جلسة تمهيديّة :

- عناصر المتجه :

1. المنحني (الحامل) : هو المستقيم الذي تحمل عليه المتجه أو أي مستقيم آخر يوازيه .
2. الطويلة : وهي القيمة المطلقة لطول شعاع .

- مشتق متجه ثابت :

1. ثابت بالطويلة والمنحني ، مشتقه الشعاع الصفري
2. ثابت بالطويلة ومتغيّر في المنحني ، مشتقه هو متجه عمودي عليه .
3. ثابت في المنحني ومتغيّر في الطويلة ، مشتقه هو متجه يوازيه .

- جمل المحاور الإحداثيّة الشهيرة :

1. جملة المحاور الديكارتيّة :

$$\vec{\Delta} = \bigcirc \vec{e_x} + \square \vec{e_y} + \text{✿} \vec{e_z}$$

2. جملة المحاور الاسطوانيّة :

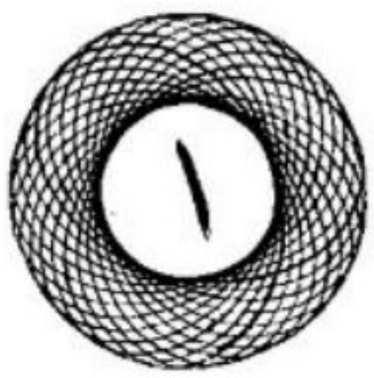
$$\vec{\Delta} = \bigcirc \vec{e_r} + \square \vec{e_\theta} + \text{✿} \vec{e_z}$$

3. جملة المحاور الكرويّة :

$$\vec{\Delta} = \bigcirc \vec{e_r} + \square \vec{e_\theta} + \text{✿} \vec{e_\varphi}$$

4. جملة المحاور الذاتيّة :

$$\vec{\Delta} = \bigcirc \vec{e_\tau} + \square \vec{e_n}$$



ZIZAN
المكتبة المركزية
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
CamScanner

• الجداء الداخلي :

الجداء الداخلي لمتجهين هو عدد ، لدينا :

$$\overrightarrow{oA} = x_A \vec{e_x} + y_A \vec{e_y} + z_A \vec{e_z}$$

$$\overrightarrow{oB} = x_B \vec{e_x} + y_B \vec{e_y} + z_B \vec{e_z}$$

$$\overrightarrow{oA} \cdot \overrightarrow{oB} = x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B$$

$$\overrightarrow{oA} \cdot \overrightarrow{oB} = |\overrightarrow{oA}| \cdot |\overrightarrow{oB}| \cdot \cos(\overrightarrow{oA}, \overrightarrow{oB})$$

* ينعدم الجداء الداخلي في حال تعامد المتجهين

• الجداء الخارجي :

الجداء الخارجي لمتجهين هو متجه عمودي على مستويهما (عمودي على كل منهما)

$$\overrightarrow{oA} \wedge \overrightarrow{oB} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \end{vmatrix}$$

$$|\overrightarrow{oA} \wedge \overrightarrow{oB}| = |\overrightarrow{oA}| \cdot |\overrightarrow{oB}| \cdot \sin(\overrightarrow{oA}\,\hat{,}\,\overrightarrow{oB})$$

* ينعدم الجداء الخارجي في حال توازي المتجهين



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

العناصر المطالبيّة :

تقسم العناصر المطالبيّة إلى ثلاثة عناصر :

1. مراكز المطالة .
2. عزوم المطالة .
3. جداءات المطالة .

أولاً : المراكز المطالبيّة :

إذا كانت لدينا مجموعة ماديّة (S) مكونة من عدد من النقاط المادّيّة ، مواضعها وكتلها (P_i , m_i) ; $i = 1, \dots, n$
عندها يُعرف مركز الكتلة (مركز المطالة) للمجموعة الماديّة المعطاة بأنه النقطة C التي تحقق : $m_1 \overrightarrow{CP_1} + m_2 \overrightarrow{CP_2} + \dots + m_n \overrightarrow{CP_n} = \overrightarrow{0}$;

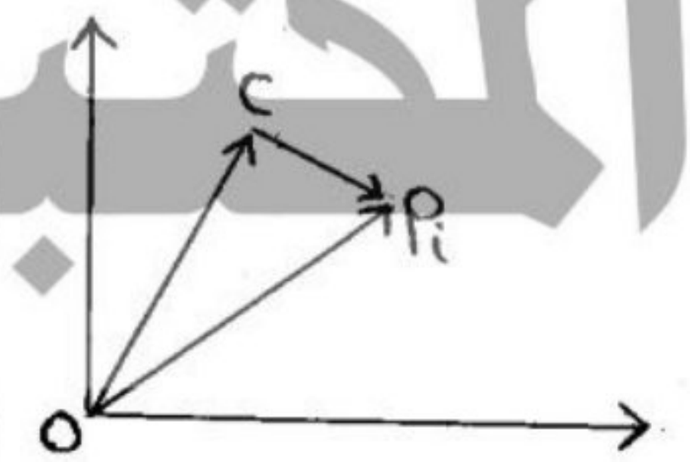
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{CP_i} = \overrightarrow{0}$$

$$\overrightarrow{OP_i} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP_i}$$

• تجمع الأشعة :

سمى إذا كانت متعاقبة فتجمع حسب علاقة شال

سمى إذا كان لها نفس المبدأ فتجمع حسب قاعدة متوازي الأضلاع



حسب علاقة شال :

3

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (\overrightarrow{OP_i} - \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OP_i} - \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$$

المكتبة المركزية
ZIZAN
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
CamScanner

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OP_i} - \overrightarrow{OC} \sum_{i=1}^{n} m_i = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OP_i} - \overrightarrow{OC}\, M = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OP_i} = \overrightarrow{OC}\, M$$

$$\boxed{\overrightarrow{OC} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OP_i}}{M}}$$

العلاقة المعرّفة لمركز العطالة

بالمطابقة :

$$\overrightarrow{OC} = X(C)\,\vec{e_x} + Y(C)\,\vec{e_y} + Z(C)\,\vec{e_z}$$

$$\overrightarrow{OP_i} = X(P_i)\,\vec{e_x} + Y(P_i)\,\vec{e_y} + Z(P_i)\,\vec{e_z}$$

$$X(C) = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i X(P_i)}{M}$$

$$Y(C) = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i Y(P_i)}{M}$$



$$Z(C) = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i Z(P_i)}{M}$$



سؤال امتحاني :

استنتج احداثيات مركز العطالة .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

ملاحظات :

1. في حالة الأجسام الصلبة (المجموعات المادية المستمرة) فإنَّ المجاميع في القوانين السابقة تؤول إلى تكاملات أحاديّة أو ثنائيّة أو ثلاثيّة حسب طبيعة الجسم (منحني (أحادي) ـ سطح (ثنائي) ـ فراغ (ثلاثي))

2. إذا كان الجسم الصلب له مركز تناظر أو محور تناظر أو مستوي تناظر فإنَّ مركز الكتلة يقع عليه .

على سبيل المثال : إذا كان الجسم عبارة عن قرص دائري فإنَّ مركز الكتلة هو مركز القرص .

وإذا كان الجسم عبارة عن صفيحة مربعة الشكل فإنَّ مركز الكتلة هو نقطة تقاطع القطرين .

عملياً :

- المنحني (التكامل الأحادي) :

$$X(C) = \frac{\int x\rho\, ds}{\int \rho\, ds} = \frac{\int x\, ds}{\int ds}$$

حيث أنَّ :

X : المجهول الذي نريد مكاملته .

ρ : الكثافة أو مايُعرف بالكتلة النوعيّة وهي مقدار ثابت دوماً ويتعلق بشكل الجسم .

$$\rho = \frac{\text{الكتلة}}{\text{الطول}}$$



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

ds : هو العنصر التفاضلي للطول واختياره حسب المسألة .

$$\bar{y}(c) = \frac{\int y\,\rho\,ds}{\int \rho\,ds} = \frac{\int y\,ds}{\int ds}$$

$$\bar{z}(c) = \frac{\int z\,\rho\,ds}{\int \rho\,ds} = \frac{\int z\,ds}{\int ds}$$

- السطح (التكامل الثنائي) :

$$\bar{x}(c) = \frac{\iint x\,d\sigma}{\iint d\sigma} \quad , \quad \bar{y}(c) = \frac{\iint y\,d\sigma}{\iint d\sigma} \quad , \quad \bar{z}(c) = \frac{\iint z\,d\sigma}{\iint d\sigma}$$

حيث أنَّ $d\sigma$ هو العنصر التفاضلي للسطح واختياره حسب المسائل .

- الحجم - الفراغ (التكامل الثلاثي) :

$$\bar{x}(c) = \frac{\iiint x\,dv}{\iiint dv} \quad , \quad \bar{y}(c) = \frac{\iiint y\,dv}{\iiint dv} \quad , \quad \bar{z}(c) = \frac{\iiint z\,dv}{\iiint dv}$$

حيث dv العنصر التفاضلي للحجم .





الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

العناصر التفاضليّة في الاحداثيات المختلفة :

1 عنصر الطول :

1 في الاحداثيات الديكارتيّة :

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

2 في الاحداثيات القطبيّة :

$$ds = \sqrt{r^2 (d\theta)^2 + (dr)^2}$$

2 عنصر السطح (المساحة) :

1 في الاحداثيات الديكارتيّة : $d\alpha = dx\,dy$

2 في الاحداثيات القطبيّة : $d\alpha = r\,dr.d\theta$

3 عنصر الحجم :

1 في الاحداثيات الديكارتيّة : $dv = dx.dy.dz$

2 في الاحداثيات الاسطوانيّة : $dv = r\,dr\,d\theta\,dz$

3 في الاحداثيات الكرويّة : $dV = r^2 \sin\varphi\, dr.d\theta.d\varphi$

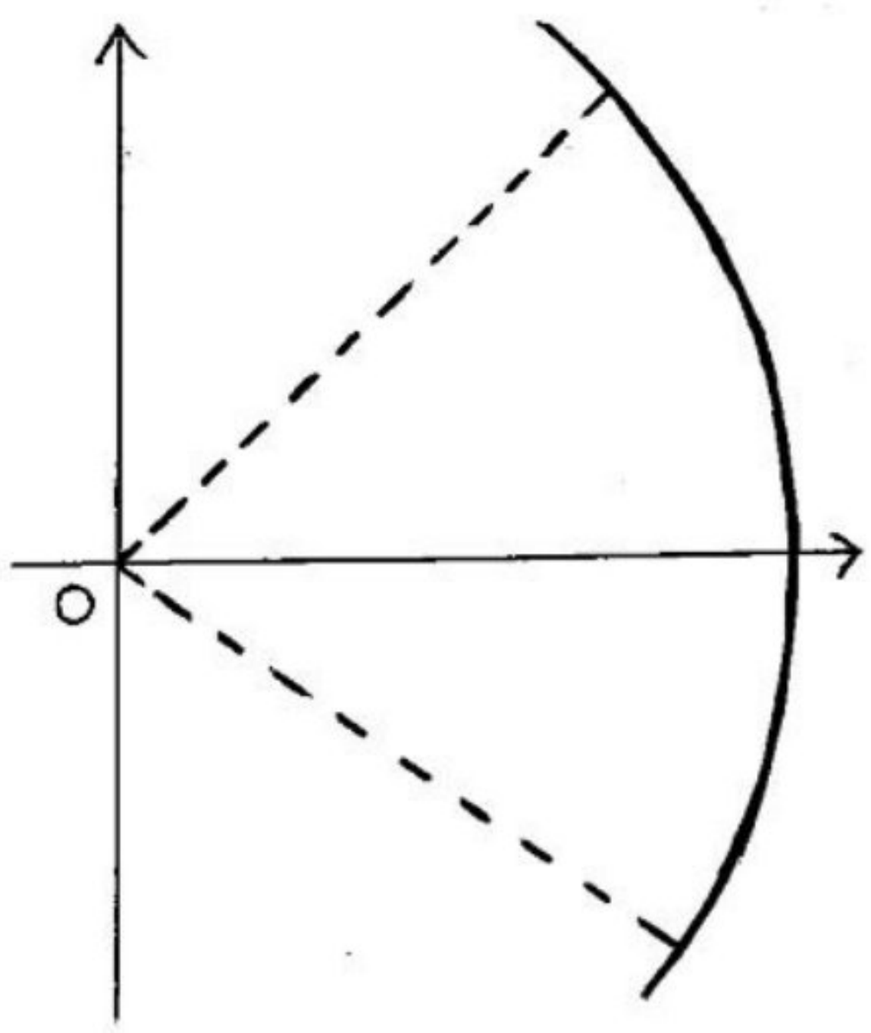
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

مسألة :

أوجد مركز كتل (مركز عطالة) لقوس دائري (سلك) متجانس نصف قطره a وزاويته المركزيّة 2α .

الحل: نعتبر $o\chi$ مركز تناظر القوس الدائري وبالتالي فإنّ مركز العطالة يقع عليه ، ومنه : $y(c) = z(c) = 0$



$$x(c) = \frac{\int x\, ds}{\int ds}$$

لنختار العنصر التفاضلي في الإحداثيات القطبيّة (عنصر الطول) :

$$ds = \sqrt{r^2 (d\theta)^2 + (dr)^2}$$

$$r = a \Rightarrow dr = 0$$

$$\theta = [-\alpha, \alpha]$$

بالاسقاط نجد أنّ :

$$x = r\cos\theta = a\cos\theta$$

$$x(c) = \frac{\int_{-\alpha}^{+\alpha} a\cos\theta\, a\, d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} a\, d\theta} \quad ; ds = \sqrt{a^2 (d\theta)^2 + 0} = a\, d\theta$$

$$x(c) = \frac{a^2 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos\theta\, d\theta}{a \int_{-\alpha}^{+\alpha} d\theta} = \frac{a[\sin\theta]_{-\alpha}^{+\alpha}}{2\alpha} = \frac{2a\sin\alpha}{2\alpha}$$

$$= \frac{a\sin\alpha}{\alpha}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

● في حالة خاصة إذا كان السلك في التمرين السابق نصف دائرة .

$$2\alpha = \pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\left(\frac{a.1}{\frac{\pi}{2}} , 0 , 0 \right) = \left(\frac{2a}{\pi} , 0 , 0 \right)$$

● إذا كان السلك في التمرين السابق دائرة .

$$2\alpha = 2\pi \Rightarrow \alpha = \pi$$

$$(0 , 0 , 0)$$

تمرين : دورة

أوجد مركز كتل نصف كرة صماء (متجانسة) متجانسة نصف قطرها R

الحل:

نأخذ جملة محاور احداثيّة يكون فيها oz هو محور التناظر لنصف الكرة المعطاة وبالتالي فإنّ مركز العطالة يقع عليه .

$$x(c) = y(c) = 0$$

للانتقال من الاحداثيات الديكارتيّة إلى الاحداثيات الكرويّة :

$$x = r \cos\theta \sin\varphi$$

$$y = r \sin\theta \sin\varphi$$

$$z = r \cos\varphi$$

$$dv = r^2 \sin\varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi$$



حيث أنّ :

$$r : 0 \longrightarrow R \;,\; \theta : 0 \longrightarrow 2\pi \;,\; \varphi : 0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$Z(c) = \frac{\iiint z\, dV}{\iiint dV}$$

$$Z(c) = \frac{\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos\varphi \cdot r^2 \sin\varphi \, dr\, d\theta\, d\varphi}{\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin\varphi \, dr\, d\theta\, d\varphi}$$

$$Z(c) = \frac{\int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi \, d\varphi}{\int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \, d\varphi}$$

$$Z(c) = \frac{\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R \cdot [\theta]_0^{\pi} \cdot \left[\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}{\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R \cdot [\theta]_0^{2\pi} \cdot [-\cos\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}}}$$

$$Z(c) = \frac{\frac{R^4}{4} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2}[1-0]}{\frac{R^3}{3} \cdot 2\pi \cdot 1} = \frac{\frac{R^4}{8}}{\frac{R^3}{3}} = \frac{3R}{8}$$

الاحداثيات : $\left(0, 0, \frac{3R}{8}\right)$

ثانياً : عزوم العطالة :

يعرف عزم العطالة لنقطة مادية M بالنسبة للنقطة O بأنه جداء كتلة هذه النقطة بمربع بُعدها عن O ونرمز لذلك بالرمز : $I_O(M) = mr^2$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حيث : m هي كتلة النقطة M .

r هو بُعد M عن o .

ومنه عزم العطالة للمجموعة الماديّة (S) بالنسبة لـ o هو :

$$I_o(S) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^2$$

ملاحظة : في حالة الأجسام الصلبة فإنّ المجموع يُقلب إلى تكامل (أحادي - ثنائي - ثلاثي) .

- عزم العطالة بالنسبة للمحاور الإحداثيّة :

عزم العطالة بالنسبة لـ ox $\quad I_x = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(y_i^2 + z_i^2\right)$

عزم العطالة بالنسبة لـ oy $\quad I_y = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i^2 + z_i^2\right)$

عزم العطالة بالنسبة لـ oz $\quad I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right)$

- عزم العطالة بالنسبة للمستويات الإحداثيّة :

عزم العطالة للمستوي oxy $\quad I_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2$

عزم العطالة للمستوي oxz $\quad I_{xz} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

عزم العطالة للمستوي oyz $I_{yz} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2$

- عزم العطالة بالنسبة لمبدأ الاحداثيات :

$$I_o = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

- العلاقات بين عزوم العطالة :

* $I_x = I_{xy} + I_{xz}$

* $I_y = I_{xy} + I_{yz}$

* $I_z = I_{xz} + I_{yz}$

* $I_{xy} = \frac{1}{2}(I_x + I_y - I_z)$

* $I_{xz} = \frac{1}{2}(I_x + I_z - I_y)$

* $I_{yz} = \frac{1}{2}(I_y + I_z - I_x)$

* $I_o = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz}$

* $I_o = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z)$



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

ثالثاً: جداءات العطالة :

تعرف جداءات العطالة بالنسبة للمستويات الاحداثيّة بالعلاقات :

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i$$

$$J_{xz} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i$$

$$J_{yz} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i$$

ملاحظات :

1. إذا كان الجسم متناظراً بالنسبة لأحد المستويات الاحداثية (وليكن oxy) فإنّ جداءات العطالة التي تحتوي على x أو y تكون معدومة .

2. إذا كان الجسم متناظراً بالنسبة لأحد المحاور الاحداثيّة (وليكن ox) فإنّ جداءات العطالة التي تحتوي على x تكون معدومة

3. عندما تنطبق المحاور الاحداثية على محاور تناظر الجسم فإنّ جداءات العطالة تكون معدومة وتسمى جملة المقارنة في هذه الحالة بجملة عطالة أساسيّة .



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تنسور العطالة :

هو عبارة عن مصفوفة تحتوي على عزوم عطالة وجداءات عطالة ويُعرف بالشكل الآتي :

$$T_o^S = \begin{bmatrix} I_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & I_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & I_z \end{bmatrix}$$

وهو يُكتب بشكل آخر :

$$T_o^S = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}$$

حالة خاصة :

إذا كانت محاور جملة العطالة هي محاور تناظر فإنّ جداءات العطالة تكون معدومة ويأخذ التنسور الشكل :

$$T_o^S = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

ويسمى تنسور العطالة المركزي .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

مجسم العطالة الناقصي :

هو مجسم معادلته تعطى بالعلاقة :

$$Ax^2 + By^2 + cz^2 - 2[Dyz + Exz + Fxy] = 1$$

- في حالة تنسور العطالة المركزي :

$$Ax^2 + By^2 + cz^2 = 1$$

تعريف :

عزم عطالة جسم بالنسبة للمحور $\Delta(o, \vec{u})$:

عزم العطالة بالنسبة للمحور Δ المار من o وشعاع واحدته $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ يعطى بالعلاقة :

$$I_\Delta = A\alpha^2 + B\beta^2 + c\gamma^2 - 2[DB\gamma + E\alpha\gamma + F\alpha B]$$

نظريّة هوجنز : (نظرية المحاور المتوازية) :

أولاً : عزم العطالة بالنسبة لنقطة p : $I_p = I_o + Md^2$

I_p : عزم العطالة بالنسبة لـ p .

I_o : عزم العطالة بالنسبة لـ o

M : الكتلة

d : البعد بين p و o

ثانياً : عزم العطالة بالنسبة لمحور Δ : $I_\Delta = I_{\Delta_o} + Md^2$

I_Δ : عزم العطالة بالنسبة لـ Δ

I_{Δ_o} : عزم العطالة بالنسبة لمحور مار من o ويوازي Δ

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

ثالثاً : عزم العطالة بالنسبة لمستوي π : $I_\pi = I_{\pi_0} + Md^2$

I_π : عزم العطالة بالنسبة لمستوي ما .

I_{π_0} : عزم العطالة بالنسبة لمستوي مار من مركز الكتل ويوازي π

d : البعد بين المستويين .

مسألة : أوجد مركز كتل قشرة نصف كروية نصف قطرها R .

الحل :

لنعتبر أنَّ oz هو محور تناظر نصف الكرة و بالتالي مركز الكتل يقع عليه أي أنَّ :

$$Z(c) = \frac{\iint z\,d\omega}{\iint d\omega} \quad \text{و} \quad X(c) = Y(c) = 0$$

لنعتبر الآن أنَّ العنصر التفاضلي هو عبارة عن شريط يقع بين المستويين z و $z + dz$ وبالتالي مساحته هي مساحة مستطيل .

طول المستطيل : $2\pi r = 2\pi R = 2\pi R.\cos\varphi$

عرض المستطيل : $dz = r\cos\varphi\,d\varphi$

وذلك لأنَّ : $z = R.\sin\varphi$

ومنه : $d\omega = dx\,dy$

$= 2\pi R.\cos\varphi\,dz$

$z : o \longrightarrow R$

$$Z(c) = \frac{\int_o^R z.2\pi R\,dz}{\int_o^R 2\pi R.dz} = \frac{\left[\frac{z^2}{2}\right]_o^R}{R} = \frac{\frac{R^2}{2}}{R} = \frac{R}{2}$$

$$\left(o, o, \frac{R}{2}\right)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

مسألة : أوجد تنسور العطالة المركزي ومجسم العطالة المركزي لصفيحة دائريّة نصف قطرها R وكتلتها M .

ثم أوجد عزم عطالة الصفيحة بالنسبة لنقطة من محيطها وبالنسبة لمحور مماس لها .

الحل :

نأخذ جملة محاور مركزها مركز الصفيحة و محاورها تنطبق على محاور تناظر الصفيحة .

أي أنَّ الجملة هي جملة عطالة أساسيّة (جداءات العطالة فيها معدومة)

$$I_x = \rho \iint (y^2 + z^2)\, d\omega$$

نلاحظ أنَّ $z = 0$ كون الجسم الصلب الذي نتعامل معه هو صفيحة تقع في المستوي oxy .

$$I_x = \rho \iint y^2\, d\omega$$

بالاعتماد على الاحداثيات القطبية حيث :

$$r : 0 \longrightarrow R \quad , \quad \theta = 0 \longrightarrow 2\pi \quad , \quad d\omega = r\, dr\, d\theta$$

$$\rho = \frac{M}{\pi R^2}$$

ومنه نجد :

$$I_x = \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2\theta \cdot r\, dr\, d\theta$$

$$= \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R r^3\, dr \int_0^{2\pi} \sin^2\theta\, d\theta$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

$$= \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta$$

$$= \frac{M}{\pi R^2} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{M}{\pi R^2} \left(\frac{R^4}{4}\right)(\pi) = \frac{MR^2}{4}$$

ومنه : $I_x = I_y = \frac{MR^2}{4}$ بسبب التناظر .

$$I_z = \rho \iint (x^2 + y^2)\, d\alpha$$

$$= \rho \iint x^2\, d\alpha + \rho \iint y^2\, d\alpha$$

$$= I_x + I_y$$

$$= \frac{MR^2}{4} + \frac{MR^2}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

$$\overline{\overline{I_o}}^{(S)} = \begin{bmatrix} \frac{MR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{MR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{bmatrix}$$

مجسم العطالة المركزي يعطى بالمعادلة : $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$

وبما أنّ الجسم هو عبارة عن صفيحة (ثنائية البعد) فإنّ المعادلة السابقة نأخذ الشكل :

18 $Ax^2 + By^2 = 1 \Rightarrow \frac{MR^2}{4}(x^2+y^2) = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{4}{MR^2}$

وهي معادلة دائرة .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

حسب نظرية هوجنز :

$$I_p = I_o + Md^2$$

$$I_o = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z) = \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{4} + \frac{MR^2}{4} + \frac{MR^2}{2}\right) = \frac{MR^2}{2}$$

$$\Rightarrow I_p = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

حسب نظرية هوجنز :

$$I_\Delta = I_x + Md^2 = \frac{MR^2}{4} + MR^2 = \frac{5}{4}MR^2$$

الفصل الثاني

حركات الجسم الصلب

تعريف علم الحركة :

هو فرع من فروع الميكانيك يهتم بالدراسة الهندسيّة لحركة نقطة أو مجموعة نقاط ماديّة بغض النظر عن مسببات الحركة .

النقطة الماديّة : هي جسم مادي مهمل الأبعاد (الطول ـ العرض ـ الارتفاع) وعند دراسة الحركة والتوازن ندرسها كنقطة هندسيّة لا أبعاد لها .

الجسم الصلب : (المجموعة الماديّة المتماسكة)

هو مجموعة نقاط ماديّة تحافظ على الأبعاد المتبادلة فيما بينها مع تغيّر الزمن .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ملاحظة : فيزيائياً أو على أرض الواقع لا يوجد جسم صلب -لحقق التعريف الرياضي السابق وذلك لأنه عند خضوع الجسم الصلب لأي قوة فإنّ نقاطه ستباعد أو تتقارب فيما بينها . ولكن يمكن التعامل مع كثير من الأجسام على أنها أجسام صلبة وذلك بعد إهمال التغيّرات الصغيرة جداً التي تطرأ على الأبعاد المتبادلة بين نقاط المجموعة .

تعيين موضع الجسم الصلب :

لتعيين موضع جسم صلب -جب أن نعيّن موضع كل نقطة من نقاطه في لحظة زمنيّة ما بالنسبة لجملة احداثيات معيّنة ، ولكن إذا كان عدد النقاط غير منته (أو هوى الجسم على عدد كبير من النقاط فإنه يتعذر علينا إيجاد موضع كل نقطة منه ، لذلك نلجأ إلى التعريف الرياضي للجسم الصلب وذلك بمعرفة موضع ثلاث نقاط من الجسم الصلب غير واقعة على استقامة واحدة (لا يوجد ارتباط خطي بينهما) .

درجات حرية نقاط ماديّة :

هي عدد الوسطاء المستقلة التي تعيّن موضع هذه النقطة أو هي عدد الاتجاهات التي يمكن للنقطة الماديّة أن تتحرك بها .

أمثلة : ① النقطة الطليقة في جملة المحاور الديكارتيّة في الفراغ تتعيّن بثلاث احداثيات ديكارتياً (x, y, z) وبالتالي لها ثلاث درجات حرية

② إذا امتدت النقطة الماديّة على سطح (حذفنا أحد الأبعاد) فيكون للنقطة درجتي حرية .

③ إذا امتدت النقطة على منحني (حذفنا بعدين) فيكون لها درجة حرية واحدة .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

درجات حرية مجموعة مادية :

هي عدد الوسطاء المستقلة التي تعيّن موضع المجموعة الماديّة

عدد درجات الحرية لمجموعة مادية = عدد الوسطاء - عدد علاقات الارتباط

أمثلة :

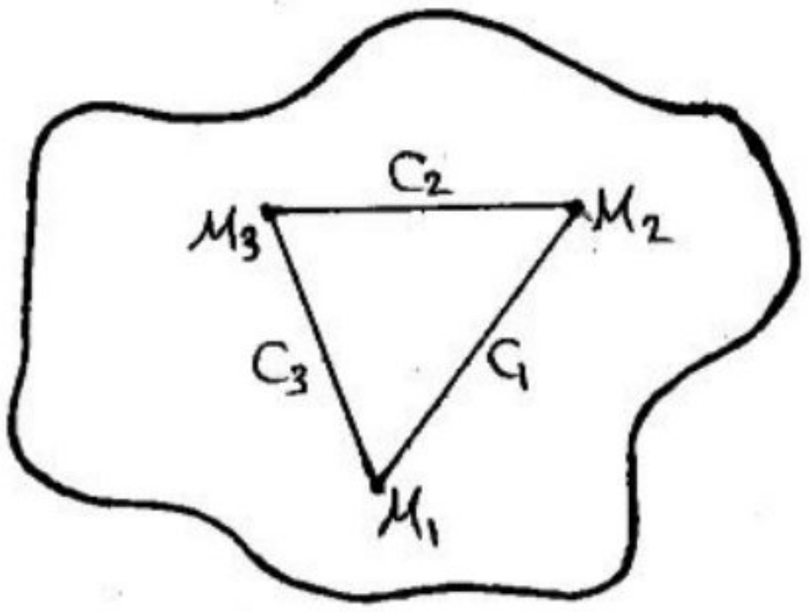
① درجة حرية الجسم الطليق :

إنَّ درجة حرية الجسم الصلب الطليق تتعيّن بمعرفة ثلاث نقاط منه لا تقع على استقامة واحدة .

(لكل نقطة ثلاث مركبات وبالتالي أصبح عدد الوسطاء 9 وسطاء)

لكن يوجد ثلاث علاقات ارتباط بين النقاط (هي علاقات البعد الثابتة بين النقاط الثلاث) وبالتالي :

عدد درجات الحرية = 9 - 3 = 6 درجات حرية .



② درجة حرية جسم ثُبتت فيه نقطة واحدة :

يتم تعيين درجة حرية هذا الجسم بمعرفة نقطتين M_2 , M_3

(لكل نقطة ثلاث مركبات) وبالتالي عدد الوسطاء أصبح 6 وسطاء

عدد درجات الحرية = 6 - 3 = 3

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

(3) درجة حرية جسم صلب ثبت فيه نقطتان M_1 و M_2 :

يتم تعيين درجة حرية هذا الجسم بمعرفة نقطة واحدة ولتكن M_3 (لها ثلاث مركبات) وفي هذه الحالة أصبحت النقاط مرتبطة بعلاقتي ارتباط ، وبالتالي :

عدد درجات الحرية = 3 - 2 = 1

(4) درجة حرية قضيب صلب AB في الفراغ :

يتعيّن القضيب في الفراغ بمعرفة موضع نقطتين منه (كل نقطة في الفراغ لها ثلاث احداثيات) وبالتالي أصبح عدد الوسطاء 6 وسطاء .
ويوجد علاقة ارتباط واحدة (علاقة البعد الثابت بين نقطتين)

عدد درجات الحرية = 6 - 1 = 5 .

(5) درجة حرية قضيب صلب AB في المستوي :

يتعيّن القضيب في المستوي بمعرفة موضع نقطتين منه (لكل نقطة إحداثيتين)
وبالتالي أصبح عدد الوسطاء 4 وسطاء .
ولدينا علاقة ارتباط واحدة .

عدد درجات الحرية = 4 - 1 = 3

(6) درجة حرية قضيبين AB و Bc متصلين والنقطة C تتحرك على منحنٍ في الفراغ :

لدينا في هذه الحالة ثلاث نقاط في الفراغ وبالتالي عدد الوسطاء 9 وسطاء ، ولدينا علاقتي ارتباط هما :
البعد الثابت بين A & B والبعد الثابت بين B & C

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

و بما أنَّ النقطة C تتحرك على منحنٍ وهو في حقيقة الأمر عبارة عن تقاطع سطحين (كل سطح يمثل علاقة ارتباط)
بالمجمل أصبح لدينا 4 علاقات ارتباط .
درجة الحرية = 9 - 4 = 5 درجات حرية .

(7) درجة حرية قضيب AB يستند على منحنٍ في المستوي :

لدينا في هذه الحالة نقطتين في المستوي وبالتالي عدد الوسطاء 4 وسطاء كلا النقطتين تحققان معادلة المنحني (علاقتي ارتباط) ولدينا علاقة البعد الثابت بين النقطتين وبالتالي :
عدد درجات الحرية = 4 - 3 = 1

الإحداثيات المعممة للجسم الصلب :

نسمي الوسطاء المستقلة التي تعين بشكل وحيد و الكافية لتعيين موضع الجسم الصلب بالإحداثيات المعممة لهذا الجسم .
يتضح من هذا التعريف أنَّ عدد الوسطاء المعممة يساوي إلى عدد درجات الحرية .

ملاحظات :

(1) إذا كان لمجموعة مادية ما n درجة حرية فيكون لها n إحداثي معمم ونرمز لها q_i حيث : $i = 1, 2, \dots, n$

(2) إذا كان الجسم طليقاً فإنَّ عدد الوسطاء المعممة يساوي 6 وسطاء
أما إذا كان مقيّداً فإنَّ $n < 6$

(3) الإحداثيات المعممة يمكن أن تكون ديكارتية أو اسطوانية أو كرويّة .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

• إنّ معادلات حركة مجموعة ماديّة (جسم صلب) هي العلاقات الزمنيّة أي هي العلاقات التي تربط الإحداثيات المعممة بالزمن .

$$q_i = q_i(t) \quad ; \quad i = 1, \dots, n$$

حيث n هي عدد درجات الحريّة .

تعيين موضع الجسم الصلب تحليليّاً :

لهذه الدراسة نختار دوماً جملتي محاور :

1 الجملة الثابتة ويُرمز لها بالرمز : $O_1X_1Y_1Z_1$

وأشعة واحدتها $(\vec{k_1}, \vec{j_1}, \vec{i_1})$ ونختارها جملة احداثيّة متعامدة ومباشرة .

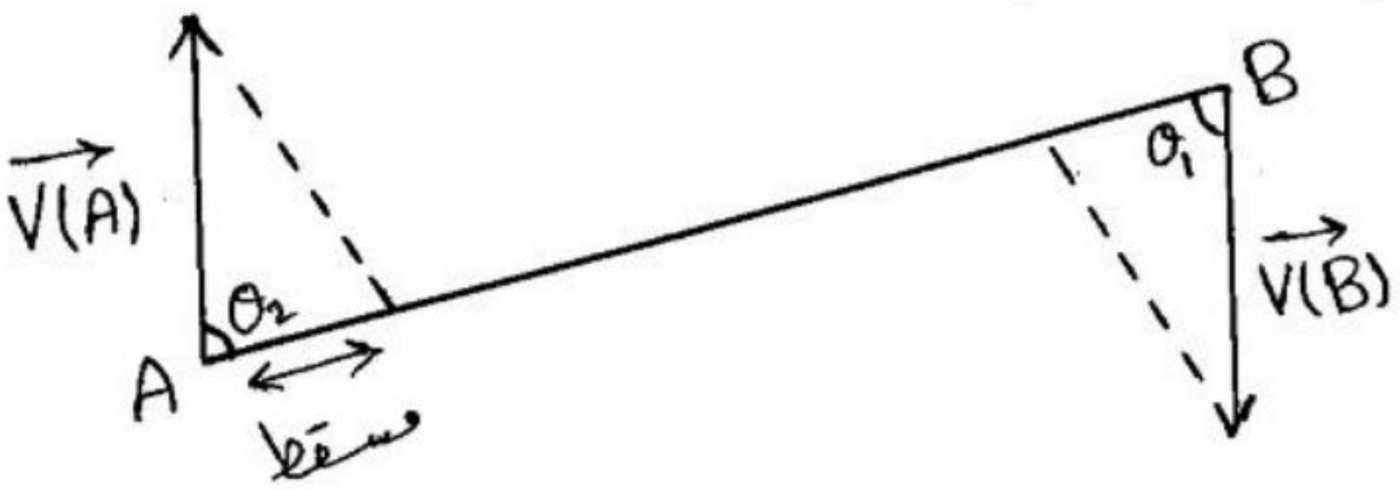
2 الجملة المتحركة (الجملة المتماسكة مع الجسم الصلب) ويُرمز لها : $OXYZ$

وأشعة واحدتها $(\vec{k}, \vec{j}, \vec{i})$ ونختارها جملة محاور احداثية متعامدة .

ملاحظة : يُقال عن الجملة الثانية أنها متحركة لأنها تتحرك بالنسبة للجملة الثابتة ، ويُقال عن متماسكة لأنها متماسكة مع الجسم الصلب .

الخاصة الأساسيّة في حقل سرع الجسم الصلب :

برهنة : الشرط اللازم والكافي كي تتحرك مجموعة ماديّة كمجموعة متماسكة (جسم صلب) هو أن يتساوى مسقطا سرعتي نقطتين ما من هذا الجسم على المستقيم الواصل بين هاتين النقطتين .



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

البرهان: لنفرض أنَّ المجموعة S متماسكة ولنبرهن أنّه :

$$\forall A, B \in S \Rightarrow \vec{V}(A)\Big|_{\vec{AB}} = \vec{V}(B)\Big|_{\vec{AB}}$$

من تعريف الجسم الصلب-يمكننا كتابة علاقة البعد الثابت بين نقطتين A و B بالشكل :

$$|\vec{AB}| = c \iff |\vec{AB}|^2 = c^2$$

$$\iff \vec{AB}^2 = c^2$$

باشتقاق طرفي العلاقة الأخيرة بالنسبة للزمن نجد أنَّ :

$$2\,\vec{AB}\,\frac{d\vec{AB}}{dt} = 0 \iff \vec{AB}\,\frac{d\vec{AB}}{dt} = 0 \iff$$

بالاستفادة من علاقة شال :

$$\vec{AB}\,\frac{d(\vec{O_1B} - \vec{O_1A})}{dt} = 0 \iff \vec{AB}\left(\frac{d\vec{O_1B}}{dt} - \frac{d\vec{O_1A}}{dt}\right) = 0 \iff$$

$$\iff \vec{AB}\,(\vec{V(B)} - \vec{V(A)}) = 0 \iff \vec{AB}\,\vec{V(B)} = \vec{AB}\,\vec{V(A)} \iff$$

$$|\vec{AB}| \cdot |\vec{V(B)}| \cdot \cos(\theta_2) = |\vec{AB}| \cdot |\vec{V(A)}| \cdot \cos(\theta_1) \iff$$

$$\vec{V(B)}\Big|_{\vec{AB}} = \vec{V(A)}\Big|_{\vec{AB}}$$

أي أنَّ مسقط متجه سرعة النقطة B على الشعاع $\vec{AB}$
يساوي إلى مسقط متجه سرعة النقطة A على الشعاع $\vec{AB}$



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

مثال :

لتكن لدينا النقاط A, B, C من مجموعة مادّيّة بحيث أنّ :

$A=(0,0,1)$, $B=(1,1,0)$, $C=(1,2,-1)$

$\overrightarrow{V(A)}=(0,1,2)$, $\overrightarrow{V(B)}=(0,0,1)$, $\overrightarrow{V(C)}=(-1,1,1)$

هل المجموعة التي أُخذت منها هذه النقاط متماسكة (جسم صلب) أم لا ؟ ولماذا ؟

الحل :

$\overrightarrow{AC}=(1,1,-2)$, $\overrightarrow{AB}=(1,1,-1)$, $\overrightarrow{BC}=(0,1,-1)$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{V(A)}\cdot\overrightarrow{AC}=0+2-4=-2\\ \overrightarrow{V(C)}\cdot\overrightarrow{AC}=-1+2-2=-1\end{array}\right\}\Rightarrow -2\neq -1$$

فالمجموعة المعطاة ليست متماسكة (ليست جسم صلب)

مثال :

لتكن لدينا النقاط A, B, C ثلاث نقاط من جسم صلب بحيث يكون مواضع و متجهات سرع هذه النقاط في لحظة t معلومة هي :

$A=(0,0,0)$, $B=(1,1,0)$, $C=(1,1,1)$

$\overrightarrow{V(A)}=(2,1,-3)$, $\overrightarrow{V(B)}=(0,3,-1)$, $\overrightarrow{V(C)}=(-1,2,-1)$

عيّن متجه سرعة النقطة $M_1(1,2,0)$ & $M_2(1,0,1)$

الحل :

$\overrightarrow{AM_1}=(1,2,0)$, $\overrightarrow{BM_1}=(0,1,0)$, $\overrightarrow{CM_1}=(0,1,-1)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\overrightarrow{V(A)}.\overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{V(M_1)}.\overrightarrow{AM_1} \quad [1]$$

$$(2,1,-3)(1,2,0) = (x,y,z)(1,2,0)$$

$$2+2 = x+2y \Rightarrow x+2y = 4$$

$$\overrightarrow{V(B)}.\overrightarrow{BM_1} = \overrightarrow{V(M_1)}.\overrightarrow{BM_1} \quad [2]$$

$$(0,3,-1)(0,1,0) = (x,y,z)(0,1,0)$$

$$\Rightarrow \quad y = 3$$

$$\overrightarrow{V(C)}.\overrightarrow{CM_1} = \overrightarrow{V(M_1)}.\overrightarrow{CM_1} \quad [3]$$

$$(-1,2,-1)(0,1,-1) = (x,y,z)(0,1,-1)$$

$$\Rightarrow \quad 3 = y-z$$

$$\Rightarrow x=-2 \ , \ y=3 \ , \ z=0 \quad \Rightarrow \overrightarrow{V(M_1)} = (-2,3,0)$$

العلاقة الأساسية في حقل سرع الجسم الصلب :

<u>خاصة</u> : إنَّ مشتق متجه متماسك مع الجسم الصلب يساوي إلى الجداء الخارجي لمتجه الدوران بذلك المتجه ، أي :

$$\forall A,B \in S \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$$



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

مبرهنة :

$$\forall A,B \in S \Rightarrow \vec{V(B)} = \vec{V(A)} + \vec{\omega} \wedge \vec{AB}$$

البرهان: نعلم أنَّ :

$$\forall A,B \in S \Rightarrow \frac{d\vec{AB}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{AB}$$

بالاستفادة من علاقة شال نجد :

$$\frac{d(\vec{O_1B} - \vec{O_1A})}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{AB}$$

$$\frac{d\vec{O_1B}}{dt} - \frac{d\vec{O_1A}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{AB}$$

$$\vec{V(B)} - \vec{V(A)} = \vec{\omega} \wedge \vec{AB}$$

$$\Rightarrow \vec{V(B)} = \vec{V(A)} + \vec{\omega} \wedge \vec{AB}$$

وهذه العلاقة تسمى بالعلاقة الأساسيّة في حقل سرع الجسم الصلب أو علاقة تورسور السرع .

- إنَّ حقل تورسور سرع الجسم الصلب تختزل بعنصرين هما :

1. سرعة نقطة من الجسم .
2. متجه الدوران $\vec{\omega}$

ونرمز مثلاً لعنصري اختزال التورسور في النقطة A .

$$\tau(A) = \{ \vec{V(A)} , \vec{\omega} \}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال دورة :

أوجد عنصري اختزال التورسور الحركي في النقطة $D=(5,3,-1)$ لجسم صلب يتعيّن بالنسبة لجملة مقارنة متماسكة معه بالنقاط :

$$A(1,0,0) \quad , \quad B=(0,1,0) \quad , \quad C=(0,0,1)$$

والتي تتعيّن سرعاتها في لحظة زمنيّة معيّنة بالنسبة لنفس جملة المقارنة بالمتجهات :

$$\overrightarrow{V(A)}=(1,-1,1) \quad , \quad \overrightarrow{V(B)}=(-2,-4,4) \quad , \quad \overrightarrow{V(C)}=(3,-5,3)$$

الحل :

$$\overrightarrow{\omega} = p_s \overrightarrow{e_{x_s}} + q_s \overrightarrow{e_{y_s}} + r_s \overrightarrow{e_{z_s}}$$

$$\overrightarrow{V(B)} = \overrightarrow{V(A)} + \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$-2\overrightarrow{e_{x_s}} - 4\overrightarrow{e_{y_s}} + 4\overrightarrow{e_{z_s}} = \overrightarrow{e_{x_s}} - \overrightarrow{e_{y_s}} + \overrightarrow{e_{z_s}} + \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_{x_s}} & \overrightarrow{e_{y_s}} & \overrightarrow{e_{z_s}} \\ p_s & q_s & r_s \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow -3\overrightarrow{e_{x_s}} - 3\overrightarrow{e_{y_s}} + 3\overrightarrow{e_{z_s}} = -r_s\overrightarrow{e_{x_s}} - r_s\overrightarrow{e_{y_s}} + (p_s+q_s)\overrightarrow{e_{z_s}}$$

بالمطابقة :

$$r_s = 3$$

$$p_s + q_s = 3$$

$$\overrightarrow{V(C)} = \overrightarrow{V(A)} + \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{AC}$$

$$3\overrightarrow{e_{x_s}} - 5\overrightarrow{e_{y_s}} + 3\overrightarrow{e_{z_s}} = \overrightarrow{e_{x_s}} - \overrightarrow{e_{y_s}} + \overrightarrow{e_{z_s}} + \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_{x_s}} & \overrightarrow{e_{y_s}} & \overrightarrow{e_{z_s}} \\ p_s & q_s & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

$$2\vec{e}_{x_s} - 4\vec{e}_{y_s} + 2\vec{e}_{z_s} = q_s\vec{e}_{x_s} - (p_s+3)\vec{e}_{y_s} + q_s\vec{e}_{z_s}$$

بالمطابقة :

$$q_s = 2$$

$$p_s + 3 = 4 \Rightarrow p_s = 1$$

$$\vec{w} = \vec{e}_{x_s} + 2\vec{e}_{y_s} + 3\vec{e}_{z_s}$$

$$\vec{V(D)} = \vec{V(A)} + \vec{w} \wedge \vec{AD}$$

$$\vec{V(D)} = \vec{e}_{x_s} - \vec{e}_{y_s} + \vec{e}_{z_s} + \begin{vmatrix} \vec{e}_{x_s} & \vec{e}_{y_s} & \vec{e}_{z_s} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{e}_{x_s} - \vec{e}_{y_s} + \vec{e}_{z_s} - 11\vec{e}_{x_s} + 13\vec{e}_{y_s} - 5\vec{e}_{z_s}$$

$$= -10\vec{e}_{x_s} + 12\vec{e}_{y_s} - 4\vec{e}_{z_s}$$

إذاً عنصري اختزال التورسور في D :

$$\tau = \{ \vec{w}(1,2,3) \quad , \vec{V(D)} = (-10, 12, -4) \}$$



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

تمرين :

أوجد عنصري اختزال التورسور في النقطة $D(5,-1,-2)$ لجسم صلب يتعيّن بالنسبة لجملة مقارنة متماسكة بالنقاط :

$A(-1,1,2)$ ، $B(0,1,-1)$ ، $C(2,1,1)$

والتي تتعين سرعاتها في لحظة زمنيّة معيّنة بالنسبة لنفس جملة المقارنة بالمتجهات:

$\vec{V}(A) = (-1,1,2)$ ، $\vec{V}(B) = (1,3,0)$ ، $\vec{V}(C) = (5,7,-4)$

الحل:

نأخذ نقطة لا على التعيين : $\vec{V}(A) = \vec{V}(B) + \vec{\omega} \wedge \vec{BA}$

حيث : $\vec{\omega} = P_s \vec{e}_{x_s} + q_s \vec{e}_{y_s} + r_s \vec{e}_{z_s}$

$$-\vec{e}_{x_s} + \vec{e}_{y_s} + 2\vec{e}_{z_s} = \vec{e}_{x_s} + 3\vec{e}_{y_s} + \begin{vmatrix} \vec{e}_{x_s} & \vec{e}_{y_s} & \vec{e}_{z_s} \\ P_s & q_s & r_s \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$-2\vec{e}_{x_s} - 2\vec{e}_{y_s} + 2\vec{e}_{z_s} = -q_s\vec{e}_{x_s} + (P_s - r_s)\vec{e}_{y_s} + q_s\vec{e}_{z_s}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -q_s = -2 \\ P_s - r_s = -2 \end{cases}$$

$$\vec{V}(B) = \vec{V}(C) + \vec{\omega} \wedge \vec{CB}$$

$$\vec{e}_{x_s} + 3\vec{e}_{y_s} = 5\vec{e}_{x_s} + 7\vec{e}_{y_s} - 4\vec{e}_{z_s} + \begin{vmatrix} \vec{e}_{x_s} & \vec{e}_{y_s} & \vec{e}_{z_s} \\ P_s & 2 & r_s \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$-4\vec{e}_{x_s} - 4\vec{e}_{y_s} + 4\vec{e}_{z_s} = -4\vec{e}_{x_s} + (2P_s - 2r_s)\vec{e}_{y_s} + 4\vec{e}_{z_s}$$

بالمطابقة نجد :

$$2P_s - 2r_s = -4$$
$$P_s - r_s = -2$$

نفرض :

$$P_s = -2 + r_s$$

$$P_s = 0 \Rightarrow r_s = 2$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = 2\vec{e}_{y_s} + 2\vec{e}_{z_s}$$

لنوجد سرعة النقطة D :

$$\vec{V(D)} = \vec{V(A)} + \vec{\omega} \wedge \vec{AD}$$

$$\vec{V(D)} = -\vec{e}_{x_s} + \vec{e}_{y_s} + 2\vec{e}_{z_s} + \begin{vmatrix} \vec{e}_{x_s} & \vec{e}_{y_s} & \vec{e}_{z_s} \\ 0 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{V(D)} = -\vec{e}_{x_s} + \vec{e}_{y_s} + 2\vec{e}_{z_s} + 4\vec{e}_{x_s} + 12\vec{e}_{y_s} - 12\vec{e}_{z_s}$$

$$\vec{V(D)} = 3\vec{e}_{x_s} + 13\vec{e}_{y_s} - 10\vec{e}_{z_s}$$

الحركة الانسحابيّة :

نقول عن حركة الجسم الصلب أنها حركة انسحابيّة إذا بقي أي متجه من هذا الجسم مساويًا لنفسه أثناء الحركة .

ومن أشهر الأمثلة عن أجسام تتحرك حركة انسحابيّة :
حركة منشار الحديد - حركة المصاعد .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

نتيجة :

إنَّ سرع جميع نقاط الجسم الصلب (الذي يتحرك حركة انسحابيّة) تكون متساوية في كل لحظة وهذه الخاصة هي خاصة مميّزة للحركة الانسحابيّة بمعنى أنه لو حركت أي مجموعة ماديّة وكانت سرع جميع نقاطها متساوية في كل لحظة فإنَّ حركتها تكون حركة انسحابيّة

البرهان:

⇐) لنفرض أنَّ الجسم الصلب (S) يتحرك حركة انسحابيّة

أي أنَّ : $\forall\, o, M \in S \quad ; \quad \overrightarrow{oM} = \overrightarrow{C}$

لإيجاد سرعة النقطة M نقوم بالاشتقاق المباشر بالنسبة للزمن لشعاع موضع الجملة الثابتة أي أنَّ :

$$\overrightarrow{V(M)} = \frac{d(\overrightarrow{o,M})}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{o,o} + \overrightarrow{oM})}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{o,o})}{dt} + \frac{d(\overrightarrow{C})}{dt}$$

$$= \overrightarrow{V(o)} + \overrightarrow{o}$$

$$\overrightarrow{V(M)} = \overrightarrow{V(o)}$$ و منه :

أي أنَّ سرع جميع نقاط الجسم الصلب متساوية في كل لحظة .

⇒) لنفرض أنَّ : $\overrightarrow{V(M)} = \overrightarrow{V(o)}$

$$\frac{d(\overrightarrow{o,M})}{dt} = \frac{d(\overrightarrow{o,o})}{dt}$$

بالمكاملة نجد أنَّ :

$$\overrightarrow{o,M} = \overrightarrow{o,o} + \overrightarrow{C} \Rightarrow \overrightarrow{o,M} - \overrightarrow{o,o} = \overrightarrow{C} \Rightarrow \overrightarrow{o,M} = \overrightarrow{C}$$

و بالتالي فإنَّ منحى الشعاع $\overrightarrow{oM}$ وطويلته ثابتين أي أنَّ الجسم هو جسم صلب يتحرك حركة انسحابيّة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

ملاحظة :

- $o\ x\ y\ z \longrightarrow$ ثابتة
  $o_s\ x_s\ y_s\ z_s \longrightarrow$ متماسكة (متحركة)

- $o_1\ x_1\ y_1\ z_1 \longrightarrow$ ثابتة
  $o\ x\ y\ z \longrightarrow$ متماسكة (متحركة)

إنّ متجه السرعة هو مشتق متجه الموضع بالنسبة للجملة الثابتة

توزع التسارعات :

لإيجاد تسارع النقطة M نقوم بالاشتقاق المباشر بالنسبة للزمن لشعاع سرعة النقطة M بالنسبة للجملة الثابتة .

وجدنا في الفقرة السابقة :

$$\forall o, M \in S \quad ; \quad \vec{V}(M) = \vec{V}(o)$$

باشتقاق هذه العلاقة بالنسبة للزمن نحصل على التسارع .

أي أنّ تسارعات جميع نقاط الجسم الصلب الذي يتحرك حركة انسحابيّة متساوية في كل لحظة .

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(o)$$

بالعكس لنفرض أنّ :

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(o)$$

بالمكاملة :

$$\vec{V}(M) = \vec{V}(o) + \vec{C}$$

بالمكاملة مرة أخرى :

$$\vec{O_1M} = \vec{O_1O} + \vec{C_1}t + \vec{C_2}$$

$$\vec{O_1M} - \vec{O_1O} = \vec{C_1}t + \vec{C_2}$$

$$\Rightarrow \vec{OM} = \vec{C_1}t + C_2$$

العلاقة الأخيرة تدل على أنّ الحركة ليست بالضرورة انسحابيّة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

ملاحظة : إنَّ انعدام الثابت c_1 في العلاقة الأخيرة يعني أنَّ المجموعة الماديّة هي جسم صلب يتحرك حركة انسحابيّة .

تعريف : الحركة المماسيّة للحركة الانسحابيّة :
إذا تساوت سرع جميع نقاط جسم صلب في لحظة واحدة فقط عندئذ نقول أنَّ حركة هذا الجسم هي مماسة في هذه اللحظة لحركة انسحابيّة .
وتكون تسارعات نقاط هذه المجموعة غير متساوية في تلك اللحظة في الحالة العامة .
تُعرف هذه الحركة أيضاً باسم الحركة الانسحابيّة اللحظيّة (الآنية) .

الدراسة التحليليّة للحركة الانسحابيّة للجسم الصلب :

يُقصد بالدراسة التحليليّة اسقاط العلاقات الشعاعيّة على جمل المحاور الاحداثيّة .

① تعيين الموضع :

يعيّن الموضع من خلال العلاقات الآتية :

$$x_1 = x_0(t) + \alpha$$
$$y_1 = y_0(t) + \beta$$
$$z_1 = z_0(t) + \gamma$$

حيث :
(x_0 , y_0 , z_0) هي احداثيات النقطة o من الجسم أي هي الوسطاء المستقلة (عن بعضها) لتعيين موضع أي نقطة من الجسم الصلب المتحرك حركة انسحابيّة وحيث :
$(\alpha , \beta , \gamma)$ هي احداثيات النقطة M بالنسبة للجملة المتماسكة وبالتالي هي مقادير ثابتة .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

② تعيين السرع :

لحساب مركبات متجه سرعة نقطة M تحليلياً بالنسبة للجملة الثابتة يكفي اشتقاق متجه الموضع $\overrightarrow{OM}$ بالنسبة للزمن

$$x_1' = x_0'(t)$$
$$y_1' = y_0'(t) \quad = \vec{V}(M)$$
$$z_1' = z_0'(t)$$

ومنه نجد :

$$\vec{V}(M) = \vec{V}(o)$$

③ تعيين التسارع :

نشتق مباشرة مركبات متجه السرعة للنقطة M فنجد :

$$x_1'' = x_0''(t)$$
$$y_1'' = y_0''(t) \quad = \vec{\Gamma}(M)$$
$$z_1'' = z_0''(t)$$

مثال :

لتكن S اسطوانة تتحرك بحركة انسحابية بحيث أنّ معادلات الحركة لها هي : $x_0 = t$ & $y_0 = t^2$ & $z_0 = 2$

بفرض أنّ M نقطة تتحرك على محيط الاسطوانة S عيّن موضع و مسار وسرعة وتسارع النقطة M .

الحل :

بما أنّ M نقطة على المحيط ، لنفرض أنها تقع في قاعدة الاسطوانة السفلى و بالضبط على المحور ox

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

وبالتالي تكون احداثيات $M(R,0,0)$ حيث R طول نصف قطر الاسطوانة .

ومنه نجد :

$$x_1 = x_0(t) + \alpha = t + R \quad \dots \boxed{1}$$
$$y_1 = y_0(t) + \beta = t^2 + 0 \quad \dots \boxed{2}$$
$$z_1 = z_0(t) + \gamma = 2 + 0 \quad \dots \boxed{3}$$

وهي احداثيات M للجملة الثابتة (متبع الموضع) .

لإيجاد المسار نقوم بحذف الزمن من المعادلات السابقة :

من $\boxed{1}$ نجد أنّ : $t = x_1 - R$

نعوض في $\boxed{2}$: $y_1 = (x_1 - R)^2$

$$z_1 = 2$$

فالمسار يتعيّن بالمعادلات السابقة (يتعيّن بقطع مكافئ)

لإيجاد سرعة النقطة M نقوم بالاشتقاق بالنسبة للزمن :

$$\vec{V}(M) = (1 , 2t , 0)$$

لإيجاد تسارع النقطة M نشتق مركبات شعاع السرعة :

$$\vec{\Gamma}(M) = (0 , 2 , 0)$$

الحركة الدورانيّة للجسم الصلب حول محور ثابت :

هي حركة جسم صلب ثبتت فيه نقطتان ، ندعو المستقيم الواصل بين هاتين النقطتين بمحور الدوران وكمثال على هذه الحركة نستعرض دوران الباب حول محوره .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ملاحظات :

① إنَّ كل نقطة من الجسم الذي يتحرك حركة دورانيّة حول محور ثابت ترسم دائرة مركزها يقع على محور الدوران .

② إنَّ مسارات جميع النقاط للجسم الذي يتحرك حركة دورانيّة حول محور ثابت هي دوائر متوازية تعامد محور الدوران .

③ إذا دارت أي نقطة من الجسم الذي يتحرك حركة دورانيّة حول محور ثابت بزاوية θ فإنَّ جميع نقاط هذا الجسم ستدور بنفس الزاوية .
(أي أنَّ الحركة الدورانية حول محور ثابت لها وسيط واحد فقط هو الزاوية θ)

السرعة الزاوية ω : هي مشتق الزاوية θ بالنسبة للزمن ونرمز لها بالرمز :

$$\omega = \theta' = \frac{d\theta}{dt}$$

شعاع السرعة الزاويّة (الدوران) ($\vec{\omega}$) : هو الشعاع المحمول على محور الدوران وقيمته العدديّة هي السرعة الزاويّة وجهته تكون دوماً بالاتجاه الموجب ونكتب :

$$\vec{\omega} = \omega \vec{u}$$

أو

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e_\Delta}$$

حيث $\vec{u}$ هو شعاع واحدة محور الدوران .

ملاحظات :

- إنَّ طويلة متجه الدوران ليس بالضرورة أن تكون ثابتة في كل لحظة أما جهته فهي ثابتة دوماً .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

- في حال كانت طويلة متجه الدوران ثابتة فعندئذ تسمى هذه الحركة بالحركة الدورانية المنتظمة

التسارع الزاوي α : هو مشتق السرعة الزاويّة بالنسبة للزمن ونكتب :

$$\alpha = \omega' = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

شعاع التسارع الزاوي $\vec{\alpha}$: هو شعاع محمول على محور الدوران وقيمته العدديّة هي التسارع الزاوي ونكتب : $\vec{\alpha} = \alpha \vec{u} \Leftrightarrow \alpha \vec{e_\Delta}$

حيث $\vec{u}$ شعاع واحدة محور الدوران

على الرغم من أنّ شعاعي السرعة الزاوية والتسارع الزاوي محمولان على محور الدوران إلاّ أنه ليس بالضرورة أن يكون لهما نفس الجهة .

ملاحظات :

- إذا كان $\vec{\omega}$ و $\vec{\alpha}$ بنفس الجهة $\Leftrightarrow$ الحركة متسارعة .
- إذا كان $\vec{\omega}$ و $\vec{\alpha}$ بجهتين متعاكستين $\Leftrightarrow$ الحركة متباطئة .
- إذا كان $\vec{\alpha} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow$ الحركة منتظمة $\Leftrightarrow$ ω ثابت
- إذا كان $|\vec{\alpha}|$ ثابت $\Leftrightarrow$ الحركة متغيّرة بانتظام .

الدراسة الشعاعيّة للحركة الدورانية حول محور ثابت :



توزع السرع :

لتكن M نقطة ما من الجسم الصلب S (الذي يتحرك حركة دورانيّة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

حول محور ثابت) فإنَّ مسارها هو عبارة عن دائرة مركزها يقع على محور الدوران ومستوي هذه الدائرة يعامد محور الدوران ، أما طول نصف قطرها فيختلف بحسب بُعد النقطة عن محور الدوران .

إنَّ $\vec{V}(M)$ يعامد $\vec{\omega}$ ($\vec{\omega} \perp \vec{V}(M)$) لأنَّ شعاع السرعة دوماً هو مماس للمسار .

- إنَّ متجه السرعة لنقطة M من جسم S يتحرك حركة دورانية حول محور ثابت تعطى بالعلاقة :

$$\vec{V}(M) = \vec{\omega} \wedge o\vec{M} \quad ; \; o \in \Delta$$

$$\vec{V}(M) = \vec{\omega} \wedge m\vec{M} \quad ;$$ m هو المسقط القائم لـ M على محور الدوران

لأنه وحسب العلاقة الأساسية في حقل سرع الجسم الصلب :

$$\forall m, p \in S \Rightarrow \vec{V}(M) = \vec{V}(P) + \vec{\omega} \wedge \vec{PM}$$

وبما أنَّ o من محور الدوران الثابت فإنَّ :

$$\vec{V}(o) = o$$

توزع التسارعات :

نعلم أنَّ متجه التسارع هو مشتق متجه السرعة بالنسبة للزمن وبالتالي :

$$\forall M \in S \Rightarrow \vec{\Gamma}(M) = \frac{d(\vec{V}(M))}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \wedge o\vec{M})}{dt}$$

$$= \frac{d(\vec{\omega})}{dt} \wedge o\vec{M} + \vec{\omega} \wedge \frac{d(o\vec{M})}{dt}$$

$$= \vec{\varepsilon} \wedge o\vec{M} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}(M)$$

$$= \vec{\varepsilon} \wedge o\vec{M} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge m\vec{M})$$

بالإستفادة من علاقة جبس :

$$= \vec{\varepsilon} \wedge o\vec{M} + \vec{\omega}.(m\vec{M}.\vec{\omega}) - (\vec{\omega}.\vec{\omega})\, m\vec{M}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

وبما أنَّ : $\vec{\omega} \perp m\vec{M}$

$$\boxed{\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge o\vec{M} - \omega^2 . m\vec{M}}$$

من العلاقة الأخيرة ينتج أنَّ التسارع الكلي $\vec{\Gamma}(M)$:

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}_T(M) + \vec{\Gamma}_N(M)$$

حيث :

$\vec{\Gamma}_T(M)$ تسارع مماسي يعطى بالعلاقة : $\vec{\Gamma}_T(M) = \vec{\varepsilon} \wedge o\vec{M}$

$\vec{\Gamma}_N(M)$ تسارع ناظمي يعطى بالعلاقة : $\vec{\Gamma}_N(M) = -\omega^2 . m\vec{M}$

حيث أنَّ التسارع المماسي يوازي شعاع السرعة و التسارع الناظمي محمول على $m\vec{M}$ ويتجه دوماً نحو المركز .

ملاحظة هامة جداً :

إذا كانت السرعة الزاوية ثابتة فإنَّ التسارع الزاوي معدوم ومنه فإنَّ التسارع المماسي معدوم فالتسارع الكلي هو تسارع ناظمي فقط .

مسألة :

تتحرك أسطوانة دائرية نصف قطرها R حول محورها الثابت وفق المعادلة الحركية الآتية :

$$C_P = \alpha . Ln\left(1 + \frac{\omega_0}{\alpha} t\right)$$

حيث :

α , ω_0 ثوابت .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

و المطلوب :

1 تعيين شعاع الدوران و شعاع التسارع الزاوي للجسم .

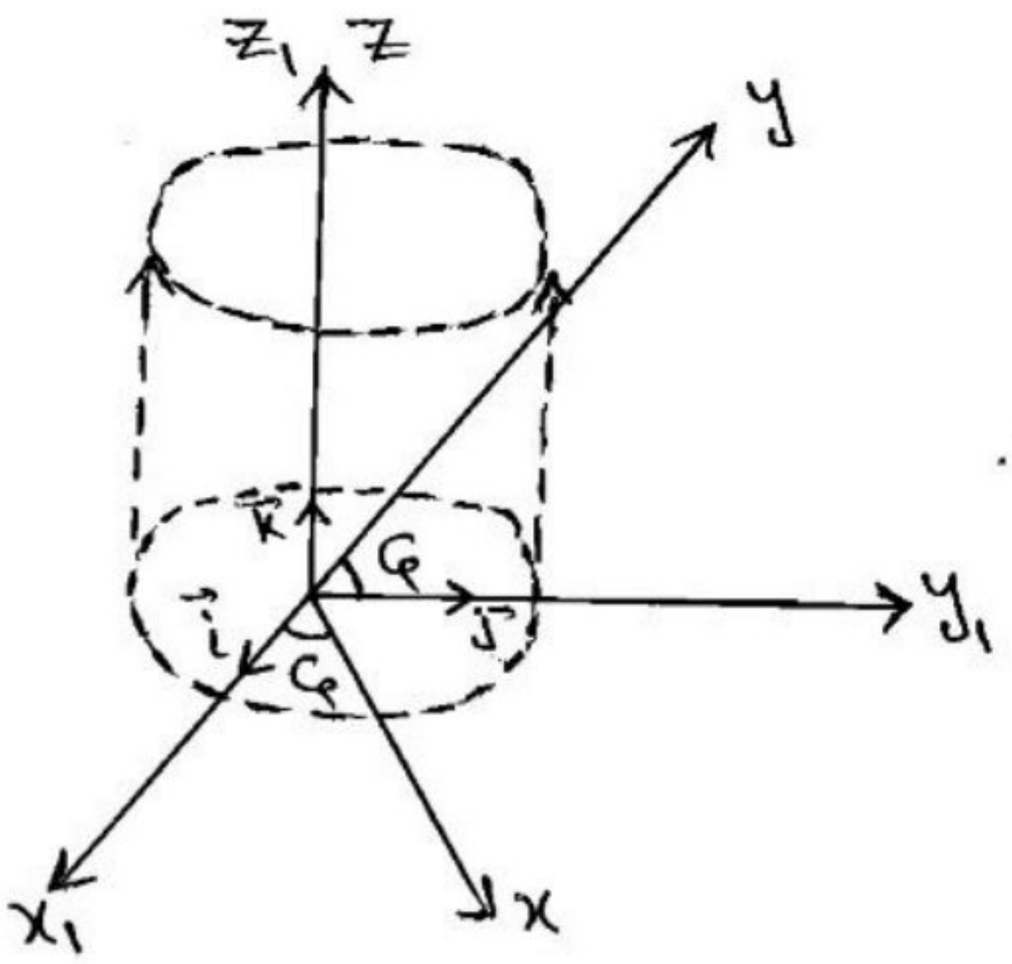
2 تعيين سرعة و تسارع نقطة من الجسم تبعد عن محور الدوران بالمقدار R .

3 تعيين قيمة كل من التسارع المماسي والتسارع الناظمي والتسارع الكلي .

4 تعيين القيمة العدديّة للسرعة والتسارع عندما t تسعى إلى ∞ .

الحل :

① من الواضح أنّ حركة الاسطوانة هي عبارة عن حركة دورانيّة حول محور ثابت .



لنختار جملتين للمحاور الاحداثية :

الأولى : $o_1x_1y_1z_1$ وهي جملة محاور ثابتة وبحيث ينطبق o_1z_1 على محور الاسطوانة .

الثانية : $oxyz$ وهي جملة محاور متماسكة مع الاسطوانة بحيث أنّ oz منطبق على محور الاسطوانة و o منطبق على o_1 .

$$\vec{\omega} = \omega \vec{k_1} = \alpha \frac{\frac{\omega_0}{\alpha}}{1+\frac{\omega_0}{\alpha}t} \vec{k_1} = \frac{\omega_0}{1+\frac{\omega_0}{\alpha}t} \vec{k_1}$$

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon \vec{k_1} = - \frac{\frac{\omega_0^2}{\alpha}}{(1+\frac{\omega_0}{\alpha}t)^2} \vec{k_1}$$

نستنتج أنّ الحركة متباطئة وذلك كون التسارع سالب .

② لنختار النقطة M من القاعدة العلويّة بحيث احداثيات M في الجملة المتماسكة $M(R,o,h)$.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

شعاع السرعة في الجملة المتماسكة :

$$\vec{V}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{oM} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \frac{\omega_0}{1+\frac{\omega_0}{\alpha}t} \\ R & 0 & K \end{vmatrix}$$

$$= +R \frac{\omega_0}{1+\frac{\omega_0}{\alpha}t} \vec{j}$$

شعاع التسارع في الجملة المتماسكة :

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{oM} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}(M)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ R & 0 & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & R\omega & 0 \end{vmatrix}$$

$$= R\varepsilon \vec{j} - \omega^2 R \vec{i}$$

$$= -\left(\frac{\omega_0}{1+\frac{\omega_0}{\alpha}t}\right)^2 R\vec{i} + \frac{\omega_0^2}{\alpha(1+\frac{\omega_0}{\alpha}t)^2} R\vec{j}$$

في الجملة الثابتة :

$$\vec{oM} = R\cos\varphi \vec{i_1} + R\sin\varphi \vec{j_1} + h\vec{k_1}$$

$$\vec{oM} = R\vec{i_1} + 0\vec{j_1} + h\vec{k_1}$$

شعاع السرعة :

$$\vec{V}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{oM} = \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1} \\ 0 & 0 & \omega \\ R\cos\varphi & R\sin\varphi & h \end{vmatrix}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

$$= -R\omega \sin\varphi\, \vec{i}_1 + \omega R \cos\varphi\, \vec{j}_1$$

$$= -R \frac{\omega_0}{1+\frac{\omega_0}{\alpha}t} \sin\varphi\, \vec{i}_1 + R \frac{\omega_0}{1+\frac{\omega_0}{\alpha}t} \cos\varphi\, \vec{j}_1$$

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{oM} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}(M)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ R\cos\varphi & R\sin\varphi & h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ 0 & 0 & \omega \\ -R\omega\sin\varphi & R\omega\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\varepsilon R \sin\varphi\, \vec{i}_1 + R\varepsilon \cos\varphi \vec{j}_1 - \omega^2 R\cos\varphi\, \vec{i}_1 - R\omega^2 \sin\varphi\, \vec{j}_1$$

$$\vec{\Gamma}_T = -\varepsilon R \sin\varphi\, \vec{i}_1 + R\varepsilon \cos\varphi\, \vec{j}_1 \qquad (3)$$

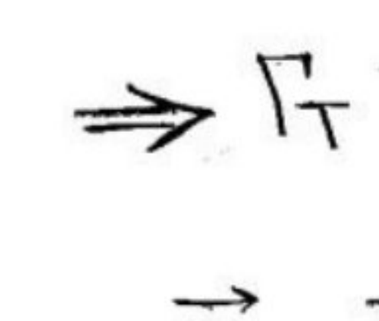
$$\vec{\Gamma}_N = -\omega^2 R \cos\varphi\, \vec{i}_1 - R\omega^2 \sin\varphi\, \vec{j}_1$$

$$\Rightarrow \Gamma_T = \sqrt{R^2\varepsilon^2} = |R\varepsilon| \quad \& \quad \Gamma_N = \sqrt{R^2\omega^2} = |R\omega^2|$$

$$\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_N + \vec{\Gamma}_T \Rightarrow |\vec{\Gamma}| = \sqrt{\Gamma_N^2 + \Gamma_T^2}$$

$$= \sqrt{R^2\omega^4 + R^2\varepsilon^2} = R\sqrt{\omega^4+\varepsilon^2}$$

$$\vec{V}(M) = R \frac{\omega_0}{1+\frac{\omega_0}{\alpha}t} \vec{j} \Rightarrow |\vec{V}(M)| = \left| R \frac{\omega_0}{1+\frac{\omega_0}{\alpha}t} \right| \qquad (4)$$



بجعل t تسعى إلى ∞ فإنّ القيمة العدديّة للسرعة تسعى إلى الصفر

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

$$\vec{\Gamma}(M) = -R\omega^2\vec{i} + R\varepsilon\vec{j} \Rightarrow |\vec{\Gamma}(M)| = \sqrt{R^2\omega^4 + R^2\varepsilon^2}$$

$$= R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$$

بجعل t تسعى إلى ∞ فإنّ القيمة العدديّة للتسارع تسعى إلى الصفر .

مسألة :

يتحرك جسم صلب S بحركة دورانية حول محور ثابت Δ وفقاً للمعادلة الزمنيّة :

$$\theta = 10\ Ln\left(1 + \frac{3}{10}t\right)$$

والمطلوب :

1) عيّن طبيعة الحركة والتسارع الزاوي للجسم الصلب .

2) أوجد سرعة وتسارع نقطة من الجسم تبعد عن محور الدوران Δ مسافة قدرها $5Cm$.

الحل :

لنعتبر بداية أنه لدينا جملة مقارنة ثابتة $o_1x_1y_1z_1$ وجملة مقارنة متماسكة مع الجسم الصلب $oxyz$ بحيث أنّ محور الدوران (الثابت) منطبق على o_1z_1 (oz) وبالتالي :

1)

$$\omega = \theta' = 10\ \frac{\frac{3}{10}}{1+\frac{3}{10}t} = \frac{3}{1+\frac{3}{10}t}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \omega\vec{k} = \frac{\frac{3}{10}}{1+\frac{3}{10}t}\vec{k}$$

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon\vec{k} = \theta''\vec{k}$$

$$= -\frac{\frac{9}{10}}{(1+\frac{3}{10}t)^2}\vec{k} = -\frac{9}{10(1+\frac{3}{10}t)^2}\vec{k}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

2 بما أنَّ المطلوب إيجاد السرعة والتسارع فإننا نقوم بإيجاد القيم العدديّة :

$$|\vec{V}(M)| = \omega R = \frac{3}{1+\frac{3}{10}t} \cdot 5 = \frac{15}{1+\frac{3}{10}t}$$

$$|\vec{\Gamma}(M)| = \left| -\frac{\frac{3}{10} \cdot 15}{(1+\frac{3}{10}t)^2} \right| = \left| \frac{\frac{9}{2}}{(1+\frac{3}{10}t)^2} \right|$$

الحركة اللولبيّة :

■ الحركة اللولبية للجسم الصلب :

هي حركة جسم صلب ينسحب فيه مستقيم حامل D من الجسم على مستقيم ثابت D_1 في الفضاء الثابت بحيث ترسم كل نقطة من نقاط هذا الجسم لولب دائري وتبقى خطى اللولب كلاً متساوية .

● الحركة اللولبيّة وسيطين (مبدأياً) هما :

1- زاوية الدوران θ

2- الانسحاب S

ولكن نعلم أنَّ اللولب الدائري يتميّز بخاصيّة أنَّ النقاط كلاً تنسحب بمقدار يتناسب مع زاوية الدوران أي : $S = b\theta$

وبالتالي أصبح لدينا وسيط واحد للحركة حيث أنَّ :

b : هي الخطوة المختزلة للولب إذا دار الجسم دورة كاملة

فإنَّ الانسحاب S يُرمز له بالرمز B : $B = b.2\pi$

وهو ما يعرف بخطوة اللولب .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمرين :

تدور اسطوانة دائريّة حول محورها بسرعة زاوية ثابتة $w = 2$
وينسحب محورها على حامله بسرعة منتظمة قدرها $V = 6$
والمطلوب :
تعيين الخطوة المختزلة للحركة اللولبيّة للاسطوانة .

الحل :

نعلم أنه في الحركة اللولبية : $S = b\theta$
باشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة للزمن :

$$S' = b\theta' \Rightarrow V = bw \Rightarrow 6 = b \times 2 \Rightarrow b = 3$$

تمرين :

جسم صلب S بشكل برغي قطره 30 m.m وخطوته 6 m.m
يدور بسرعة زاوية ثابتة مقدارها 120 دورة في الدقيقة والمطلوب :
أوجد السرعة الانسحابيّة لهذا البرغي

الحل :

من الواضح أنَّ حركة البرغي هي حركة لولبيّة ونعلم أنَّ : $S = b\theta$
بالاشتقاق بالنسبة للزمن : $V = bw$
لدينا :

$$B = 6 \Rightarrow B = 2\pi b \Rightarrow 6 = 2\pi b \Rightarrow b = \frac{3}{\pi} \text{ m.m}$$

نعلم أنَّ :

$$w = 2\pi f = 2\pi \frac{120}{60} = 4\pi$$

ومنه :

$$V = \frac{3}{\pi} \times 4\pi = 12$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

السرعة الدورانية :

$$U = \omega r = 4\pi \cdot \frac{30}{2} = 60\pi$$

ملاحظة :

(1) في المسائل عندما نعطي السرعة الزاوية علينا الانتباه للواحدة ونميّز حالتين :

a) إذا كانت الواحدة rad/s فهي سرعة زاوية .

b) إذا كانت الواحدة عبارة عن عدد دورات أو هزات في واحدة الزمن فإنها تمثل التواتر .

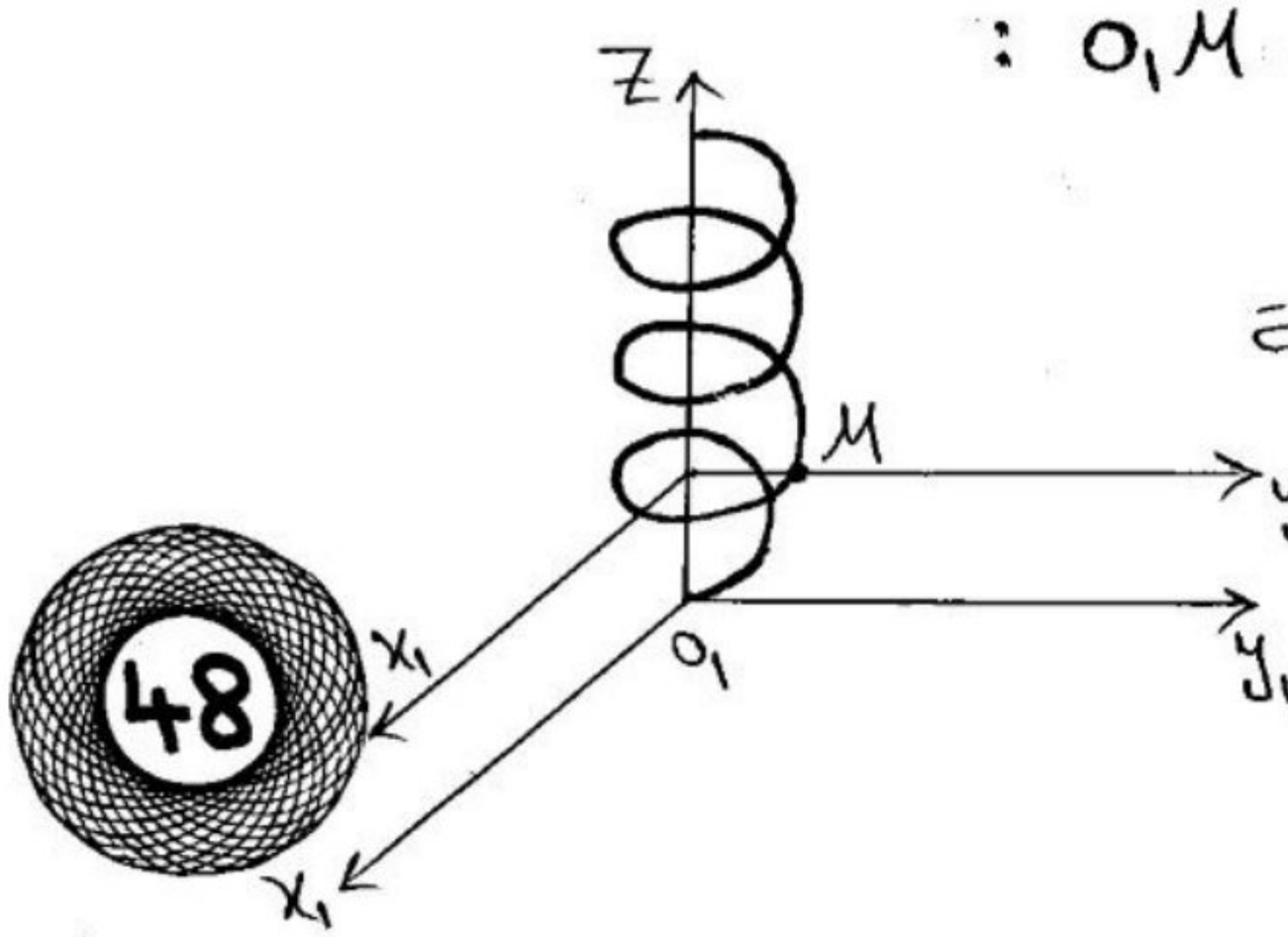
والعلاقة التي تربط السرعة الزاوية بالتواتر هي : $\omega = 2\pi f$

(2) إذا كان المطلوب في المسألة السابقة إيجاد السرعة الدورانية فإننا نطبق القانون : $U = \omega \cdot r$

حيث r تمثل نصف القطر .

■ الدراسة الشعاعيّة للحركة اللولبيّة :

① تعيين موضع نقاط الجسم M : 0,M



نعلم أنه للجسم الذي يتحرك حركة لولبية وسيط واحد .

(درجة حرية واحدة)

و بالتالي للحركة معادلة وحيدة :

$$\theta = \theta(t)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

ويتعيّن موضع النقطة M من الجسم بالعلاقة :

$$\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM}$$
$$= S\vec{k} + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{O_1M} = bo\vec{k} + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$
$$= x\vec{i} + y\vec{j} + (bo + z)\vec{K}$$

② تعيين السرع :

لنسقط النقطة M على المستوي $O_1x_1y_1$ ولنرمز لهذا المسقط بـ m_1
لنسقط M على المحور O_1z_1 ولنرمز لمسقط هذه النقطة بـ m_2
عندئذ سرعة M :

$$\overrightarrow{V(M)} = \overrightarrow{V(m_1)} + \overrightarrow{V(m_2)}$$

وبما أنّ حركة m_1 في المستوي هي حركة دورانية حول محور ثابت (شعاع دورانه $\vec{\omega}$)

$$\overrightarrow{V(m_1)} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

وبما أنّ حركة m_2 على المحور حركة انسحابيّة فسرعتها :

$$\overrightarrow{V(m_2)} = \dot{S}\vec{k}$$

وبالتالي :

$$\overrightarrow{V(M)} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O_1M} + b\omega\vec{k}$$



الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

تعليل :

$$\overrightarrow{V(m_1)} = \vec{V}(o_1) + \vec{\omega} \wedge (\vec{o_1 m})$$

$$\overrightarrow{V(m_1)} = \vec{\omega} \wedge (\vec{o_1 M} + \vec{M m_1})$$

$$= \vec{\omega} \wedge \vec{o_1 M} + \omega \wedge \vec{M m_1}$$

o''

لأنّ : $\vec{\omega} // \vec{M m_1}$

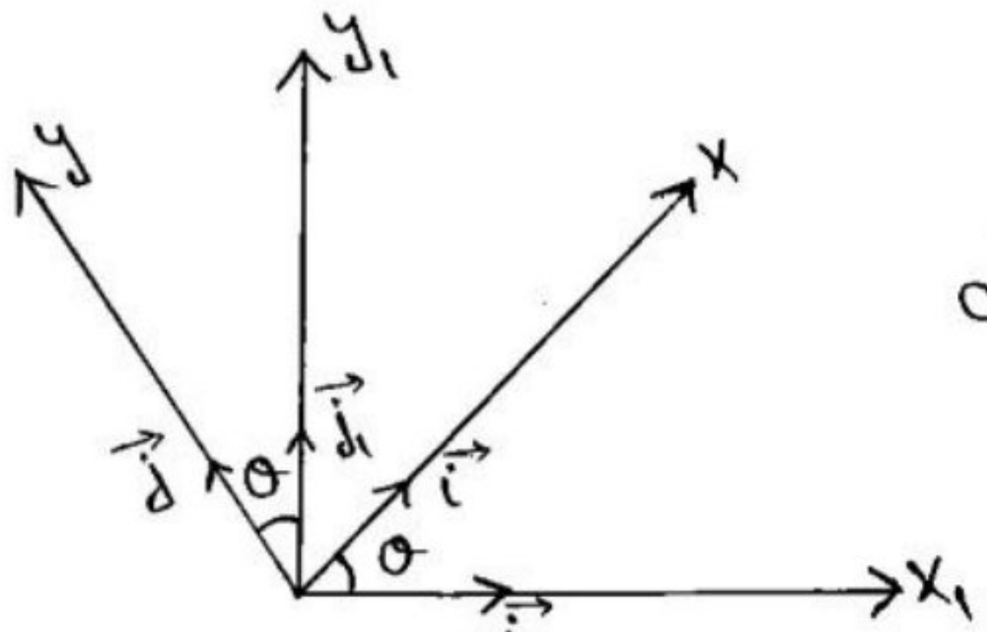
③ تعيين التسارع :

نشتق شعاع سرعة النقطة M بالنسبة للزمن :

$$\overrightarrow{\Gamma(M)} = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{o_1 M} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}(M) + b\ddot{o}\,\vec{K}$$

■ الدراسة التحليليّة للحركة اللولبيّة :

● تعيين احداثيات النقطة M على المحاور الثابتة :



نعلم أنّ :

$$\vec{o_1 M} = x\vec{i} + y\vec{j} + (z + b\theta)\vec{K} \quad \cdots (*)$$

$$x_1 = \vec{o_1 M} \cdot \vec{i_1}$$

$$= (x\vec{i} + y\vec{j} + (z + b\theta)\vec{k}) \cdot \vec{i_1}$$

$$= x\cos\theta + y\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

$$= x\cos\theta - y\sin\theta$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

$$y_1 = \overrightarrow{O_1M} \cdot \overrightarrow{j_1}$$
$$= (x\vec{i} + y\vec{j} + (z+b\theta)\vec{k})\,\vec{j_1}$$
$$= x\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + y\cos\theta$$
$$= x\sin\theta + y\cos\theta$$

$$z_1 = O_1M \cdot k_1$$
$$= (x_1\vec{i} + y\vec{j} + (z+b\theta)\vec{k})\,\vec{k_1}$$
$$= z + b\theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y_1 = x\sin\theta + y\cos\theta \\ z_1 = z + b\theta \end{cases}$$

وهي احداثيات النقطة M على المحاور الثابتة حيث أنّ θ هي الزاوية بين O_1X_1 و OX .

إذا عوّضنا الوسيط θ بـ $\theta(t)$ فنحصل على معادلات حركة النقطة M وبحذف الوسيط t بين معادلات الحركة فإننا نحصل على معادلات مسار النقطة M .

- تعيين سرعة النقطة M :

نعلم أنّ : $\vec{V}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O_1M} + b\theta'\vec{k}$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1} \\ 0 & 0 & \theta' \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} + b\theta'\vec{k_1}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

$$= -y_1\theta'\vec{i_1} + x_1\theta'\vec{j_1} + b\theta'\vec{k_1}$$

في الجملة الثابتة .

$$\vec{V(M)} = -y\theta'\vec{i} + x\theta'\vec{j} + b\theta'k$$

في الجملة المتماسكة .

طريقة ثانية : $\vec{V(M)} = (x_1', y_1', z_1')$

- تعيين تسارع النقطة M :

$$\vec{\Gamma(M)} = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{o_1M} + \vec{\omega} \wedge \vec{V(M)} + b\theta''\vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1} \\ 0 & 0 & \theta'' \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i_1} & \vec{j_1} & \vec{k_1} \\ 0 & 0 & \theta' \\ -y_1\theta' & x_1\theta' & b\theta' \end{vmatrix} + b\theta''\vec{k_1}$$

$$= -y_1\theta''\vec{i_1} + x_1\theta''\vec{j_1} - x_1\theta'^2\vec{i_1} - y_1\theta'^2\vec{j_1} + b\theta''\vec{k_1}$$

$$= (-y\theta'' - x_1\theta'^2)\vec{i_1} + (x_1\theta'' - y_1\theta'^2)\vec{j_1} + b\theta''\vec{k_1}$$

$\vec{\Gamma(M)} = (x_1'', y_1'', z_1'')$

طريقة ثانية :

Mylhero

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

مسألة:

تدور اسطوانة دائريّة حول محورها بسرعة زاوية ثابتة $w = 2$
وينسحب محورها على حامله بسرعة منتظمة قيمتها $V = 6$
و المطلوب :
تعيين موضع و مسار وسرعة وتسارع النقطة M من الاسطوانة
اصدائياتها بالنسبة لجملة محاور متماسكة مع الاسطوانة هي : $M(2,2,3)$

الحل:

$$\overrightarrow{O_1M} = x\vec{i} + y\vec{j} + (z + bo)\vec{k}$$

لدينا :

$$w = 2 \Rightarrow \theta' = 2 \Rightarrow \theta = 2t + c$$

وباختيار شروط بدء مناسبة : $\theta = 2t$

- الموضع في المتماسكة :

$$\overrightarrow{O_1M} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + (3 + 6t)\vec{k}$$

- الموضع في الثابتة :

$$X_1 = x\cos\theta - y\sin\theta$$
$$= 2\cos 2t - 2\sin 2t$$
$$= 2(\cos 2t - \sin t) \quad \ldots (1)$$

$$Y_1 = x\sin\theta + y\cos\theta$$
$$= 2(\sin 2t + \cos 2t) \quad \ldots (2)$$

$$Z_1 = z + bo = 3 + 6t \quad \ldots (3)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner
CamScanner

بالتربيع والجمع لكل من (1) و (2) :

$$x_1^2 + y_1^2 = 4\{\cos^2 2t + \sin^2 2t - 2\cos 2t \sin 2t + \sin^2 2t + 2\sin 2t \cos 2t + \cos^2 2t\}$$

$$\Longrightarrow \quad x_1^2 + y_1^2 = 8 \quad \cdots \circledast$$

والمسار يمثل دائرة مركزها o ونصف قطرها $R = \sqrt{8}$.

من (3) نجد :

$$z_1 = z + b\omega \Rightarrow z_1 = 3 + 6t \Rightarrow t = \frac{z_1 - 3}{6}$$

نعوض في (1) نجد :

$$x_1 = 2\left(\cos\left(\frac{z-3}{3}\right) - \sin\left(\frac{z_1-3}{3}\right)\right) \quad \cdots \circledast\circledast$$

إنَّ كل من $\circledast$ و $\circledast\circledast$ تشكلان معادلتا مسار النقطة M .
(وهو فنٍ لولبي يرتسم على سطح اسطوانة)

● تعيين متجه السرعة في الجملة المتماسكة :

$$\vec{V}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{O_1M} + b\omega' \vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 6\vec{k}$$

$$= -4\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k}$$



● السرعة في الثابتة :

$$\vec{V}(M) = x_1'\vec{i_1} + y_1'\vec{j_1} + z_1'\vec{k_1}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

$$x_1' = 2(-2\sin 2t - 2\cos 2t)$$
$$= -4(\sin 2t - \cos 2t)$$

$$y_1' = 2(2\cos 2t - 2\sin 2t)$$
$$= 4(\cos 2t - \sin 2t)$$

$$z_1' = 6$$

$$\vec{V}(M) = -4(\sin 2t - \cos 2t)\vec{i_1} + 4(\cos 2t - \sin 2t) + 6\vec{k_1}$$

- التسارع في المتماسكة :

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}(M) + b\varepsilon\vec{K}$$

$$\vec{\Gamma}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ -4 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -8\vec{i} + 8\vec{j}$$

- التسارع في الطابقة :

$$x_1'' = -8(\cos 2t - \sin 2t)$$
$$y_1'' = -8(\sin 2t + \cos 2t)$$
$$z_1'' = 0$$

$$\vec{\Gamma}(M) = -8(\cos 2t - \sin 2t)\vec{i_1} - 8(\sin 2t + \cos 2t)\vec{j_1}$$



لإيجاد القيمة العدديّة لمتجه السرعة فإننا يمكن أن نستفيد من الجملة الطابقة أو الجملة المتماسكة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

$$|\vec{V}(M)| = \sqrt{16+16+36} = \sqrt{68}$$

$$|\vec{\Gamma}(M)| = \sqrt{64+64} = \sqrt{128}$$

مسألة :

يتحرك قرص دائري طول نصف قطره a بحركة لولبيّة حول محوره بسرعة زاوية ثابتة مقدارها w_0 علماً أنّ محور القرص ينتقل بمقدار $2w_0$ عندما يتم القرص دورة كاملة والمطلوب :
عيّن مسار وسرعة وتسارع النقطة M من محيط القرص .

الحل :

نختار جملة المحاور بحيث :

جملة محاور ثابتة o,x_1,y_1,z_1 بحيث ينطبق محور القرص oz_1 وجملة محاور متماسكة $oxyz$ بحيث ينطبق محور القرص oz .
ونختار M بحيث تقع على أحد المحاور وليكن ox وفيه : $M(a,o,o)$
بداية لنعيّن الخطوة المختزلة :

$$B = 2\pi \times b$$

$$2w_0 = 2\pi \times b \Longrightarrow b = \frac{w_0}{\pi}$$

$$\theta' = w_0 \Longrightarrow \theta = w_0 t + c$$

وباختيار شروط بدء مناسبة :

$$\theta = w_0 t$$

- لنوجد المسار :

$$x_1 = x\cos\theta - y\sin\theta = a\cos(w_0 t) \quad \ldots (1)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$y_1 = x\sin\theta + y\cos\theta = a\sin(\omega_0 t) \quad \dots (2)$$

$$z_1 = z + b\theta = \frac{\omega_0}{\pi}\omega_0 t = \frac{\omega_0^2}{\pi} t \quad \dots (3)$$

من (1) و (2) نجد :

$$x_1^2 + y_1^2 = a^2 \quad \dots \circledast$$

من (3) نجد :

$$t = \frac{\pi}{\omega_0^2} z_1$$

نعوض في (1) :

$$x_1 = a\cos\left(\frac{\pi}{\omega_0} z_1\right) \quad \dots \circledast\circledast$$

إنّ $\circledast$ و $\circledast\circledast$ تشكلان معادلتا مسار النقطة M .

- السرعة في المتماسكة :

$$\vec{V}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{O_1M} + b\theta' \vec{k}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} + \frac{\omega_0^2}{\pi} \vec{k}$$

$$= a\omega_0 \vec{j} + \frac{\omega_0^2}{\pi} \vec{k}$$

- السرعة في الثابتة :

$$x_1' = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner

$$y_1' = a\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$z_1' = \frac{\omega_0^2}{\pi}$$

$$|\vec{V}(M)| = \sqrt{a^2\omega_0^2 + \frac{\omega_0^4}{\pi^2}}$$

● التسارع في المتماسكة :

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{O_1M} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}(M) + b\varepsilon\vec{K}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{K} \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ 0 & a\omega_0 & \frac{\omega_0^2}{\pi} \end{vmatrix} = -a\omega_0^2 \vec{i}$$

● التسارع في الثابتة :

$$x_1'' = -a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t)$$

$$y_1'' = -a\omega_0^2 \sin(\omega_0 t)$$

$$z_1'' = 0$$

$$|\vec{\Gamma}(M)| = \sqrt{a^2\omega_0^4} = a\omega_0^2$$

الحركة الدورانية للجسم الصلب حول محور ثابت :

تعريف : هي حركة جسم صلب تبقى فيه نقطة واحدة نعلم أنه إذا ثبتت نقطة في جسم صلب فإنّ لهذا الجسم ثلاث درجات حرية وبالتالي يوجد ثلاث معادلات للحركة .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

CamScanner