD}{v_2} \Rightarrow \frac{v}{\sin\theta} = \frac{v_2}{\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow v\sin\alpha = v_2\sin\theta$$

بالمثل في المثلث BEC نجد أن :

$$\sin\beta = \frac{BE}{BC} \qquad \sin\alpha = \frac{BE}{AB} \Rightarrow \frac{v_2}{\sin\alpha} = \frac{v_1}{\sin\beta}$$

$$\Rightarrow v_2\sin\beta = v_1\sin\alpha$$

نستنتج العلاقة العامة التالية والتي تسمى بقانون الجيوب

$$\frac{v}{\sin\theta} = \frac{v_1}{\sin\beta} = \frac{v_2}{\sin\alpha}$$

حالة خاصة :

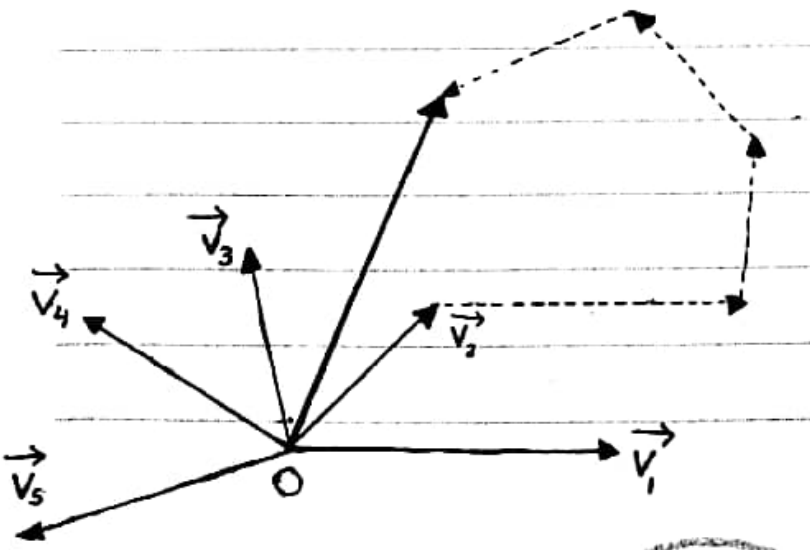
إذا كانت $\theta = \frac{\pi}{2}$ فإن :

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

$$tg\,\alpha = \frac{v_2}{v_1}$$

الجمع الهندسي لعدة أشعة :

من الشكل المجاور



$$\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2} + \vec{v_3} + \vec{v_4} + \vec{v_5}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الفرق بين الأشعة :

هندسياً يمثل الشعاع $\vec{D}$ في الشكل المجاور الفرق بين الشعاعين $\vec{v}_2$ ، $\vec{v}_1$ حيث يمكن كتابة

$$\vec{D} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

يمكن كتابة هذه المعادلة على الشكل التالي :

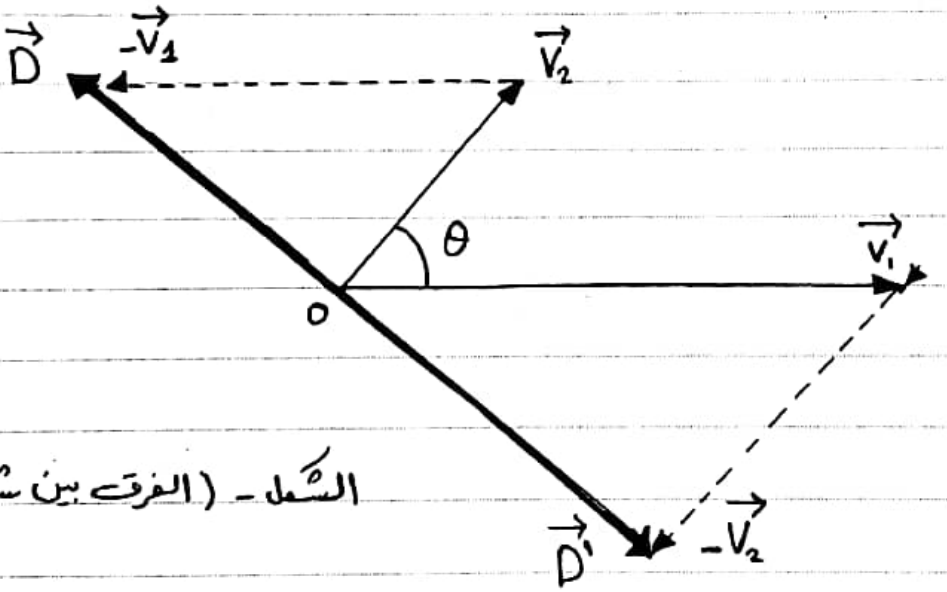
$$\vec{D} = \vec{v}_2 + (-\vec{v}_1)$$

عملية طرح الأشعة ليست تبديلية

هذا ما نلاحظه مع الشكل $\vec{D}' = -\vec{D}$

طويلة الشعاع $\vec{D}$:

$$D = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\theta}$$



الشكل - (الفرق بين شعاعين)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

هندسة ميكانيك م2 - نظري

- الفضاء المتجهي R^3

يعرف بأنه الفضاء الذي عناصره ثلاثيات من الشكل (c_1, c_2, c_3) حيث أن c_1, c_2, c_3 أعداد حقيقية مرتبة وكل ثلاثية من هذه الثلاثيات تدعى متجهاً نرمز له بالرمز $\vec{v}$ $\vec{v} = (c_1, c_2, c_3)$ وتدعى الأعداد الحقيقية c_1, c_2, c_3 بمركبات المتجه $\vec{v}$

* جمع المتجهات :

إذا كان لدينا $\vec{v} = (a_1, a_2, a_3)$ $\vec{w} = (b_1, b_2, b_3)$ فإن :

$$\vec{v} + \vec{w} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

العنصر الحيادي بالنسبة لعملية الجمع هو $\vec{0} = (0, 0, 0)$ ويدعى بالمتجه الصفري

* الجداء بعدد سلمي :

إذا كان λ مقدار سلمي من مجموعة الأعداد الحقيقية وكان $\vec{v} = (a_1, a_2, a_3)$ متجهاً من الفضاء R^3 فإن :

$$\lambda \vec{v} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

* التركيب الخطي :

لتكن $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ متجهات عددها n متجه من الفضاء R^3 و $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ مقادير سلمية من R نسمي المتجه $\vec{v}$

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2} + \lambda_3 \vec{v_3} + \cdots + \lambda_n \vec{v_n}$$

تركيب خطي للمتجهات $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$

- إذا أمكن كتابة كل متجه من الفضاء R^3 كتركيب خطي للمتجهات عندئذ نقال أن هذه المتجهات تولد الفضاء R^3 .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

* الارتباط الخطي والاستقلال الخطي :

يقال أن مجموعة المتجهات $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$ مستقلة خطياً في الفضاء R^3

$$\lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2} + \lambda_3 \vec{v_3} + \dots + \lambda_n \vec{v_n} = \vec{0}$$

إذا أدت المساواة (أي بشرط) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$

وتكون مرتبطة خطياً إذا كان أحد المقادير السلمية λ مختلف عن الصفر

* قاعدة الفضاء R^3 :

إن كل مجموعة مؤلفة من ثلاث متجهات مستقلة خطياً وتولد الفضاء المتجهي تدعى قاعدة للفضاء المتجهي R^3 وبالتالي أي متجه $\vec{v} \in R^3$ يكتب على شكل تركيب خطي وحيد لمتجهات القاعدة $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ وبالتالي الفضاء R^3 يتحدد تماماً بمعرفة قاعدة له.

* مركبات متجه :

ليكن $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ ثلاثة متجهات من R^3 مستقلة خطياً وبالتالي تشكل قاعدة في R^3 ومنه أي متجه $\vec{v} \in R^3$ يكتب بشكل تركيب خطي وحيد

$$\vec{v} = c_1 \vec{e_1} + c_2 \vec{e_2} + c_3 \vec{e_3}$$

تسمى c_1, c_2, c_3 مركبات المتجه $\vec{v}$

* مقياس أو تنظيم متجه :

إذا كان $\vec{v} = (c_1, c_2, c_3)$ متجه من الفضاء R^3 إن تنظيم هذا المتجه يعرف بالعلاقة

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

* الجداء السلمي « الداخلي »

يعرف الجداء السلمي « الداخلي » للمتجهين $\vec{v_1}$ و $\vec{v_2}$ بالعلاقة :

$$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = \|\vec{v_1}\| \cdot \|\vec{v_2}\| \cdot \cos(\vec{v_1} \hat{\cdot} \vec{v_2})$$

* المتجهات المتعامدة :

نقول عن متجهين $\vec{v_1}$ و $\vec{v_2}$ أنهما متعامدان إذا كان $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 0$

$$\vec{v_1} \perp \vec{v_2} \iff \vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 0$$

* القاعدة المتعامدة المنظمة :

نقول عن قاعدة بأنها متعامدة منظمة إذا كانت متجهاتها متعامدة مثنى مثنى وكان تنظيم كل منها يساوي إلى 1

إذا كانت $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ قاعدة متعامدة منظمة فإنها تحقق العلاقة :

$$\delta_{ij} = \vec{e_i} \cdot \vec{e_j}$$

حيث δ_{ij} يدعى دلتا كرونيكر وهو يعرف بالعلاقة :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{ف } i \neq j \\ 1 & \text{ف } i = j \end{cases}$$

* العبارة التحليلية للجداء السلمي (الداخلي)

إذا كان :

$$\left.\begin{aligned} \vec{v_1} &= a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3} \\ \vec{v_2} &= b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2} + b_3\vec{e_3} \end{aligned}\right| \overset{\text{فإن}}{\Longrightarrow} \vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

* الجداء المتجهي (الخارجي) :

يعرف الجداء الخارجي للمتجهين $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ، الذي نرمز له بالرمز $\vec{v} \wedge \vec{w}$ بأنه المتجه العمودي على المستوي المحدد بالمتجهين ويعرف بالعلاقة :

$$\|\vec{v} \wedge \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \sin(\vec{v}, \vec{w})$$

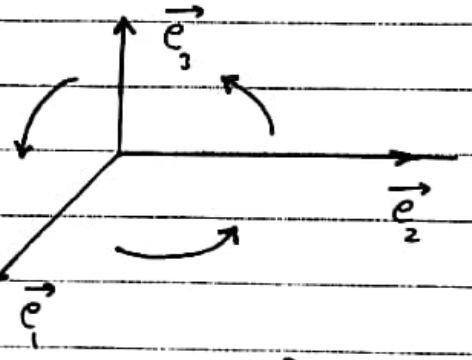
- إذا كانت $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ قاعدة متعامدة منظمة

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

* القاعدة المباشرة :

نقول عن القاعدة $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ أنها مباشرة إذا كانت :

$$\vec{e_1} \wedge \vec{e_2} = \vec{e_3}$$
$$\vec{e_2} \wedge \vec{e_3} = \vec{e_1}$$
$$\vec{e_3} \wedge \vec{e_1} = \vec{e_2}$$



* قواعد الفضاء R^3 :

1- القاعدة القانونية : هي القاعدة الأكثر استخداماً والتي تعرف بمجموعة متجهات

$\vec{i} = (1,0,0)$ ، $\vec{j} = (0,1,0)$ ، $\vec{k} = (0,0,1)$

وهي قاعدة متعامدة لأن :

$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ $\quad$ $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$

$\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$ $\quad$ $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$

$\vec{j} \cdot \vec{k} = 0$ $\quad$ $\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$

ومنظمة لأن $\|\vec{k}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{i}\| = 1$ وهي مباشرة لأن $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٢ـ تغيير القاعدة :

إنّ التحويل من قاعدة منتظمة ومتعامدة ومباشرة إلى قاعدة منتظمة ومتعامدة ومباشرة يمكن أن يعبر عنه بواسطة مصفوفة مربعة محددها يساوي "1" ومقلوبها يساوي منقولها تسمى مصفوفة الانتقال .

ـ إذا كانت $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ قاعدتين متعامدتين منتظمتين مباشرة
$(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$

فإنّ تغيير القاعدة بدلالة الأخرى يعبر عنه بالشكل الآتي :

$$\begin{bmatrix} \vec{i}_2 \\ \vec{j}_2 \\ \vec{k}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \vec{i}_1 \\ \vec{j}_1 \\ \vec{k}_1 \end{bmatrix}$$

انتهت المحاضرة الثانية .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

التمرين الأول : ليكن التجه $\vec{V}$ ، أوجد عبارة متجه الواحدة $\vec{u}$ المرتبط خطياً مع التجه $\vec{V}$ ، ثم طبق ذلك على التجه :

$$\vec{V}(2,-5,3)$$

الحل: يكون التجهان $\vec{u}$ ، $\vec{V}$ مرتبطان خطياً ، إذا تتبع إحدهما عن الآخر بضربه بعدد حقيقي ، أي إذا وجد $\alpha \in \mathbb{R}$ بحيث :

$$\vec{u} = \alpha . \vec{V} \quad \dots (1)$$

وبأخذ النظيم لطرفي العلاقة السابقة نجد أن :

$$\|\vec{u}\| = \|\alpha . \vec{V}\|$$

$$1 = |\alpha| . \|\vec{V}\|$$ وبحسب خواص النظيم

ومنه :

$$|\alpha| = \frac{1}{\|\vec{V}\|} \Rightarrow \alpha = \mp \frac{1}{\|V\|}$$

نعوض قيمة α بما يساويها في العلاقة (1) :

$$\vec{u} = \mp \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|} \quad \dots (*)$$

وهذا يعني أنه يوجد متجهان واحديان مرتبطان خطياً مع التجه $\vec{V}$ المعطى ، وكل منهما يعاكس الآخر :

$$\vec{u} = + \frac{\vec{V}}{\|V\|} \quad , \quad \vec{u} = - \frac{\vec{V}}{\|V\|}$$

ومن أجل $V(2,-5,3)$ فإن :

$$\|V\| = \sqrt{2^2+(-5)^2+3^2} = \sqrt{38}$$

وبالتعويض في (*) نجد :

$$\vec{u} = \mp \frac{(2\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k})}{\sqrt{38}}$$

أي :

$$\vec{u}\left(\frac{2}{\sqrt{38}}, \frac{-5}{\sqrt{38}}, \frac{3}{\sqrt{38}}\right) \quad \text{و} \quad \vec{u}\left(\frac{-2}{\sqrt{38}}, \frac{5}{\sqrt{38}}, \frac{-3}{\sqrt{38}}\right)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

- التمرين الثاني: حدد الوسيط α الذي يكون لأجله المتجهان $\vec{V_1}(5,4,3)$ و $\vec{V_2}(\alpha,-2,-1)$ متعامدان.

الحل: إن القول بأن الشعاعان $\vec{V_1}$ و $\vec{V_2}$ متعامدان يعني جداؤهما السلمي معدوم أي:

$$\vec{V_1} \cdot \vec{V_2} = 0$$

وهذا يكافئ

$$\alpha(5) + (-2)(4) + (-1)(3) = 0$$

$$5\alpha - 8 - 3 = 0$$

$$5\alpha = 11$$

$$\boxed{\alpha = \frac{11}{5}}$$

- التمرين الثالث: ليكن $\vec{w}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}$ ثلاثة متجهات في الفضاء الاقليدي $\mathbb{R}^3$، المحدد كالآتي:

$$\vec{u}(\cos\alpha, \sin\alpha, 0),\ \vec{v}(-\sin\alpha, \cos\alpha, 0),\ \vec{w}(0,0,1)$$

حيث α زاوية اختيارية، بين أن هذه المتجهات تكون قاعدة متعامدة - منظمة ومباشرة للفضاء $\mathbb{R}^3$.

الحل:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = -\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \sin\alpha\cdot\cos\alpha + 0\cdot 0 = 0$$

$$\vec{u}\cdot\vec{w} = 0\cdot\cos\alpha + 0\cdot\sin\alpha + 1\cdot 0 = 0$$

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = -\sin\alpha\cdot 0 + \cos\alpha\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$$

~~فالمتجهات الثلاثة منظمة~~.

وبما أن:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w} = \vec{v}\cdot\vec{w} = 0$$

فالمتجهات الثلاثة متعامدة.

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 0^2} = 1$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-\sin\alpha)^2 + \cos^2\alpha + 0^2} = 1$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

فالمتجهات الثلاثة منظمة.

$$\vec{u}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - (-\sin\alpha\cdot\sin\alpha) = 1$$

فالمتجهات الثلاثة مباشرة.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

- التمرين الرابع : ليكن في الفضاء R^3 المتجهان $\vec{u}(1,0,0)$ ، $\vec{v}(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$.
هل يمكن لهذين المتجهين أن ينتميا إلى قاعدة "متعامدة - منظمة" ، وإذا كان ذلك ممكناً فأوجد المتجه الثالث $\vec{w}$ الذي تكون لأجله $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ قاعدة متعامدة منظمة ومباشرة للفضاء R^3.

الحل :

1) $\vec{u}.\vec{v} = (1.0 + 0.\frac{\sqrt{2}}{2} + 0.\frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$

2) $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$

إذن نعم يمكن لهذين المتجهين أن ينتميا إلى قاعدة "متعامدة منظمة" .

ولإيجاد $\vec{w}$ نتبع مايلي :

نفرض أن $\vec{w}(\alpha, b, c)$ فلكي تكون المتجهات الثلاثة قاعدة متعامدة - منظمة ومباشرة للفضاء R^3 يجب أن :

$$\vec{u}.\vec{w} = 0 \longrightarrow 1.\alpha + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$\vec{v}.\vec{w} = 0 \longrightarrow 0.\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}.b + \frac{\sqrt{2}}{2}.c = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(b+c) = 0 \Rightarrow \boxed{b+c=0} \quad \cdots (1)$$

ولدينا :

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \alpha & b & c \end{vmatrix} = 1 \longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(b-c) = 1 \longrightarrow \boxed{b-c = \frac{2}{\sqrt{2}}} \quad \cdots (2)$$

وبحل (1) و (2) نحصل على :

$$c = -\frac{\sqrt{2}}{2} \ , \ b = \frac{\sqrt{2}}{2} \ , \ a = 0$$

فالمتجه المطلوب :

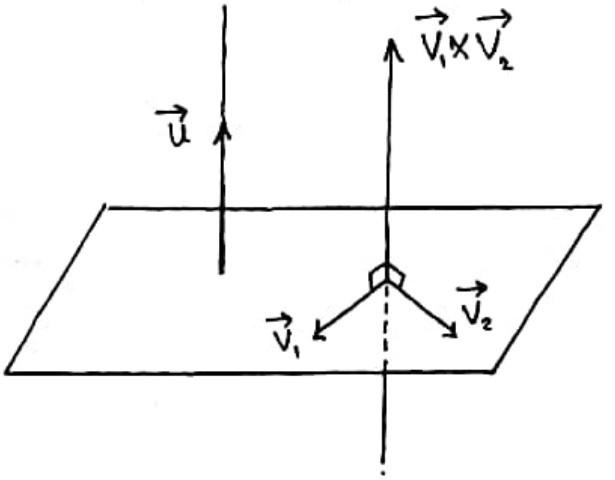
$$\vec{w}\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

- التمرين الخامس : أوجد متجه واحدة يعامد متجهين مفروضين ، ثم طبق ذلك على المتجهين : $\vec{v_1}(2,-5,3)$ ، $\vec{v_2}(-2,1,-3)$

الحل : نعلم بأنه من خصائص الجداء التجهي لمتجهين $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ أنه يكون عمودياً على كل منهما .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

وإنّ متجه الواحدة $\vec{u}$ العامد للمتجهين الغير مرتبطين خطياً هو الشعاع المرتبط خطياً مع $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$ كما هو موضح بالشكل الآتي : $(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)$



وبالتالي من أجل أي عدد حقيقي α يتحقق :

$$\vec{u} = \alpha(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2) \quad \text{----} \ (1)$$

$$\|\vec{u}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\|$$

$$1 = |\alpha| \cdot \|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\|$$

ومنه :

$$\alpha = \frac{1}{\|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\|}$$

أي :

$$\alpha = \mp \frac{1}{\|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\|}$$ نعوض في العلاقة (1) فنجد أنّ :

$$\vec{u} = \mp \frac{(\vec{V}_1 \times \vec{V}_2)}{\|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\|}$$

ومن أجل $\vec{V}_1 = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k}$ ، $\vec{V}_2 = -2\vec{i} + 1\vec{j} - 3\vec{k}$ نحصل على :

$$\vec{V}_1 \times \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -5 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 12\vec{i} - 8\vec{k}$$

وكذلك :

$$\|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\| = \sqrt{(12)^2 + 0^2 + (-8)^2} = \sqrt{208} .$$

وبالنتيجة فإنّ متجه الواحدة المطلوب هو : $\vec{u} = \mp \frac{(12\vec{i} - 8\vec{k})}{\sqrt{208}}$

أي : $\vec{u}\left(\frac{12}{\sqrt{208}}, 0, \frac{-8}{\sqrt{208}}\right)$ و $\vec{u}\left(\frac{-12}{\sqrt{208}}, 0, \frac{8}{\sqrt{208}}\right)$.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner