- تعريف المعادلة التفاضلية الجزئية ذات المرتبة الثانية:

هي كل معادلة تحتوي على تفاضلات أو مشتقات جزئية بالنسبة للتابع Z والمتحولين x و y

مثال:

$$Z_{xx} + 3Z_{yy} - Z_y^2 = 0$$

وهي معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الثانية وغير خطية

رموز موتيج:

$$p = \frac{\partial Z}{\partial x} = Z_x \quad , \quad q = \frac{\partial Z}{\partial y} = Z_y \quad , \quad r = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = Z_{xx}$$

$$s = \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = Z_{xy} \quad , \quad t = \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = Z_{yy}$$

وبالتالي الشكل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية من المرتبة الثانية هو:

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \quad , \quad Z = Z(x, y)$$

* تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية:

تصنف المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية ذات المرتبة الثانية عن طريق المميز

لتكن المعادلة

$$Rr + Ss + Tt = V(x, y, z, p, q)$$

يمكن تصنيفها وذلك بدراسة اشارة المميز:

$$\Delta = S^2 - 4RT$$

1) اذا كان $\Delta > 0$ $\Leftarrow$ معادلة زائدية
2) اذا كان $\Delta < 0$ $\Leftarrow$ معادلة ناقصية
3) اذا كان $\Delta = 0$ $\Leftarrow$ معادلة مكافئية

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال ١: صنف المعادلة التالية:

$$x^2 r - y^2 t = x + y^2$$

$$\Delta = S^2 - 4RT = 0 - 4x^2(-y^2) = 4x^2y^2 > 0$$

عندئذ المعادلة زائدية

مثال ٢: صنف المعادلة التالية:

$$x^2 r + y^2 t + 2xp + yq = 0$$

$$\Delta = S^2 - 4RT = -4x^2y^2 < 0$$

عندئذ المعادلة ناقصية

مثال ٣: صنف المعادلة التالية:

$$(x - y^2) r - y^2 t + z = 0$$

$$\Delta = S^2 - 4RT = 0 - 4(x-y^2)(-y^2) = 4y^2(x-y^2)$$

عندئذ:

إذا كان $x > y^2$ فإن $\Delta > 0$ والمعادلة زائدية.

إذا كان $x < y^2$ فإن $\Delta < 0$ والمعادلة ناقصية.

إذا كان $x = y^2$ أو $y = 0$ عندئذ تكون المعادلة مكافئية.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تحويلات لابلاس

تعريف:

ليكن $f(t)$ تابع مركب لمتحول حقيقي حيث:

$$f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

نقول عن التابع $f(t)$ أنه ذو درجة تزايد S (S عدد حقيقي غير سالب) إذا وجد عدد موجب $M>0$ بحيث يكون:

$$|f(t)| \leq M e^{st} \quad ; \quad M>0 \ , \ t>0 \ , \ S \geq 0$$

واضح من التعريف أنه يوجد لكل تابع مجموعة غير منتهية من درجات التزايد لهذا التابع نسمي عندئذ الحد الأدنى الأعظمي لدرجات التزايد ليكن S_0 بدليل التزايد.

تعريف:

نسمي التابع $f(t)$ تابع أصل إذا تحققت الشروط التالية

1- التابع $f(t)$ مستمر جزئياً على المجال $[0,+\infty)$

2- التابع $f(t) \equiv 0$ من أجل $t<0$

3- للتابع $f(t)$ درجة تزايد محدودة

تعريف تحويل لابلاس:

ليكن $f(t)$ تابع أصل وليكن $p=a+ib$ متحولاً مركباً في ساحة D من المستوي العقدي، عندئذ نعرف تحويل لابلاس للتابع $f(t)$ بالعلاقة

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t).e^{-pt}.dt$$

ويكون $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$ حيث $F(p)$ تابع لمتحول العقدي p ومنه:

$$F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t).e^{-pt}.dt$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تسمى $F(p)$ صورة التابع $f(t)$ وفق تحويل لابلاس

وتسمى $f(t)$ بـ تابع الأصل ، وتسمى e^{-pt} بنواة تحويل لابلاس .

مثال ١ : إذا كان $f(t)=c$; $c=const$ أوجد تحويل لابلاس لـ $f(t)$

الحل :

$$F(p)=\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^{\infty} f(t).e^{-pt}dt=\int_0^{\infty} c.e^{-pt}.dt$$

$$=c\int_0^{\infty} e^{-pt}.dt=c.\lim_{A\to\infty}\int_0^{A} e^{-pt}.dt$$

$$=c.\lim_{A\to\infty}\left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_0^{A}$$

$$=c.\lim_{A\to\infty}\left[-\frac{1}{p}e^{-pA}+\frac{1}{p}\right]$$

$$=c\left[0+\frac{1}{p}\right]=\frac{c}{p}\quad ;\ Re\,p>0$$

مثال ٢ : إذا كان لدينا $f(t)=e^{at}$; $a=const$ أوجد تحويل لابلاس لـ $f(t)$

الحل :

$$F(p)=\mathcal{L}[f(t)]=\int_0^{\infty} f(t).e^{-pt}.dt$$

$$=\int_0^{\infty} e^{at}.e^{-pt}.dt$$

$$=\int_0^{\infty} e^{-(p-a)t}.dt$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$F(p) = \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-(p-a)t}\,dt$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{-1}{p-a}\, e^{-(p-a)t}\right]_0^A$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left[\frac{-1}{p-a}\, e^{-(p-a)A} + \frac{1}{p-a}\right] = \frac{1}{p-a}$$

أمثلة:

$$\mathcal{L}[e^{5t}] = \frac{1}{p-5} \quad \& \quad \mathcal{L}[e^{-3t}] = \frac{1}{p+3}$$

$$\mathcal{L}[3^t] = \mathcal{L}[e^{\ln(3^t)}] = \mathcal{L}[e^{t\cdot \ln(3)}]$$

$$= \mathcal{L}[e^{\ln(3)\cdot t}] = \frac{1}{p-\ln(3)}$$

مثال ٢: أوجد تحويل لابلاس للتابع

$$f(t) = t^\alpha \; ; \; \alpha > -1$$

الحل:

$$\mathcal{L}[t^\alpha] = \int_0^\infty t^\alpha \cdot e^{-pt}\,dt$$

نفرض أن:

$$u = pt \Rightarrow t = \frac{u}{p} \Rightarrow dt = \frac{du}{p}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بالتعويض:

$$\mathcal{L}[t^\alpha] = \int_0^\infty \left(\frac{u}{p}\right)^\alpha \cdot e^{-u} \cdot \frac{du}{p}$$

$$= \frac{1}{p^{\alpha+1}} \int_0^\infty e^{-u} \cdot \underbrace{u^\alpha du}_{\text{تابع غاما}}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$$

تركيز
تابع غاما
$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$

وفي حالة خاصة إذا كان $\alpha = n$ حيث n عدد طبيعي فإن:

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

أمثلة على ما سبق:

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{p} \quad \text{و} \quad \mathcal{L}[t^3] = \frac{3!}{p^4} = \frac{6}{p^4}$$

خواص تحويل لابلاس:

1- الخاصية الخطية:

إذا كان: $\mathcal{L}[f_k(t)] = F_k(p)$ حيث $k = 1, 2, \ldots n$

عندئذ:

$$\mathcal{L}\left[\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(t)\right] = \int_0^\infty \left(\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(t)\right) e^{-pt} d$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$L\left[\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(t)\right] = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_0^{\infty} f_k(t).e^{-pt}.dt$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k F_k(p)$$

مثال: أوجد تحويل لابلاس للتابع $f(t)=\cos \omega t$ حيث ω: const

نعلم أنّ:

$$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}$$

بالاعتماد على الخاصة الخطية لتحويل لابلاس

$$\Rightarrow \quad L[\cos \omega t] = \frac{1}{2}\left(L[e^{i\omega t}] + L[e^{-i\omega t}]\right)$$

$$= \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{p+i\omega + p-i\omega}{(p-i\omega)(p+i\omega)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{2p}{p^2-(i\omega)^2} = \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

تذكرة:

$$\sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$$

$$ch\omega t = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}$$

$$sh\omega t = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال أوجد تحويل لابلاس للتابع $f(t)=\sin wt$ حيث w: const

$$\mathcal{L}[\sin wt] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{iwt}-e^{-iwt}}{2i}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\mathcal{L}[e^{iwt}] - \mathcal{L}[e^{-iwt}]\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-iw} - \frac{1}{p+iw}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{p+iw-p+iw}{(p-iw)(p+iw)}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\cdot\frac{2iw}{p^2+w^2} = \frac{w}{p^2+w^2}$$

وبالمثل نجد أن:

$$\mathcal{L}[\operatorname{ch} wt] = \frac{p}{p^2-w^2}$$

$$\mathcal{L}[\operatorname{sh} wt] = \frac{w}{p^2-w^2}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال: أوجد تحويل لابلاس $f(t) = \sin^2 t$

الحل:

$$\mathcal{L}[\sin^2 t] = \frac{1}{2}\mathcal{L}[1 - \cos 2t]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{p^2+4-p^2}{p(p^2+4)}\right] = \frac{2}{p(p^2+4)}$$

مثال: أوجد تحويل لابلاس للتابع

$$f(t) = \cos 3t \cdot \sin 2t$$

الحل: لدينا $\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$

ومنه:

$$f(t) = \sin 2t \cdot \cos 3t = \frac{1}{2}\left(\sin 5t + \sin(-t)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin 5t - \sin t\right)$$

ومنه:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[\sin 5t] - \mathcal{L}[\sin t]\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{p^2+25} - \frac{1}{p^2+1}\right)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال: أوجد تحويل لابلاس للتابع $f(t) = \sin^3 t$

نعلم أن:

$$\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t$$

$$\Rightarrow \sin^3 t = \frac{1}{4}(3\sin t - \sin 3t)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[\sin^3 t] = \frac{1}{4}\mathcal{L}[3\sin t - \sin 3t] = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{p^2+1} - \frac{3}{p^2+9}\right]$$

مثال: أوجد تحويل لابلاس للتابع $f(t) = \cos^3 t$

نعلم أن:

$$\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t \Rightarrow \cos^3 t = \frac{1}{4}[\cos 3t + 3\cos t]$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[\cos^3 t] = \frac{1}{4}\mathcal{L}[\cos 3t + 3\cos t]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{p}{p^2+9} - \frac{3p}{p^2+1}\right]$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

جدول بأهم تحويلات لابلاس

الأصل $f(t)$	تحويله لابلاس $F(p)$
1	$\frac{1}{p}$
c	$\frac{c}{p}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
e^{wt}	$\frac{1}{p-w}$
$\sin wt$	$\frac{w}{p^2+w^2}$
$\cos wt$	$\frac{p}{p^2+w^2}$
$\operatorname{sh} wt$	$\frac{w}{p^2-w^2}$
$\operatorname{ch} wt$	$\frac{p}{p^2-w^2}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

خواص تحويل لابلاس:

١- خاصة التحاكي:

إذا كان: $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)\ ;\ Re\ p > s_0$

فإن:

$$\mathcal{L}[f(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)\ ;\ Re\, p > \alpha s_0$$ حيث α عدد موجب ما.

$$= \frac{1}{\alpha} \mathcal{L}[f(t)]\Big|_{p \to \frac{p}{w}}$$

مثال:

بالاعتماد على خاصة التحاكي أثبت أنّ: $\mathcal{L}[\sin 3t] = \frac{3}{p^2+9}$

$$\mathcal{L}[\sin 3t] = \frac{1}{3} \mathcal{L}[\sin t]\Big|_{p \to \frac{p}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{1}{p^2+1}\Big|_{p \to \frac{p}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{p^2}{9}+1}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{p^2+9} = \frac{3}{p^2+9}$$

٢- خاصة التأخير:

إذا كان $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)\ ;\ Re\, p > s_0$ فإن:

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-p\tau} F(p)\ ;\ Re\, p > s_0$$

حيث $\tau > 0$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال:

$$\mathcal{L}[\sinh(t-2)] = e^{-2p}\,\frac{1}{p^2-1}$$

$$\mathcal{L}[\sin(t-3)] = e^{-3p}\,\frac{1}{p^2+1}$$

٤- خاصة انزياح الصورة (الكلاسيكي):

إذا كان $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$; $Re\,p > s_0$ فإن:

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t} f(t)] = F(p-\lambda) = \mathcal{L}[f(t)]\Big|_{p\to p-\lambda} \;;\; Re(p-\lambda) > s_0$$

حيث λ عدد مركب أو حقيقي.

أمثلة:

$$\mathcal{L}[e^{7t}\cdot\cos 3t] = \frac{p}{p^2+9}\Big|_{p\to p-7} = \frac{p-7}{(p-7)^2+9}$$

$$\mathcal{L}[e^{2t}t^3] = \frac{3!}{p^4}\Big|_{p\to p-2} = \frac{6}{(p-2)^4}$$

$$\mathcal{L}[e^{3t}\sin 2t] = \frac{2}{p^2+4}\Big|_{p\to p-3}$$

$$= \frac{2}{(p-3)^2+4}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٥- خاصة اشتقاق الصورة:

إذا كان $f(t)$ أصلاً و $\mathcal{L}[f(t)]=F(p)$ حيث $Re\,p > s_0$ فإنّ:

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(p)$$

مثال:

$$\mathcal{L}[t.\sin 3t] = -\left(\frac{3}{p^2+9}\right)' = \frac{6p}{(p^2+9)^2}$$

مثال أوجد صورة التابع $f(t)=t^3.e^t$ وفق تحويل لابلاس بطرقتين مختلفتين.

الحل: حسب خاصة اشتقاق الصورة:

$$\mathcal{L}[t^3e^t] = (-1)^3.\left(\frac{1}{p-1}\right)''' = \frac{6}{(p-1)^4}$$

حسب خاصة انزياح الصورة:

$$\mathcal{L}[e^t.t^3] = \left.\frac{3!}{p^4}\right|_{p\to p-1} = \frac{6}{(p-1)^4}$$

٦- خاصة اشتقاق الأصل

إذا كان $f'(t)$ أصلاً دليل تزايده s_0 فإنّ $f(t)$ يكون أصلاً دليل تزايده s_0

وكان: $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$ من أجل $Re\,p > s_0$ فإنّ:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = p\,F(p) - f(0)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

وبالمثل نجد:

$$\mathcal{L}[f''(t)] = p^2 F(p) - p f(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}[f'''(t)] = p^3 F(p) - p^2 f(0) - p f'(0) - f''(0)$$

وبالاستقراء نجد:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-k-1} f^{(k)}(0) \quad ; Rep > s_0$$

مثال: اوجد صورة التابع $f(t) = t \cdot \sin wt$ وذلك بطريقتين:

الحل: طريقة أولى بمفاضلة اشتقاق الصورة:

$$\mathcal{L}[t \cdot \sin wt] = -\left(\frac{w}{p^2+w^2}\right)' = \frac{2pw}{(p^2+w^2)^2}$$

طريقة ثانية بمفاضلة اشتقاق الأصل:

$$f(t) = t \cdot \sin wt$$

$$f'(t) = \sin wt + tw \cos wt$$

$$f''(t) = 2w \cdot \cos wt - w^2 t \cdot \sin wt$$

$$\Rightarrow f''(t) = 2w \cdot \cos wt - w^2 f(t)$$

بتطبيق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة الأخيرة نجد:

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\mathcal{L}[f''(t)] = 2\omega\,\mathcal{L}[\cos\omega t] - \omega^2\mathcal{L}[f(t)]$$

$$p^2F(p) - p\underbrace{f(0)}_{=0} - \underbrace{f'(0)}_{=0} = 2\omega\frac{p}{p^2+\omega^2} - \omega^2F(p)$$

$$\Rightarrow p^2F(p) + \omega^2F(p) = \frac{2\omega p}{p^2+\omega^2}$$

$$\Rightarrow (p^2+\omega^2)F(p) = \frac{2\omega p}{p^2+\omega^2}$$

$$\Rightarrow F(p) = \frac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$$

مثال:

أوجد صورة التابع $f(t) = \sin t - t\cdot\cos t$ بالاعتماد على خاصة الاشتقاق إلى الأصل

الحل:

$$f(t) = \sin t - t\cos t \quad (1)$$
$$f'(t) = \cos t - \cos t + t\sin t = t\cdot\sin t$$
$$f''(t) = \sin t + t\cos t \quad (2)$$

نجمع (1) مع (2) نجد:

$$f''(t) + f(t) = 2\sin t$$

بتطبيق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة الأخيرة نجد:

$$\mathcal{L}[f''(t)] + \mathcal{L}[f(t)] = 2\mathcal{L}[\sin t]$$

$$p^2F(p) - p\underbrace{f(0)}_{=0} - \underbrace{f'(0)}_{=0} + F(p) = 2\frac{1}{p^2+1}$$

$$\Rightarrow (p^2+1)F(p) = \frac{2}{p^2+1} \Rightarrow F(p) = \frac{2}{(p^2+1)^2}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٧- خاصية تكامل الأصل:

إذا كان $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)\ ; Re p > s_0$ فإن:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)\,du\right] = \frac{F(p)}{p}\ ; \quad Re\,p > s_0$$

مثال: أوجد صورة التابع وفق قوانين لابلاس:

$$f(t) = \int_0^t e^u\,du$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[\int_0^t e^u.du\right] = \frac{\mathcal{L}[e^t]}{p} = \frac{\frac{1}{p-1}}{p} = \frac{1}{p(p-1)}$$

مثال: أوجد صورة التابع وفق قوانين لابلاس:

$$f(t) = \int_0^t ch\,u.du$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[\int_0^t ch\,u.du\right] = \frac{\mathcal{L}[ch\,u]}{p} = \frac{\frac{p}{p^2-1}}{p}$$

$$= \frac{1}{p^2-1}$$

الحل بطريقة ثانية:

$$f(t) = \int_0^t ch\,u\,du = [sh\,u]_0^t = sh\,t$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[sh\,t] = \frac{1}{p^2-1}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٨- خاصية تكامل الصورة :

اذا كان $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)\ ;\ Re\,p > s_0$ فان:

واذا كان $\frac{f(t)}{t}$ أصل

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_p^{\infty} F(u)\,du$$

مثال : أوجد صورة التابع $f(t) = \frac{\sin wt}{t}$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin wt}{t}\right] = \int_p^{\infty} \frac{w}{u^2+w^2}\,du = \left[\arg tg \frac{u}{w}\right]_p^{\infty}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{p}{w}$$

مثال: أوجد صورة التابع $f(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t}$

$$\mathcal{L}\left[\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}\right] = \int_p^{\infty} \left(\frac{1}{u-b} - \frac{1}{u-a}\right) du$$

$$= \left[\ln(u-b) - \ln(u-a)\right]_p^{\infty}$$

$$= \left[\ln \frac{u-b}{u-a}\right]_p^{\infty}$$

$$= \ln(1) - \ln \frac{p-b}{p-a}$$

$$= \ln \frac{p-a}{p-b}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال: أوجد صورة التابع $f(t) = \frac{\sin^2 t}{t}$

لدينا:

$$\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[\sin^2 t] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4}\right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left[\frac{\sin^2 t}{t}\right] = \frac{1}{2}\int_p^\infty \left(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+4}\right) du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{2}\ln(u) - \frac{1}{2}\ln(u^2+4)\right]_p^\infty$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln(u^2) - \ln(u^2+4)\right]_p^\infty$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln\frac{u^2}{u^2+4}\right]_p^\infty$$

$$= \frac{1}{4}\left[\ln(1) - \ln\frac{p^2}{p^2+4}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{p^2+4}{p^2}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

جداء الطي : هام جداً حيث يستفاد منه في إيجاد لابلاس العكسي

إن جداء طي التابعين $f(t)$ ، $g(t)$ والذي يرمز له $f(t)*g(t)$ هو بالتعريف:

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau).g(t-\tau)\,d\tau$$

بسهولة يمكن البرهان على أن جداء الطي يتمتع بالخاصة التبديلية أي:

$$f*g=g*f$$

مثال: أوجد جداء طي التابعين $f(t)=t$ ، $g(t)=e^t$

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau).g(t-\tau)d\tau=\int_0^t \tau.e^{t-\tau}.d\tau$$

$$=e^t\int_0^t \tau.e^{-\tau}d\tau$$

بالتكامل بالتجزئة:

$$u=\tau \Rightarrow du=d\tau$$

$$e^{-\tau}d\tau=dv \Rightarrow v=-e^{-\tau}$$

$$\Rightarrow f(t)*g(t)=e^t\left\{\left[-\tau e^{-\tau}\right]_0^t+\int_0^t e^{-\tau}d\tau\right\}$$

$$=e^t\left\{-te^{-t}+0+\left[-e^{-\tau}\right]_0^t\right\}$$

$$=e^t\left\{-te^{-t}-e^{-t}+1\right\}=-t-1+e^t$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال: أوجد $f*g$ حيث $f(t)=e^{at}$, $g(t)=e^{bt}$ حيث $a\neq b$

الحل:

$$f(t)*g(t)=\int_0^t f(\tau).g(t-\tau)d\tau=\int_0^t e^{at}.e^{b(t-\tau)}d\tau$$

$$=e^{bt}\int_0^t e^{at}.e^{-b\tau}d\tau=e^{bt}\int_0^t e^{(a-b)\tau}d\tau$$

$$=e^{bt}\left[\frac{1}{a-b}e^{(a-b)\tau}\right]_0^t$$

$$=\frac{e^{bt}}{a-b}\left(e^{(a-b)t}-1\right)$$

$$=\frac{1}{a-b}\left(e^{at}-e^{bt}\right)$$

9- خاصية التلاف (بورييه).

إذا كان $\mathcal{L}[f(t)]=F(p)$ و $\mathcal{L}[g(t)]=G(p)$:

عندئذٍ:

$$\mathcal{L}\left[f(t)*g(t)\right]=F(p).G(p)$$

مثال: أوجد تحويل لابلاس للتابع

$$h(t)=\int_0^t e^{x}.\sin(t-x)dx$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحل: لدينا:

$$h(t) = \int_0^t e^x . \sin(t-x)\,dx = e^t * \sin t$$

بتطبيق تحويل لابلاس وبالاستفادة من خاصية التلاف:

$$\mathcal{L}[h(t)] = \mathcal{L}[e^t * \sin t]$$

$$= \mathcal{L}[e^t] . \mathcal{L}[\sin t]$$

$$= \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{p^2+1} = \frac{1}{(p-1)(p^2+1)}$$

مثال: أوجد تحويل لابلاس للتابع:

$$h(t) = \int_0^t e^{\tau} . e^{2(t-\tau)}\,d\tau$$

الحل: لدينا:

$$h(t) = \int_0^t e^{\tau} . e^{2(t-\tau)}\,d\tau = e^t * e^{2t}$$

بتطبيق تحويل لابلاس وبالاستفادة من خاصية التلاف نجد:

$$\mathcal{L}[h(t)] = \mathcal{L}[e^t * e^{2t}]$$

$$= \mathcal{L}[e^t] . \mathcal{L}[e^{2t}]$$

$$= \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{p-2} = \frac{1}{(p-1)(p-2)}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

"١٠- خاصة تكامل ديوأميل : هام جداً حيث يستفاد منها في ايجاد لابلاس العكسي

إذا كان $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$ و $\mathcal{L}[g(t)] = G(p)$ عندئذٍ :

$$\mathcal{L}\left\{ f(t)\cdot g(0) + \int_0^t f(\tau)\cdot g'(t-\tau)\,d\tau \right\} = pF(p)\cdot G(p)$$

$$\mathcal{L}\left\{ g(t)\cdot f(0) + \int_0^t g(\tau)\cdot f'(t-\tau)\,d\tau \right\} = pF(p)\cdot G(p)$$

"١١- خاصة الاشتقاق بالنسبة للوسيط :

يستفاد منها في حل المعادلات التفاضلية الجزئية

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial f(\lambda,t)}{\partial \lambda}\right] = \frac{\partial F(\lambda,p)}{\partial \lambda}$$

تحويل لابلاس العكسي :

ليكن $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$ يرمز لتحويل لابلاس العكسي بالرمز $\mathcal{L}^{-1}$ ونكتب :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$$

أمثلة :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{p}\right] = 3 \quad \& \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p-2}\right] = e^{2t}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

لايجاد تحويل لابلاس العكسي توجد عدّة طرائق منها :

١ - تفريق كسور .

c - خاصة التلاف .

٢ - خاصة تكامل ديو أميل .

٤ - استخدام بعض خواص تحويل لابلاس (و الأهم خاصة اشتقاق الصورة) .

مثال : أوجد تابع الأصل $f(t)$ للتابع :

$$F(p) = \frac{1}{p(p-1)}$$

الحل : باستخدام تفريق كسور

$$\frac{1}{p(p-1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1}$$

نضرب الطرفين بـ p ونجعل $p \to 0$ عندئذ : $A = -1$

نضرب الطرفين بـ $p-1$ ونجعل $p \to 1$ عندئذ : $B = 1$

$$\Rightarrow \quad F(p) = \frac{-1}{p} + \frac{1}{p-1}$$

بتطبيق تحويل لابلاس العكسي نجد :

$$f(t) = -1 + e^t$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال: أوجد تابع الأصل الذي صورته

$$F(p) = \frac{1}{p^3+p}$$

الحل: نقوم بتفريق لكسور:

$$\frac{1}{p^3+p} = \frac{1}{p(p^2+1)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp+C}{p^2+1}$$

$$1 \equiv A(p^2+1) + p(Bp+C)$$

$$1 \equiv Ap^2 + A + Bp^2 + pC$$

$$1 \equiv (A+B)p^2 + Cp + A$$

بالمطابقة نجد:

$$A = 1$$
$$C = 0$$
$$A+B=0 \Rightarrow B = -A = -1$$

$$\Rightarrow F(p) = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي نجد:

$$f(t) = 1 - \cos t$$

مثال: أوجد تحويل لابلاس العكسي للتابع الآتي:

$$F(p) = \frac{p}{p^2+2p+2}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحل: لا يمكن تفريق لكبسر لأن $\Delta < 0$

$$F(p) = \frac{p}{p^2+2p+2} = \frac{p}{p^2+2p+1+2-1}$$ ← بالاعتماد إلى مربع كامل

$$= \frac{p}{(p+1)^2+1} = \frac{(p+1)-1}{(p+1)^2+1}$$

$$F(p) = \frac{p+1}{(p+1)^2+1} - \frac{1}{(p+1)^2+1}$$

بتطبيق تحويل لابلاس العكسي وبالاستفادة من خاصية انزياح بالصورة نجد:

$$f(t) = e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t$$

مثال: أوجد تابع الأصل للتابع الآتي وذلك باستخدام خاصة التلاف

$$F(p) = \frac{1}{(p-1)(p-2)}$$

الحل

$$F(p) = \frac{1}{(p-1)(p-2)} = \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{p-2}$$

$$= \mathcal{L}[e^t] \cdot \mathcal{L}[e^{2t}] = \mathcal{L}[e^t * e^{2t}]$$

$$\Rightarrow F(p) = \mathcal{L}[e^t * e^{2t}]$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي نجد:

$$f(t) = e^t * e^{2t}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\Rightarrow f(t) = e^{t} * e^{2t}$$

$$= \int_0^t e^{\tau}\, e^{2(t-\tau)}\, d\tau$$

$$= e^{2t} \int_0^t e^{-\tau}\, d\tau = e^{2t} \left[-e^{-\tau} \right]_0^t$$

$$= e^{2t} \left[-e^{-t} + 1 \right] = e^{2t} - e^{t}$$

مثال: أوجد تابع الأصل $f(t)$ للتابع التالي عبر تكامل دوهاميل:

$$F(p) = \frac{1}{(p^2+1)\, p^3}$$

الحل:

$$F(p) = \frac{1}{p^3} \cdot \frac{1}{p^2+1} = p \cdot \frac{1}{p^4} \cdot \frac{1}{p^2+1}$$

$$F(p) = p \cdot \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{1}{p^4}$$

$$= \underbrace{p \cdot \mathcal{L}[\sin t] \cdot \mathcal{L}\left[\frac{t^3}{6}\right]}_{p\,F(p)\cdot G(p)}$$

حيث: $f(t) = \sin t$, $g(t) = \frac{t^3}{6}$ وعنه $g'(t) = \frac{t^2}{2}$

$$\Rightarrow g'(t-\tau) = \frac{(t-\tau)^2}{2}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\Rightarrow F(p) = \mathcal{L}\left[\sin t.(0) + \int_0^t \sin\tau \cdot \frac{1}{2}(t-\tau)^2 d\tau\right]$$

بتطبيق تحويل لابلاس العكسي نجد

$$f(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \sin(\tau).(t-\tau)^2 . d\tau$$

نكامل بالتجزئة :

$$(t-\tau)^2 = u \Rightarrow -2(t-\tau)d\tau = du$$

$$\sin\tau d\tau = dv \Rightarrow v = -\cos\tau$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{2}\left\{\left[-(t-\tau)^2\cos\tau\right]_0^t - 2\int_0^t (t-\tau)\cos\tau d\tau\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{t^2 - 2\int_0^t (t-\tau)\cos\tau d\tau\right\}$$

$$= \frac{1}{2}t^2 - \int_0^t (t-\tau)\cos\tau d\tau$$

نكامل بالتجزئة :

$$t-\tau = u \Rightarrow -d\tau = du$$

$$\cos\tau d\tau = dv \Rightarrow v = \sin\tau$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{2}t^2 - \left\{\left[(t-\tau)\sin\tau\right]_0^t + \int_0^t \ldots \tau d\tau\right\}$$

$$= \frac{1}{2}t^2 - \int_0^t \sin\tau d\tau = \frac{1}{2}t^2 + \left[\cos\tau\right]_0^t$$

$$= \frac{1}{2}t^2 + \cos t - 1$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال: أوجد تابع الأصل $f(t)$ وذلك باستخدام خاصة اشتقاق الصورة

$$F(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2}$$

الحل: لدينا:

$$\mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{p^2+1}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[t \cdot \sin t] = -\left(\frac{1}{p^2+1}\right)'$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[t \cdot \sin t] = \frac{2p}{(p^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left[\frac{t}{2}\sin t\right] = \frac{p}{p^2+1} = F(p)$$

أي:

$$F(p) = \mathcal{L}\left[\frac{t}{2}\sin t\right]$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي

$$\Rightarrow f(t) = \frac{t}{2}\sin t$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

كلية العلوم بالحسكة
قسم الرياضيات

معادلات تفاضلية جزئية
أ. ماهين شتي / المحاضرة ٤

تطبيقات تحويل لابلاس في حل المعادلات التفاضلية :

أولاً : حل المعادلات التفاضلية الخطية ذات الأمثال الثابتة ،
لتكن لدينا :

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(t) \quad ; \quad y = y(t)$$

حيث :

$a_0, a_1, \dots, a_n$ أعداد ثابتة

لحل هذه المعادلة باستخدام تحويل لابلاس نتبع الخطوات التالية :

1. نطبق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة حيث $\mathcal{L}[y(t)] = Y(P)$ ونستفيد من الخاصة الخطية وخاصة اشتقاق الأصل .
2. نقوم بعزل $Y(P) = \mathcal{L}[y(t)]$
3. نطبق تحويل لابلاس العكسي فنحصل على الحل المطلوب .

تمرين :

أوجد الحل الخاص للمعادلة باستخدام تحويل لابلاس

$$y'' - 2y' + y = 4 \quad ; \quad y = y(t)$$

$$y(0) = 4 \ \& \ y'(0) = 2$$

الحل :

نفرض أنه $\mathcal{L}[y(t)] = Y(P)$ وبتطبيق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة المعطاة نجد أنه :

$$\mathcal{L}[y'' - 2y' + y] = \mathcal{L}[4]$$

$$\mathcal{L}[y''] - 2\mathcal{L}[y'] + \mathcal{L}[y] = \frac{4}{P}$$

حسب خاصة اشتقاق الأصل لدينا :

$$\mathcal{L}[y''] = P^2 Y(P) - P y(0) - y'(0)$$

$$= P^2 Y(P) - 4P - 2$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\mathcal{L}[y'] = pY(p) - y(0)$$

$$= pY(p) - 4$$

بالتعويض نجد:

$$p^2Y(p) - 4p - 2 - 2(pY(p) - 4) + Y(p) = \frac{4}{p}$$

$$p^2Y(p) - 4p - 2 - 2pY(p) + 8 + Y(p) = \frac{4}{p}$$

$$(p^2 - 2p + 1)Y(p) = \frac{4}{p} + 4p - 6$$

$$(p-1)^2 Y(p) = \frac{4p^2 - 6p + 4}{p}$$

$$\Rightarrow \quad Y(p) = \frac{4p^2 - 6p + 4}{p(p-1)^2}$$

نقوم بتفريق الكسور:

$$\frac{4p^2 - 6p + 4}{p(p-1)^2} \equiv \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{(p-1)^2}$$

$$4p^2 - 6p + 4 \equiv A(p-1)^2 + Bp(p-1) + Cp$$

$$4p^2 - 6p + 4 \equiv A(p^2 - 2p + 1) + B(p^2 - p) + Cp$$

$$4p^2 - 6p + 4 \equiv (A+B)p^2 + (-2A - B + C)p + A$$

بالمطابقة نجد:

$$A = 4$$

$$A + B = 4 \Rightarrow \quad B = 0$$

$$-2A - B + C = -6 \Rightarrow \quad C = 2A + B - 6 = 2$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ومنه:

$$Y(p) = \frac{4}{p} + \frac{2}{(p-1)^2}$$

بتطبيق تحويل لابلاس العكسي وبالاستفادة من خاصة انزياح الصورة نجد

$$y(t) = 4 + 2e^{t} \cdot t$$

تمرين ٢:

أوجد الحل الخاص للمعادلة الآتية باستخدام تحويل لابلاس:

$$y'' - 2y' - 3y = 0 \quad , \quad y = y(t)$$

$$y(0) = 1 \quad \& \quad y'(0) = 2$$

الحل:

نفرض أنّ $\mathcal{L}[y(t)] = Y(p)$ وبتطبيق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة المعطاة نجد أنّ:

$$\mathcal{L}[y''] - 2\mathcal{L}[y'] - 3\mathcal{L}[y] = 0$$

$$p^2 Y(p) - p y(0) - y'(0) - 2\left(pY(p) - y(0)\right) - 3Y(p) = 0$$

$$p^2 Y(p) - p - \cancel{2} - 2pY(p) + \cancel{2} - 3Y(p) = 0$$

$$(p^2 - 2p - 3)\, Y(p) = p$$

$$\Rightarrow \quad Y(p) = \frac{p}{p^2 - 2p - 3} = \frac{p}{(p-3)(p+1)}$$

$$\frac{p}{(p-3)(p+1)} = \frac{A}{p-3} + \frac{B}{p+1}$$

نضرب الطرفين بـ $p-3$ ونجعل $p \to 3$ عندئذ

$$A = \frac{3}{4}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

نضرب الطرفين بـ $P+1$ ونجعل $P \to -1$ عندئذ $B = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow Y(P) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{P-3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{P+1}$$

بتطبيق تحويل لابلاس العكسي نجد أن:

$$y(t) = \frac{3}{4} e^{3t} + \frac{1}{4} e^{-t}$$

ثانياً: حل المعادلات التفاضلية ذات الأمثال المتغيرة

لإيجاد حل معادلة تفاضلية ذات أمثال متغيرة باستخدام تحويل لابلاس نتبع الخطوات التالية:

1. نطبق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة المعطاة.
2. نستفيد من خاصة اشتقاق الأصل واشتقاق الصورة.
3. نطبق تحويل لابلاس العكسي فنحصل على الحل المطلوب.

مثال:

أوجد الحل الخاص للمعادلة الآتية:

$$ty'' + 2y' + ty = 0 \quad ; \quad y = y(t)$$

$$y(0) = 1 \quad \& \quad y'(0) = a$$

الحل: نفرض أن: $\mathcal{L}[y(t)] = Y(P)$

نطبق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة:

$$\mathcal{L}[ty''] + 2\mathcal{L}[y'] + \mathcal{L}[ty] = 0 \quad (*)$$

نستفيد من خاصة اشتقاق الأصل نجد:

$$\mathcal{L}[y'] = PY(P) - y(0) = PY(P) - 1$$

$$\mathcal{L}[y''] = P^2Y(P) - Py(0) - y'(0) = P^2Y(P) - P - a$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner



وحسب خاصة اشتقاق الصورة

$$\mathcal{L}[ty] = (-1)^1 \cdot \frac{d\,Y(p)}{dp} = -Y'(p)$$

$$\mathcal{L}[ty''] = (-1)^1 \frac{d\,(p^2Y(p) - p - a)}{dp}$$

$$= -(p^2Y(p) - p - a)'$$

$$= -(2pY(p) + p^2Y'(p) - 1)$$

$$= -2pY(p) - p^2Y'(p) + 1$$

نعوض في (*)

$$\Rightarrow -2pY(p) - p^2Y'(p) + 1 + 2pY(p) - 2 - Y'(p) = 0$$

$$\Rightarrow -p^2Y'(p) - Y'(p) = 1$$

$$-(p^2+1)\,Y'(p) = 1$$

$$\underbrace{-Y'(p)}_{\text{اشتقاق صورة}} = \frac{1}{p^2+1}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}[t.y(t)] = \mathcal{L}[\sin t]$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي للطرفين نجد:

$$t.y(t) = \sin t \Rightarrow y(t) = \frac{\sin t}{t}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمرين : أوجد الحل الخاص للمعادلة الآتية :

$$ty'' + ty' + y = 0 \quad ; \quad y = y(t)$$

$$y(0) = 0 \quad \& \quad y'(0) = 1$$

الحل : نفرض أنه $\mathcal{L}[y(t)] = Y(p)$

وبتطبيق تحويل لابلاس لكلا طرفي المعادلة نحصل على :

$$\mathcal{L}[ty''] + \mathcal{L}[ty'] + \mathcal{L}[y] = 0 \quad (**)$$

وبحسب خاصية اشتقاق الأصل لدينا

$$\mathcal{L}[y'] = pY(p) - y(0) = pY(p)$$

$$\mathcal{L}[y''] = p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 1$$

وبحسب خاصية اشتقاق الصورة لدينا :

$$\mathcal{L}[ty'] = -1 \cdot \frac{d\mathcal{L}[y']}{dp} = -\frac{d}{dp}pY(p) = -(pY(p))' =$$

$$= -Y(p) - pY'(p)$$

$$\mathcal{L}[ty''] = -(p^2Y(p) - 1)' = -2pY(p) - p^2Y'(p)$$

بالتعويض في $(**)$

$$-2pY(p) - p^2Y'(p) - Y(p) - pY'(p) + Y(p) = 0$$

$$\Rightarrow \quad -2pY(p) - p^2Y'(p) - pY'(p) = 0$$

$$\Rightarrow \quad pY'(p) + Y'(p) = -2Y(p)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\Rightarrow (p+1)y'(p) = -2y(p) \quad ; \quad y'(p) = \frac{dy(p)}{dp}$$

$$\Rightarrow \frac{dy(p)}{y(p)} = \frac{-2}{p+1}dp$$

بالتكامل $\int$ $$\ln \frac{y(p)}{c} = -2\ln(p+1)$$

$$\Rightarrow \ln \frac{y(p)}{c} = \ln \frac{1}{(p+1)^2}$$

$$\Rightarrow y(p) = \frac{c}{(p+1)^2}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي وبالاستفادة من خاصة الانزياح نجد

$$\Rightarrow y(t) = c.t.e^{-t}$$

ايجاد ثابت c :

$y'(t) = c.(e^{-t} - te^{-t})$ ومنه $y'(0) = 1$ لدينا

$$\Rightarrow 1 = c(1-0) \Rightarrow c = 1$$

ومنه

$$y(t) = t.e^{-t}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ثالثاً: حل المعادلات التفاضلية الجزئية باستخدام تحويل لابلاس.

ليكن لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية:

$$F(x,t,u,p,q,r,s,t)=0 \quad ; \quad u=u(x,t)$$

لحل هذه المعادلة باستخدام تحويلات لابلاس نتبع الخطوات التالية:

1. نطبق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة على اعتبار x وسيط و t هو المتحول المستقل
2. نستفيد من خاصة اشتقاق بالنسبة لوسيط

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]=\frac{\partial U(x,p)}{\partial x}$$

حيث $\mathcal{L}[u(x,t)]=U(x,p)$

3. نستفيد من خاصة اشتقاق الأصل ومن شروط الابتدائية المعطاة.
4. نعوض في المعادلة التفاضلية فنحصل على معادلة تفاضلية للتابع U والمتحول x حيث p معتبرة ثابتة.
5. نوجد حل المعادلة التفاضلية العادية.
6. نأخذ تحويل لابلاس العكسي فنحصل على المطلوب.

مثال: أوجد الحل الخاص للمعادلة:

$$u_x+u_t=x+t \iff \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=x+t$$

حيث:

$$u(x,0)=u(0,t)=1$$

الحل: نطبق تحويل لابلاس على طرفي المعادلة بالنسبة لـ t على اعتبار x وسيط مثلاً:

$$\mathcal{L}[u_x]+\mathcal{L}[u_t]=\mathcal{L}[x]+\mathcal{L}[t] \quad (*)$$

من خاصة الاشتقاق لوسيط:

$$\mathcal{L}[u_x]=\mathcal{L}\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]=\frac{\partial U(x,p)}{\partial x}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حسب خاصية اشتقاق الأصل لدينا

$$\mathcal{L}[u_t] = p\,U(x,p) - p\,u(x,0) = p\,U(x,p) - 1$$

ولدينا:

$$\mathcal{L}[x] = \frac{x}{p} \quad ,\quad x \text{ وسيط}$$

$$\mathcal{L}[t] = \frac{1}{p^2}$$

لنعوض في (*) نجد:

$$\frac{\partial U(x,p)}{\partial x} + p\,U(x,p) - 1 = \frac{x}{p} + \frac{1}{p^2}$$

$$U_x(x,p) + p\,U(x,p) = 1 + \frac{x}{p} + \frac{1}{p^2}$$

وهي معادلة تفاضلية عادية خطية من الرتبة الأولى للتابع U والمتحول x

نقبل عامل تكامل من الشكل:

$$\mu = e^{\int P(x)\,dx} = e^{\int p\,dx} = e^{px}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكامل:

$$e^{px}\,U_x(x,p) + p e^{px}\,U(x,p) = \left(1 + \frac{x}{p} + \frac{1}{p^2}\right) e^{px}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{px}\,U(x,p)\right) = \left(1 + \frac{x}{p} + \frac{1}{p^2}\right) e^{px}$$

$$\rightarrow \quad e^{px}\,U(x,p) = \int \underbrace{\left(1 + \frac{x}{p} + \frac{1}{p^2}\right) e^{px}}_{I} dx$$

$$I = \int \left(1 + \frac{x}{p} + \frac{1}{p^2}\right) e^{px}\, dx$$

$$u = 1 + \frac{x}{p} + \frac{1}{p^2} \Rightarrow du = \frac{dx}{p}$$

$$dv = e^{px}dx \Rightarrow v = \frac{1}{p} e^{px}$$

$$\Rightarrow I = u.v - \int v.du$$

$$= \frac{1}{p} e^{px} + \frac{x}{p^2} e^{px} + \frac{1}{p^3} e^{px} - \int \frac{1}{p^2} e^{px}$$

$$= \frac{1}{p} e^{px} + \frac{x}{p^2} e^{px} + \frac{1}{p^3} e^{px} - \frac{1}{p^3} e^{px} + C$$

$$= \frac{1}{p} e^{px} + \frac{x}{p^2} e^{px} + C$$

$$\Rightarrow e^{px} U(x,p) = \frac{1}{p} e^{px} + \frac{x}{p^2} e^{px} + C$$

$$\Rightarrow U(x,p) = \frac{1}{p} + \frac{x}{p^2} + C e^{-px}$$

تحديد الثابت C :

$$u(0,t) = 1 \xrightarrow[\text{لابلاس}]{\text{بأخذ تحويل}} U(0,p) = \frac{1}{p}$$

بالتعويض نجد:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p} + C \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow U(x,p) = \frac{1}{p} + \frac{x}{p^2}$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي نجد:

$$u(x,t) = 1 + t.x$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

معادلات تفاضلية جزئية

محاضرة ٥+٦

ملاحظة: إذا كانت

طريقة فورييه أو فصل المتحولات لحل المعادلات التفاضلية الجزئية

تعتمد هذه الطريقة بشكل أساسي أن للمعادلة حلاً من الشكل:

$$u(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$$

بالاشتقاق والتعويض في المعادلة نحصل على معادلتين تفاضليتين عاديتين، عليها نوجد قيم $X(x), Y(y)$ وبالتعويض في عبارة الحل العام $u(x,y)$ يتم المطلوب

تمرين:

أوجد حلاً للمسألة التالية بطريقة فصل المتغيرات:

$$3\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad ; \quad z = z(x,y)$$

$$z(x,0) = 4e^{-x}$$

الحل: نفرض حلاً من الشكل:

$$z(x,y) = X(x) \cdot Y(y) \quad \dots (*)$$

بالاشتقاق:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = X'(x) \cdot Y(y) \quad \& \quad \frac{\partial z}{\partial y} = X(x) \cdot Y'(y)$$

بالتعويض نجد:

$$3X' \cdot Y + 2XY' = 0 \Rightarrow 3X'Y = -2XY'$$

$$\Rightarrow -\frac{3X'}{2X} = \frac{Y'}{Y} = \lambda \quad ; \quad \lambda : \text{const}$$

$$\Rightarrow \frac{-3X'}{2X} = \lambda \quad \dots (1)$$

$$\Rightarrow \frac{Y'}{Y} = \lambda \quad \dots (2)$$

هاتين النسبتين احداهما تابعة لـ x فقط والثانية تابعة لـ t فقط لذلك لكي تتساويان لابد أن تكون كل منهما مساوية لعدد ثابت نفرضه λ

استنتاج (1)

صنف حل معادلة بطريقة لابلاس أوجد تابع الاصل

اهتزاز حل مسألة (وتر أو حرارة)

(1) لنبحث عن حل المعادلة

$$\frac{-3x'}{2x} = \lambda \Rightarrow \frac{x'}{x} = \frac{-2}{3}\lambda \int \Rightarrow \ln\frac{x}{c_1} = -\frac{2}{3}\lambda x$$

$$\Rightarrow \quad x = c_1 e^{-\frac{2}{3}x}$$

(2) لنبحث عن حل المعادلة

$$\frac{y'}{y} = \lambda \int \Rightarrow \ln\frac{y}{c_2} = \lambda y$$

$$\Rightarrow \quad y = c_2 e^{\lambda y}$$

بالتعويض في (*) نجد أن:

$$z = c_1 . c_2 e^{(-\frac{2}{3}x + y)\lambda}$$

نعين ثابتة الثوابت من الشرط المعطى:

$$z(x,0) = 4e^{-x}$$

$$\Rightarrow \quad c_1 . c_2 e^{-\frac{2}{3}x\lambda} \equiv 4e^{-x} \Rightarrow c_1 . c_2 = 4 \text{ و } \lambda = \frac{3}{2}$$

وبالتالي فإن:

$$z(x,y) = 4e^{-x + \frac{3}{2}y}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حل مسائل القيم الحدية بطريقة فوريه (فصل المتغيرات)

أولاً: حل مسألة الاهتزازات العرضانية لوتر طوله l مثبت من طرفيه والقوى الخارجية معدومة

أي نطلب ايجاد الحل $u(x,t)$ غير المعدوم لمعادلة الاهتزازات الحرة للوتر $0 \le x \le l$ حيث

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \text{---- (3)}$$

والمحققة للشروط الحدية:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \quad ; \quad t \ge 0$$

والشروط الابتدائية

$$u(x,0) = \varphi(x).$$

ويعبر عن الوضع الابتدائي للوتر أي شكله الهندسي عندما $t=0$

$$u_t(x,0) = \psi(x).$$

ويعبر عن السرعة الابتدائية لكل نقطة x من نقاط الوتر في اللحظة $t=0$

لحل هذه المسألة باستخدام طريقة فصل المتحولات لذلك نفرض حلاً من الشكل

$$u(x,t) = \quad . T(t)$$

نشتق:

$$u_{tt} = X(x).T''(t) \quad \& \quad u_{xx} = X''(x).T(t)$$

نعوض في المعادلة (3) نجد:

$$X.T'' = a^2 T.X''$$

$$\Rightarrow \frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = \mu$$ ثابت تناسب

ومنه نجد:

$$X'' - \mu X = 0. \quad \text{---- (4)}$$

$$T'' - \mu a^2 T = 0 \quad \text{---- (5)}$$

لنوجد حل المعادلة (4) وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية
ولإيجاد حلها العام نميز الحالات الثلاث الآتية حسب قيم μ:

1) $\mu = 0$

$$\Rightarrow \quad X'' = 0 \quad \Rightarrow \quad X' = c_1 \quad \Rightarrow \quad X = c_1 x + c_2$$

نحدد الثوابت c_1 و c_2 من الشروط الحدية:

$$u(0,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(0)\,T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(0) = 0 \ ; \ T(t) \neq 0$$

نعوض فنجد:

$$c_2 = 0$$

$$u(l,t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(l)\,T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad X(l) = 0 \ ; \ T(t) \neq 0$$

نعوض فنجد:

$$0 = c_1 l + c_2 \quad ; \quad l \neq 0 \quad (\text{طول الوتر})$$

بالحل المشترك نجد أن

$$c_1 = c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = X(x)\,T(t) = 0$$

وهذا الحل مرفوض (لأنه حل صفري)

2) $\mu > 0$ ولنفرض أن $\mu = \lambda^2$

$$\Rightarrow \quad X'' - \lambda^2 X = 0$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ذات أمثال ثابتة.

$$(D^2 - \lambda^2)X = 0 \quad \Rightarrow \quad D^2 - \lambda^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad D_{1,2} = \pm\lambda$$

هذه جذور حقيقية مختلفة مثنى مثنى وعليه الحل العام هو:

$$X(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}$$

نحدد الثوابت من الشروط الحدية:

$$X(0) = 0 \Rightarrow \quad c_1 + c_2 = 0$$

$$X(l) = 0 \Rightarrow \quad c_1 e^{\lambda l} + c_2 e^{-\lambda l} = 0$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بالحل المشترك نجد أنّه: $c_1 = c_2 = 0$

وبالتالي $X(x) = 0$ ومنه

$u(x,t) = 0$ (حل صفري مرفوض)

3) $\mu < 0$ ولنفرض أنه: $\mu = -\lambda^2$

$$\Rightarrow X'' + \lambda^2 X = 0$$

$$(D^2 + \lambda^2) X = 0 \Rightarrow D^2 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow D^2 = -\lambda^2 \Rightarrow D_{1,2} = \mp i\lambda$$

جذور عقدية متوافقة ومنه الحل العام هو:

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x$$

تحديد الثوابت c_1 و c_2

$$X(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$X(l) = 0 \Rightarrow c_1 \cos \lambda l + c_2 \sin \lambda l = 0 \Rightarrow c_2 \sin \lambda l = 0$$

اما $c_2 = 0$ وهذا مرفوض لأننا سنحصل على الحل الصفري

اذن:

$$\sin \lambda l = 0 \; ; \; c_2 \neq 0$$

$$\Rightarrow \lambda l = n\pi \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{l} \; ; \; n = 1, 2, \ldots$$

وبالتالي يوجد أكثر من حل:

$$X_n(x) = c_n \sin \frac{n\pi}{l} x \; , \; n = 1, 2, \ldots$$

لنبحث الآن عن حل للمعادلة (5) حيث $\lambda = \frac{n\pi}{l}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$T'' + a^2 \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 T = 0$$

$$\Rightarrow T'' + \left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 T = 0$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية ذات أمثال ثابتة.

$$\left(D^2 + \left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2\right) T = 0 \Rightarrow D^2 = -\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2$$

$$\Rightarrow D_{1,2} = i\,\frac{n\pi a}{\ell}$$

وبالتالي نحصل على:

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{n\pi a}{\ell} t + B_n \sin\frac{n\pi a}{\ell} t \quad ; n = 0,1,2,\dots h$$

$h \in \mathbb{Z}$

وبالتالي فإننا نحصل على:

$$U_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(x)$$

$$U_n(x,t) = \left[C_n A_n \cos\frac{n\pi a}{\ell} t + C_n B_n \sin\frac{n\pi a}{\ell} t\right] \cdot \sin\frac{n\pi}{\ell}$$

ومنه:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n U_n(x,t)$$

$$\Rightarrow u(x,t) = \left[\underbrace{E_n C_n A_n}_{a_n} \cos\frac{n\pi a}{\ell} t + \underbrace{E_n C_n B_n}_{b_n} \sin\frac{n\pi a}{\ell} t\right] \cdot \sin\frac{n\pi}{\ell}$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi a}{\ell} t + b_n \sin\frac{n\pi a}{\ell} t\right) \sin\frac{n\pi}{\ell} x}$$

حيث a_n, b_n من شروط الابتدائية:

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

لدينا: $u(x,0)=\varphi(x)$

$$\Rightarrow \varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x$$

وهي تمثل سلسلة فوريه لتابع فردي وبالتالي فان:

$$a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx$$ حيث

ولدينا: $u_t(x,0)=\psi(x)$

$$u_t(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-a_n\cdot\frac{n\pi a}{\ell}\sin\frac{n\pi a}{\ell}t+b_n\cdot\frac{n\pi a}{\ell}\cos\frac{n\pi a}{\ell}t\right)\sin\frac{n\pi}{\ell}x$$

بتعويض:

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\cdot\frac{n\pi a}{\ell}\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}x$$

وهي تمثل سلسلة فوريه لتابع فردي:

$$\frac{n\pi a}{\ell}b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\psi(x)\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx$$

$$\Rightarrow b_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell}\psi(x)\cdot\sin\frac{n\pi}{\ell}x\cdot dx$$ حيث

تمرين: أوجد حلاً مميزاً للمسألة التالية.

$$u_{tt}-9u_{xx}=0$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0$$

$$u(x,0)=0 \quad \& \quad u_t(x,0)=x$$

الحل:

ان المسألة تمثل الاهتزازات العرضانية لوتر مثبت من طرفيه في حال انعدام القوى الخارجية حيث $l=\pi$ & $a^2=9$ ومنه $a=3$

$$\varphi(x)=0 \quad \& \quad \psi(x)=x$$

لدينا:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+b_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right).\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x).\sin\frac{n\pi}{l}x.dx \quad \& \quad b_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\psi(x).\sin\frac{n\pi}{l}x.dx$$

$$a_n=0$$

$$b_n=\frac{2}{3n\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx.dx$$

$$=\frac{2}{3n\pi}\left\{\left[-\frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}.dx\right\}$$

$$=\frac{2}{3n\pi}\left\{-\frac{\pi}{n}\cos n\pi+0+\underbrace{\left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}}_{0}\right\}$$

$$=-\frac{2}{3n^2}\cos n\pi=-\frac{2}{3n^2}(-1)^n=\frac{2}{3n^2}(-1)^{n+1}$$

ومنه حل المسألة:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n+1}\frac{2}{3n^2}\sin 3nt\right).\sin nx$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمرين :

أوجد حلاً غير صفرياً للمسألة التالية

$$u_{tt} = \frac{1}{4} u_{xx}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

$$u(x,0) = \frac{1}{10}\sin x \quad \& \quad u_t(x,0) = \frac{1}{10}\sin x$$

الحل:

ان المسألة تمثل الاهتزازات الفرضية لوتر مثبت من طرفيه في حال انعدام القوة الخارجية وحلها يعطى بالصيغة

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi a}{\ell}t + b_n \sin\frac{n\pi a}{\ell}t\right)\sin\frac{n\pi}{\ell}x$$

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx \quad \& \quad b_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell}\psi(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx$$

لدينا: $a = \frac{1}{2}$ & $\ell = \pi$ & $\varphi(x) = \psi(x) = \frac{1}{10}\sin x$

لنحسب a_n:

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{10}\sin x \cdot \sin nx\,dx$$

تذكر:

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{5\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left(\cos(1-n)x - \cos(1+n)x\right)dx$$

$$= \frac{1}{10\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos(1-n)x - \cos(1+n)x\right)dx$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

في حالة $n \neq 1$ لدينا

$$a_n = \frac{1}{10\pi}\left[\frac{\sin(1-n)x}{1-n} - \frac{\sin(1+n)x}{1+n}\right]_0^{\pi} = 0$$

في حالة $n = 1$ لدينا

$$a_1 = \frac{1}{10\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{10\pi}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{10\pi}[\pi - 0 - 0] = \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow a_n = \begin{cases} \frac{1}{10} & ; n = 1 \\ 0 & ; n \neq 1 \end{cases}$$

لحساب b_n

$$b_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^{\ell} \psi(x)\cdot \sin\frac{n\pi}{\ell}x\,dx$$

$$= \frac{2}{n\pi\cdot\frac{1}{2}}\int_0^{\pi}\frac{1}{10}\sin x\cdot\sin nx\,dx = \frac{2}{5n\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cdot\sin nx\,dx$$

في حالة $n \neq 1$ يكون $b_n = 0$

في حالة $n = 1$ يكون

$$b_1 = \frac{2}{5\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{5\pi}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{5} \Rightarrow b_n = \begin{cases} \frac{1}{5} & ; n = 1 \\ 0 & ; n \neq 1 \end{cases}$$

ومنه الحل النهائي:

$$u(x,t) = \left[a_1\cos\frac{1\cdot\pi\cdot\frac{1}{2}}{\pi}t + b_n\sin\frac{1\pi\cdot\frac{1}{2}}{\pi}t\right]\cdot\sin\frac{1\cdot\pi}{\pi}x$$

$$= \left(\frac{1}{10}\cos\frac{t}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{t}{2}\right)\cdot\sin x$$

(١٠)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ثانياً: حل المسألة المعبرة عن معادلة الانتشار الحراري في جسم اسطواني الشكل معزول مع شروط حدية من النوع الأول وبدون قوى خارجية:

أي يطلب ايجاد الحل غير الصفري $u(x,t)$ للمسألة الآتية بطريقة فصل المتحولات:

$$u_t = h^2 u_{xx}$$

حيث:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$ (l طول الجسم الاسطواني)

$$u(x,0) = \varphi(x)$$

نفرض حلاً من الشكل: $u(x,t) = X(x).T(t)$ (*)

نشتق:

$$u_t = X.T' \quad \& \quad u_{xx} = X''.T$$

نعوض

$$X.T' = h^2 X''.T$$

$$\Rightarrow \frac{T'}{h^2 T} = \frac{X''}{X} = \mu$$

$$X'' - \mu X = 0 \quad \text{-----} \quad (1)$$

$$\Rightarrow T' - \mu h^2 T = 0 \quad \text{----} \quad (2)$$

لنبحث عن حل للمعادلة (1) وهي معادلة تفاضلية خطية من المرتبة الثالثة ولايجاد حلها العام نميز الحالات الثلاث الآتية حسب قيم μ:

1) $\mu = 0$

$$X'' = 0 \Rightarrow X' = C_1 \Rightarrow X = C_1 x + C_2$$

نحدد الثوابت C_1 و C_2 من الشروط الحدية

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow X(0).T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \; ; \; T(t) \neq 0$$

$$u(l,t) = 0 \Rightarrow X(l).T(t) = 0 \Rightarrow X(l) = 0 \; , \; T(t) \neq 0$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

بالتعويض نحصل على:

$X(0)=0 \Rightarrow c_2=0$

$X(l)=0 \Rightarrow c_1 l + c_2 = 0 \Rightarrow c_1=0$ } $\Rightarrow c_1=c_2=0 \Rightarrow X(x)=0$

وهذه $u(x,t)=0$ حل صفري مرفوض

2) $\mu>0$ ولنفرض أنه $\mu=\lambda^2$

$\Rightarrow X''-\lambda^2 X=0$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ذات أمثال ثابتة

$\Rightarrow X(x)=c_1 e^{\lambda x}+c_2 e^{-\lambda x}$

نحدد الثوابت c_1 و c_2 لدينا:

$X(0)=0 \Rightarrow c_1+c_2=0$

$X(l)=0 \Rightarrow c_1 e^{\lambda l}+c_2 e^{-\lambda l}=0$

بالحل بالتزامن نحصل على $c_1=c_2=0$ وهذه $X(x)=0$

وبالتالي $u(x,t)=0$ حل صفري مرفوض

3) $\mu<0$ ولنفرض $\mu=-\lambda^2$

$\Rightarrow X''+\lambda^2 X=0$

$\Rightarrow X(x)=c_1\cos\lambda x+c_2\sin\lambda x$

نحدد الثوابت c_1 و c_2

$X(0)=0 \Rightarrow c_1=0$

$X(l)=0 \Rightarrow c_2\sin\lambda l=0 \Rightarrow \sin\lambda l=0 \; ; \; c_2\neq 0$

$\Rightarrow \lambda l=n\pi \; ; \; n=1,2,\dots$

$\Rightarrow \lambda=\frac{n\pi}{l} \; ; \; n=1,2,\dots$

وبالتالي يوجد اكثر من حل:

$X_n(x)=c_n \sin\frac{n\pi}{l}x \; ; \; n=1,2,\dots$

لنبحث عن حل للمعادلة (2) حيث $\lambda = \frac{n\pi}{\ell}$

$$T' + \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 . h^2 T = 0$$

$$\Rightarrow \quad T' + \left(\frac{n\pi h}{\ell}\right)^2 T = 0$$

وهي معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى وذات أمثال ثابتة

$$\left(D + \left(\frac{n\pi h}{\ell}\right)^2\right) T = 0 \Rightarrow D = -\left(\frac{n\pi h}{\ell}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad T_n(t) = D_n e^{-\left(\frac{n\pi h}{\ell}\right)^2 . t}$$

وبالتالي نحصل على n حل:

$$U_n(x,t) = D_n C_n e^{-\left(\frac{n\pi h}{\ell}\right)^2 . t} . \sin \frac{n\pi}{\ell} x$$

وحيث:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n U_n(x,t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{E_n D_n C_n}_{a_n} . e^{-\left(\frac{n\pi h}{\ell}\right)^2 . t} . \sin \frac{n\pi}{\ell} x$$

$$\boxed{U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi h}{\ell}\right)^2 . t} . \sin \frac{n\pi}{\ell} x}$$ حل

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تحديد الثوابت a_n من الشروط الابتدائية:

$$u(x,0)=\varphi(x) \Rightarrow \varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi}{\ell}x$$

وهي تمثل سلسلة فورييه لتابع فردي وبالتالي فإن:

$$\boxed{a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x).\sin\frac{n\pi}{\ell}x.dx}$$ فقط

تمرين ١: أوجد حلاً للمسألة:

$$u_t=3u_{xx}$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0$$

$$u(x,0)=4\sin 2x$$

الحل: هذه المسألة تمثل معادلة الانتشار الحراري في جسم اسطواني الشكل معزول وبدون قوى خارجية يعطى حلها:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi h}{\ell}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi}{\ell}x$$

حيث

$$a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\varphi(x).\sin\frac{n\pi}{\ell}x.dx$$

لدينا

$$h^2=3 \Rightarrow h=\sqrt{3} \ \& \ \ell=\pi \ \& \ \varphi(x)=4\sin 2x$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}4\sin 2x.\sin nx.dx$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos(2-n)x-\cos(2+n)x\right)dx$$

في حال $n\neq 2$ لدينا

$$a_n=\frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin(2-n)x}{2-n}-\frac{\sin(2+n)x}{2+n}\right]_0^{\pi}=0$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

في حال $n=2$ لدينا

$$a_2 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos 4x)\,dx$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[x-\cos 4x\right]_0^{\pi} = 4$$

وبالتالي:

$$u(x,t) = 4e^{-12t}\cdot\sin 2x$$

تمرين: أوجد حلاً للمسألة

$$u_t = 4u_{xx}$$

$$u(0,t) = u(\ ,t) = 0$$

$$u(x,0) = 1$$

الحل: هذه المسألة تمثل معادلة انتشار الحرارة في جسم اسطواني الشكل معزول وبدون قوى خارجية

$$h=2 \ \& \ l=1 \ \& \ \varphi(x)=1$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^{l}\varphi(x)\cdot\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx = 2\int_0^{1}\sin n\pi x\,dx$$

$$= -2\left[\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right]_0^{1} = \frac{-2}{n\pi}\left[\cos n\pi - 1\right]$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right]$$

$$= \begin{cases} 0 \ ; & n: \text{زوجي} \\ \frac{4}{n\pi} \ , & n \ \text{فردي} \end{cases} \Rightarrow a_{(2n-1)} = \frac{4}{(2n-1)\pi}$$

الى هنا يكفي

$$\Rightarrow u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)\pi}e^{-(2\pi(2n-1))^2\cdot t}\cdot\sin(2n-1)\pi x$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner