حركة الجسم الصلب (المحاضرة الأولى)

من حسن اليوسف

فقرة تعريفية:

المتجه / الشعاع: قطعة مستقيمة موجهة تتعين بعدد من العناصر.

عناصر المتجه:

1- المبدأ / نقطة التأثير: نقطة البداية التي ينطلق منها المتجه.

2- المنحى / الحامل: المستقيم الذي يحمل عليه المتجه أو أي مستقيم آخر يوازيه.

3- الجهة: يمكن تحديدها عن طريق الزوايا.

4- الطويلة: القيمة المطلقة للمتجه.

- يمكن تمثيل المتجه باستخدام مركباته في جملة محاور إحداثية:

1- جملة المحاور الديكارتية:

$$\vec{V} = \vec{e_x} + \vec{e_y} + \vec{e_z}$$

2- جملة المحاور الاسطوانية:

$$\vec{V} = \vec{e_r} + \vec{e_\theta} + \vec{e_z}$$

3- جملة المحاور الكروية:

$$\vec{V} = \vec{e_r} + \vec{e_\theta} + \vec{e_\varphi}$$

4- جملة المحاور القطبية:

$$\vec{V} = \vec{e_r} + \vec{e_\theta}$$

ملاحظات:

1- للتحويل من الإحداثيات الاسطوانية إلى الإحداثيات الديكارتية نستخدم العلاقات:

$$X = r\cos\theta$$

$$y = y\sin\theta$$

$$z = z$$

2- للتحويل من الإحداثيات الكروية إلى الإحداثيات الديكارتية نستخدم العلاقات:

$$X = r\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi$$

$$y = r\sin\theta\cdot\sin\varphi$$

$$z = r\cdot\cos\varphi$$

3- للتحويل من الإحداثيات القطبية إلى الإحداثيات الديكارتية نستخدم العلاقات:

$$X = r\cdot\cos\theta$$

$$y = r\cdot\sin\theta$$

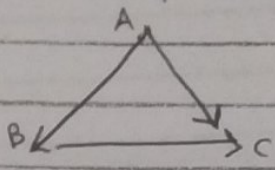
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الشعاع الصفري: هو شعاع طوله يساوي الصفر ونرمز له بالرمز $\vec{0}$.

عمليات على الأشعة:

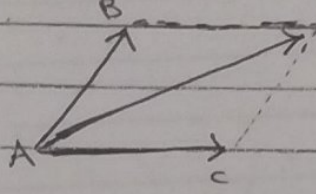
جمع الأشعة:

1- إذا كان الشعاعان متتاليين نجمع الشعاعين حسب علاقة شال.



$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

2- إذا كان للشعاعين المبدأ نفسه نجمع الشعاعين حسب قاعدة متوازي الأضلاع.



$$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$$

الجداء الداخلي: الجداء الداخلي لعددين هو عدد.

ليكن لدينا:

$$\vec{oA} = x_A \vec{e_x} + y_A \vec{e_y} + z_A \vec{e_z}$$
$$\vec{oB} = x_B \vec{e_x} + y_B \vec{e_y} + z_B \vec{e_z}$$

$$\vec{oA}.\vec{oB} = x_A.x_B + y_A.y_B + z_A.z_B$$
$$\vec{oA}.\vec{oB} = |\vec{oA}|.|\vec{oB}|.\cos(\vec{oA},\vec{oB})$$

- الجداء الداخلي عملية تبديلية.
- إذا كان الجداء الداخلي لشعاعين معدوم فإن الشعاعين متعامدان.

الجداء الخارجي: الجداء الخارجي لشعاعين هو شعاع عمودي على مستويهما أي عمودي على كل منهما.

$$\vec{oA} \wedge \vec{oB} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \end{vmatrix}$$

$$|\vec{oA} \wedge \vec{oB}| = |\vec{oA}|.|\vec{oB}|.\sin(\vec{oA},\vec{oB})$$

- الجداء الخارجي ليس عملية تبديلية.
- إذا كان الجداء الخارجي لشعاعين معدوم فإن الشعاعين متوازيين.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

العناصر العطالية:

1. مراكز العطالة.
2. عزوم العطالة.
3. جداءات العطالة.

أولاً: المراكز العطالية.

نعرّف مركز عطالة (مركز كتلة) مجموعة مادية (S) المكوّنة من عدد من النقاط المادية

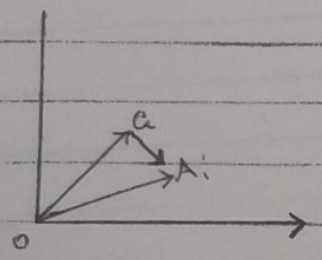
التي مواضعها A_i ; $i = 1, \dots, n$

وكتلها m_i ; $i = 1, \dots, n$

بأنها النقطة التي تحقّق:

$$m_1 \overrightarrow{GA_1} + m_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + m_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$



ولدينا من علاقة شال:

$$\overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA_i}$$

ومنه

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OG}) = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OA_i} - \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OG} = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OG} \sum_{i=1}^{n} m_i = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OG}\, M = \vec{0}$$

حيث أنّ $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ الكتلة الكلية للمجموعة المادية.

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{OG}\, M$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \overrightarrow{OA_i}$$ العلاقة المعرّفة لمركز العطالة

بالمطابقة:

$$\overrightarrow{oG} = x(G)\vec{e}_x + y(G)\vec{e}_y + z(G)\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{oA_i} = x(A_i)\vec{e}_x + y(A_i)\vec{e}_y + z(A_i)\vec{e}_z$$

إحداثيات مركز العطالة:

$$\begin{cases} x(G) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\, x(A_i) \\ y(G) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\, y(A_i) \\ z(G) = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i\, z(A_i) \end{cases}$$

ملاحظات:

1- في حالة أجسام الصلبة (المجموعات المادية المستمرة) فإن المجاميع في القوانين السابقة تؤول إلى تكاملات أحادية أو ثنائية أو ثلاثية وذلك حسب طبيعة الجسم (منحني أو خطي (تكامل أحادي) - سطح (تكامل ثنائي) - فراغ (تكامل ثلاثي)).

2- إذا كان الجسم الصلب له مركز تناظر أو محور تناظر أو مستوي تناظر فإن مركز العطالة يقع عليه.

على سبيل المثال: إذا كان الجسم عبارة عن قرص دائري فإن مركز العطالة هو مركز القرص، وإذا كان الجسم عبارة عن صفيحة مربعة الشكل فإن مركز العطالة هو نقطة تقاطع القطرين.

3- يمكن أن يقع مركز العطالة G خارج الجسم الصلب ومع ذلك فهو يبقى نقطة من الجسم الصلب، لأن بُعده عن أي نقطة من الجسم الصلب يبقى ثابتاً أثناء الحركة.

على سبيل المثال: مركز عطالة الطاولة يقع تحتها في الفضاء، ومركز عطالة رصف كرة فارغة يقع داخلها في الفضاء وليس على سطحها.

1- المنحني (الكامل الأمادي): أي يكون الجسم خطّي مثل سلك نحيف

$$X(G) = \frac{1}{M} \cdot \lambda \int X \, dl$$

$$Y(G) = \frac{1}{M} \cdot \lambda \int Y \, dl$$

$$Z(G) = \frac{1}{M} \cdot \lambda \int Z \, dl$$

حيث أنّ:

M : الكتلة الكلية للجسم.

X, Y, Z : الإحداثيات التي نريد مركزها.

λ : الكثافة الخطية وهي مقدار ثابت دوماً. (نستخدمها عندما يكون الجسم خطّي مثل سلك نحيف).

$$\lambda = \frac{\text{الكتلة } M}{\text{الطول } L}$$

dl : العنصر التفاضلي للطول واختياره حسب المسألة.

- في الإحداثيات الديكارتية: $dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$

- في الإحداثيات القطبية: $dl = \sqrt{r^2 (d\theta)^2 + (dr)^2}$

2- السطح (الكامل الثنائي):

$$X(G) = \frac{1}{M} \sigma \iint X \, ds$$

$$Y(G) = \frac{1}{M} \sigma \iint Y \, ds$$

$$Z(G) = \frac{1}{M} \sigma \iint Z \, ds$$

حيث أنّ:

σ : الكثافة السطحية وهي مقدار ثابت دوماً. (نستخدمها عندما يكون الجسم سطحي مثل قرص رقيق أو أطواق رقيقة فارغة).

$$\sigma = \frac{\text{الكتلة } M}{\text{المساحة } S}$$

ds : العنصر التفاضلي للمساحة واختياره حسب المسألة.

- في الإحداثيات الديكارتية: $ds = dx \cdot dy$

- في الإحداثيات القطبية: $ds = r \, dr \cdot d\theta$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

3- الحجم (التكامل الثلاثي):

$$x(G) = \frac{1}{M} \rho \iiint x \, dv$$

$$y(G) = \frac{1}{M} \rho \iiint y \, dv$$

$$z(G) = \frac{1}{M} \rho \iiint z \, dv$$

حيث أنّ:

ρ : الكثافة الحجميّة وهي مقدار ثابت دوماً (نستخدمها عندما يكون الجسم ثلاثي الأبعاد مثل كرة ممتلئة أو اسطوانة ممتلئة).

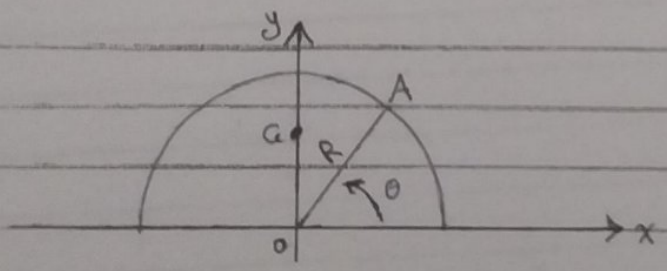
$$\rho = \frac{M}{V} \quad \begin{matrix} \text{الكتلة} \\ \text{الحجم} \end{matrix}$$

dv : العنصر التفاضلي للحجم واختياره حسب المسألة:

- في الإحداثيات الديكارتية: $dv = dx \cdot dy \cdot dz$
- في الإحداثيات الاسطوانية: $dv = r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz$
- في الإحداثيات الكروية: $dv = r^2 \cdot \sin\varphi \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi$

مسألة 1:

حدّد مركز عطالة (مركز كتلة) نصف حلقة مركزها o ونصف قطرها R كما في الشكل الآتي:



الحل:

لدينا نصف حلقة أي جسم صلب خطّي وبالتالي الكثافة خطّية/طولية

$$\lambda = \frac{M}{L} = \frac{M}{\pi R}$$

نلاحظ أيضاً أنّ المحور oy هو محور تناظر للجسم المدروس لذا فإنّ مركز عطالة الجسم واقع على المحور oy وبالتالي:

$$x(G) = 0$$

$$z(G) = 0$$

$$y(G) = \frac{1}{M} \lambda \int_0^{\pi} y \, dl$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حيث أنّ:

$$y = R.\sin\theta$$

$$\lambda = \frac{M}{\pi R}$$

$$dl = \sqrt{r^2(d\theta)^2 + (dr)^2} = \sqrt{R^2(d\theta)^2 + 0^2}$$

$$= R.d\theta$$

بالتعويض في العلاقة

$$y(G) = \frac{1}{M} \lambda \int_0^{\pi} y\, dl$$

$$= \frac{1}{M} \cdot \frac{M}{\pi R} \int_0^{\pi} R.\sin\theta . R.d\theta$$

$$= \frac{R}{\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{R}{\pi} [-\cos\theta]_0^{\pi}$$

$$= \frac{R}{\pi} (1 + 1)$$

$$= \frac{2R}{\pi}$$

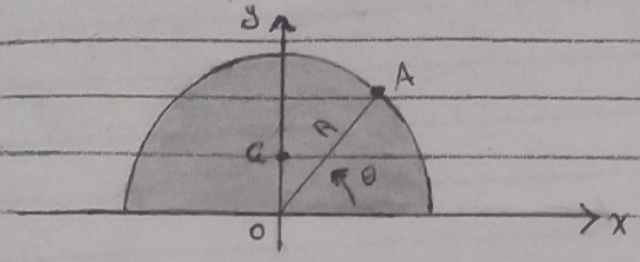
إذاً إحداثيات مركز العطالة $G\left(0, \frac{2R}{\pi}, 0\right)$

نلاحظ أنّ مركز العطالة G لا يقع على نصف الحلقة بل خارجها، وهذا يؤكّد أنّ مركز عطالة الجسم الصلب يمكن أن يقع خارج الجسم ولكن مع ذلك يبقى مركز العطالة محافظاً على مسافات ثابتة بالنسبة لكافّة نقاط الجسم الصلب.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مسألة 2:

حدّد مركز عطالة نصف قرص متجانس مركزه O ونصف قطره R كما في الشكل الآتي:



الحل:

لدينا نصف قرص أي جسم سطحي وبالتالي الكثافة سطحية

$$\sigma = \frac{M}{S} = \frac{M}{\frac{\pi R^2}{2}} = \frac{2M}{\pi R^2}$$

نلاحظ أيضاً أن المحور (ox) هو محور تناظر للجسم المدروس لذا فإن مركز عطالة الجسم واقع على المحور (ox) وبالتالي:

$$x(G) = 0$$

$$z(G) = 0$$

$$y(G) = \frac{1}{M}\sigma \int_0^{\pi}\int_0^{R} y \, ds$$

حيث أن:

$$y = R.\sin\theta$$

$$\sigma = \frac{2M}{\pi R^2}$$

$$ds = R.dR.d\theta$$

ومنه

$$y(G) = \frac{1}{M}\,\frac{2M}{\pi R^2}\int_0^{\pi}\int_0^{R} R.\sin\theta.R.dR.d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi R^2}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta.\int_0^{R} R^2\,dR$$

$$= \frac{2}{\pi R^2}[-\cos\theta]_0^{\pi}.\left[\frac{R^3}{3}\right]_0^{R}$$

$$= \frac{2}{\pi R^2}(1+1)\left(\frac{R^3}{3}-0\right)$$

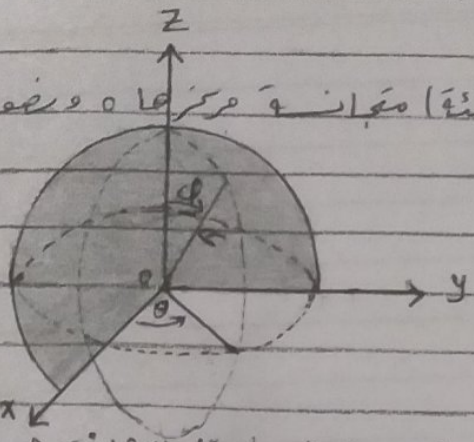
$$= \frac{4R^3}{3\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi}$$

إذاً إحداثيات مركز العطالة $G\left(0, \frac{4R}{3\pi}, 0\right)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مسألة:

حدّد مركز كتلة نصف كرة صماء (متجانسة) مركزها o ونصف قطرها R كما في الشكل الآتي:



الحل:

لدينا نصف كرة متجانسة أي جسم ثلاثي الأبعاد وبالتالي فإنّ الكثافة حجميّة

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{1}{2}\frac{4\pi R^3}{3}} = \frac{M}{\frac{2\pi R^3}{3}} = \frac{3M}{2\pi R^3}$$

وبما أنّ المحور oz هو محور تناظر للجسم المدروس لذا فإنّ مركز كتلة الجسم واقع على المحور oz وبالتالي:

$$X(G) = 0$$

$$y(G) = 0$$

$$Z(G) = \frac{1}{M}\rho \iiint Z\, dV$$

حيث أنّ:

$$Z = R\cdot\cos\varphi$$

$$\rho = \frac{3M}{2\pi R^3}$$

$$dV = R^2\cdot\sin\varphi\cdot dR\cdot d\theta\cdot d\varphi$$

$$R: 0 \longrightarrow R$$

$$\theta: 0 \longrightarrow 2\pi$$

$$\varphi: 0 \longrightarrow \frac{\pi}{2}$$

ولدينا

بالتعويض

$$Z(G) = \frac{1}{M}\cdot\frac{3M}{2\pi R^3}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\cdot\cos\varphi\cdot R^2\cdot\sin\varphi\, dR\cdot d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3}\int_0^R R^3 dR\cdot\int_0^{2\pi} d\theta\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\cdot\sin\varphi\cdot d\varphi$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3}\left[\frac{R^4}{4}\right]_0^R\cdot\left[\theta\right]_0^{2\pi}\cdot\left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{3}{2\pi R^3}\left(\frac{R^4}{4}-0\right)(2\pi-0)\left(\frac{1}{2}-0\right) = \frac{3R}{8}$$

إذاً إحداثيات مركز الكتلة $G\left(0,0,\frac{3R}{8}\right)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ثانياً: عزوم العطالة:

نعرّف عزم العطالة لنقطة مادية A بالنسبة النقطة O بالعلاقة:

$$I_O(A) = m d^2$$

حيث أن:

m: كتلة النقطة A.

d: بُعد النقطة المادية A عن النقطة O.

- وبالمثل نعرّف عزم العطالة لنقطة مادية A بالنسبة لمستقيم ما Δ في الفراغ بالعلاقة:

$$I_\Delta(A) = m d^2$$

d: بُعد النقطة المادية A عن المستقيم Δ.

- وكذلك نعرّف عزم العطالة لنقطة مادية A بالنسبة لمستوي Π في الفراغ بالعلاقة:

$$I_\Pi(A) = m d^2$$

d: بُعد النقطة المادية A عن المستوي Π.

- وعزم العطالة لمجموعة مادية (S) مكوّنة من عدد من النقاط بالنسبة لنقطة O بالعلاقة:

$$I_O(S) = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2$$

أو بالنسبة لمحور Δ

$$I_\Delta(S) = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2$$

أو بالنسبة لمستوي Π

$$I_\Pi(S) = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2$$

ملاحظة:

في حالة الأجسام الصلبة فإن المجموع يؤول إلى تكامل آحادي أو ثنائي أو ثلاثي وذلك حسب طبيعة الجسم (كما هو الحال في مركز العطالة).

عزم العطالة لجسم خطي $I_O(S) = \lambda \int d^2 \, dl$

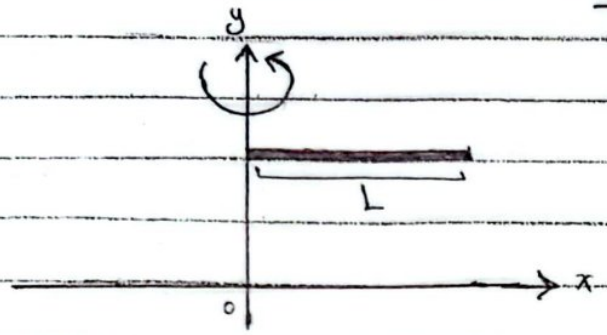
مسألة ١:

احسب عزم عطالة ساق (S) متجانسة نحيفة كتلتها M وطولها L وذلك بالنسبة لمحور عمودي عليها ومار من أحد طرفيها وليكن المحور oy .

الحل:

لدينا ساق متجانسة نحيفة أي جسم صلب وبالتالي الكثافة خطيّة / طوليّة

$$\lambda = \frac{M}{L}$$



$$I_{oy}(S) = \lambda \int d^2 \, dl$$

$$= \frac{M}{L} \int_0^L l^2 \, dl$$

$$= \frac{M}{L} \left[\frac{l^3}{3} \right]_0^L$$

$$= \frac{M}{\cancel{L}} \left(\frac{\cancel{L^3}}{3} - 0 \right)$$

$$= \frac{ML^2}{3}$$

- بما أنّ الكتلة الكليّة للساق M هي مقدار موجب وطول الساق L هو أيضاً مقدار موجب فإنّ عزم العطالة هو مقدار موجب

- في حال حساب عزم عطالة ساق بالنسبة لمحور مار من منتصفها فإنّ عزم العطالة سيكون $I_{oy} = \frac{1}{12} ML^2$

CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

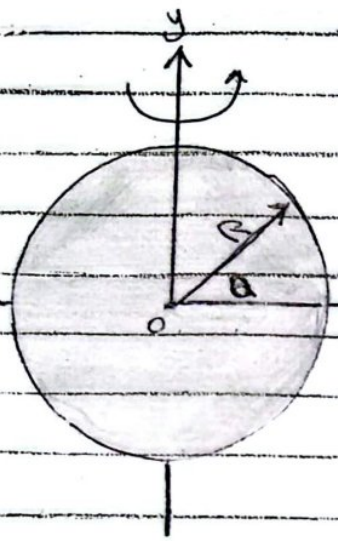
مسألة 2:

اوجد عزم عطالة قرص (S) متجانس مركزه O ونصف قطره R بالنسبة لمحور oy

الحل:

لدينا قرص أي جسم سطحي وبالتالي الكثافة سطحية

$$\sigma = \frac{M}{S} = \frac{M}{\pi R^2}$$



$$I_{oy}(S) = \sigma \iint d^2 \, ds$$

$$= \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} R^2 \cdot R \, dR \cdot d\theta$$

$$= \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R R^3 \, dR \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{M}{\pi R^2} \left[\frac{R^4}{4} \right]_0^R \left[\theta \right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{M}{\pi R^2} \left(\frac{R^4}{4} - 0 \right) (2\pi - 0)$$

$$= \frac{M R^4 \, 2\pi}{4 \pi R^2}$$

$$= \frac{M R^2}{2}$$

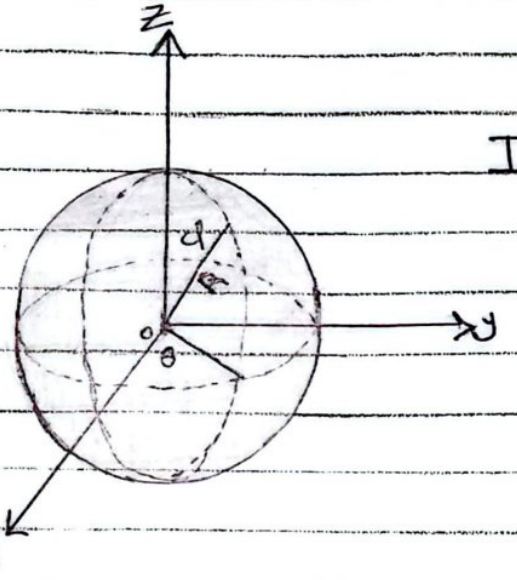
مسألة 3:

احسب عزم عطالة كرة ممتلئة متجانسة مركزها O ونصف قطرها R ومحور تناظرها OZ.

الحل:

بما أنّ الكرة ممتلئة أي أنّها جسم ثلاثي الأبعاد وبالتالي فإنّ الكثافة حجميّة

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4\pi R^3}{3}} = \frac{3M}{4\pi R^3}$$



$$I_o(S) = \rho \iiint d^2\, dV$$

$$= \frac{3M}{4\pi R^3} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R^2 \cdot R^2 \sin\varphi\, dR\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{3M}{4\pi R^3} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R^4 \sin\varphi\, dR\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \frac{3M}{4\pi R^3} \int_0^R R^4\, dR \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi$$

$$= \frac{3M}{4\pi R^3} \left[\frac{R^5}{5}\right]_0^R \left[\theta\right]_0^{2\pi} \left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{3M}{4\pi R^3} \left(\frac{R^5}{5} - 0\right)(2\pi - 0)(1+1)$$

$$= \frac{3M \times R^5 \times 2\pi \times 2}{4\pi R^3 \times 5}$$

$$= \frac{3MR^2}{5}$$

CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مسألة 4:

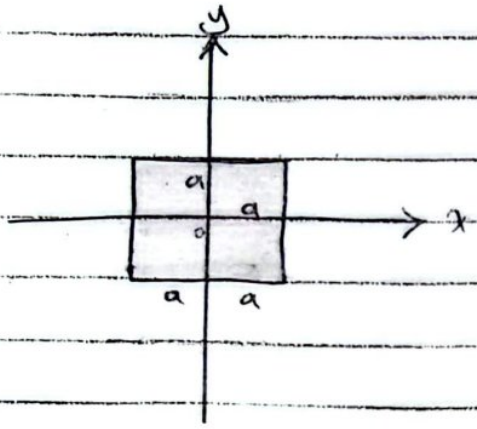
احسب عزم عطالة صفيحة مربعة الشكل متجانسة مركزها o وطولها 2a بالنسبة لمحور oy

الحل:

بما أن الكتلة موزعة على صفيحة مربعة فإن الكثافة سطحية

$$\sigma = \frac{M}{S} = \frac{M}{4a^2}$$

$$I_{oy}(S) = \sigma \iint d^2 \, ds$$



$$= \frac{M}{4a^2} \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} a^2 \, dx\,dy$$

$$= \frac{M}{4a^2} \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} x^2 \, dx\,dy$$

$$= \frac{M}{4a^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} [y]_{-a}^{a}$$

$$= \frac{M}{4a^2} \left(\frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{3}\right)(a+a)$$

$$= \frac{M}{4a^2} \left(\frac{2a^3}{3}\right)(2a)$$

$$= \frac{4 M a^4}{12 a^2}$$

$$= \frac{1}{3} M a^2$$

CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

- عزم العطالة بالنسبة للمحاور الإحداثية:

عزم العطالة بالنسبة لـ ox $I_x = \sum_{i=1}^{n} m_i (y_i^2 + z_i^2)$

عزم العطالة بالنسبة لـ oy $I_y = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + z_i^2)$

عزم العطالة بالنسبة لـ oz $I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2)$

- عزم العطالة بالنسبة للمستويات الإحداثية:

عزم العطالة بالنسبة للمستوى oxy $I_{xy} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2$

عزم العطالة بالنسبة للمستوى oxz $I_{xz} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i^2$

عزم العطالة بالنسبة للمستوى oyz $I_{yz} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i^2$

عزم العطالة بالنسبة لمبدأ الإحداثيات:

$$I_o = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

خصائص عزوم العطالة:

عزوم العطالة لأي جسم صلب ضمن جملة محاور oxyz تحقق العلاقات الآتية:

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}$$
$$I_y = I_{xy} + I_{yz}$$
$$I_z = I_{xz} + I_{yz}$$

$$I_{xy} = \frac{1}{2}(I_x + I_y - I_z)$$
$$I_{xz} = \frac{1}{2}(I_x + I_z - I_y)$$
$$I_{yz} = \frac{1}{2}(I_y + I_z - I_x)$$

$$I_o = I_{xy} + I_{xz} + I_{yz}$$
$$I_o = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z)$$

ملاحظة:

عزم العطالة I هو مقدار موجب دوماً.

CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ثالثاً: جداءات العطالة:

نعرّف جداء العطالة لنقطة مادّية A بالنسبة للمستويين Π_1، Π_2 بالعلاقة

$$J_{\Pi_1,\Pi_2}(A) = m.d_1.d_2$$

حيث أنّ:

m: كتلة النقطة المادّية A.

d_1: بُعد النقطة المادّية A عن المستوي Π_1.

d_2: بُعد النقطة المادّية A عن المستوي Π_2.

Π_1, Π_2: مستويين متعامدين في الجملة

ولسهولة التعامل مع جداءات العطالة يُمكن كتابة العلاقة السابقة لجداء العطالة (بالنسبة للمستويين oxz، oyz) بالشكل:

$$J_{yx}(A) = J_{xy}(A) = m.x.y$$

بحيث يكون الإحداثي x هو بُعد النقطة المادّية A عن المستوي oyz.

والإحداثي y هو بُعد النقطة المادّية A عن المستوي oxz.

وبالمثل نجد:

$$J_{xz}(A) = J_{zx}(A) = m.x.z$$

$$J_{yz}(A) = J_{zy}(A) = m.y.z$$

بنفس الأسلوب نجد أنّ جداء العطالة لمجموعة مادّية (S) يكتب بالشكل:

$$J_{xy}(S) = J_{yx}(S) = \sum_{i=1}^{n} m_i.x_i.y_i$$

$$J_{xz}(S) = J_{zx}(S) = \sum_{i=1}^{n} m_i.x_i.z_i$$

$$J_{yz}(S) = J_{zy}(S) = \sum_{i=1}^{n} m_i.y_i.z_i$$

CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تنسور العطالة:

هو عبارة عن مصفوفة متناظرة والعناصر القطرية منها تساوي عزوم عطالة الجسم بالنسبة لمحاور الحملة أما العناصر الأخرى فتسمى جداءات العطالة.

كما في الشكل الآتي:

$$T_o = \begin{bmatrix} I_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & I_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & I_z \end{bmatrix}$$

ويمكن كتابة تنسور العطالة بالشكل آخر

$$T_o = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}$$

حالة خاصة:

إذا كانت محاور حملة العطالة هي محاور تناظر فإن جداءات العطالة تكون معدومة وبالتالي تنسور الشكل:

$$T_o = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

ويسمى تنسور العطالة المركزي.

CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أمّا جداء العطالة لجسم صلب S يُعطى بالعلاقة :

$$J_{xy}(S) = J_{yx}(S) = \lambda \int xy \, dl$$

$$J_{xz}(S) = J_{zx}(S) = \lambda \int xz \, dl$$

$$J_{yz}(S) = J_{zy}(S) = \lambda \int yz \, dl$$

ملاحظة :

في حالة الأجسام الصلبة يؤوّل المجموع إلى تكامل أحادي أو ثنائي أو ثلاثي وذلك حسب طبيعة الجسم (كما هو الحال في مركز العطالة وعزم العطالة).

والعلاقات السابقة هي جداءات عطالة لجسم خطّي.

خواص جداءات العطالة:

1- جداءات العطالة هي مقادير سالبة أو موجبة أو معدومة.

2- إذا كان الجسم متناظر بالنسبة لأحد المستويات الإحداثيّة (وليكن oxy) فإنّ جداءات العطالة التي تحتوي على x أو y تكون معدومة :

أي

$$J_{xz} = 0$$

$$J_{yz} = 0$$

3- إذا كان الجسم متناظر بالنسبة لأحد المحاور الإحداثيّة (وليكن ox) فإنّ جداءات العطالة التي تحوي على x تكون معدومة :

أي

$$J_{xy} = 0$$

$$J_{xz} = 0$$

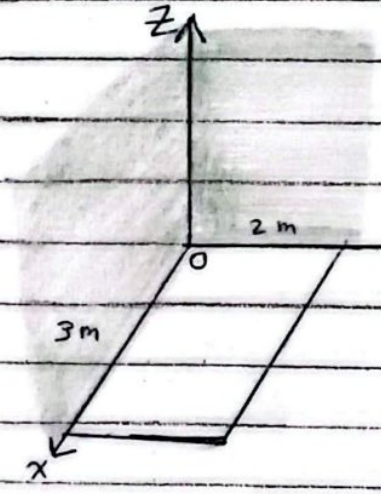
4- عندما تنطبق المحاور الإحداثيّة على محاور تناظر الجسم فإنّ جداءات العطالة تكون معدومة وتسمّى جملة المحاور في هذه الحالة بجملة عطالة أساسيّة.

CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مسألة 1

احسب عزوم عطالة صفيحة مستطيلة الشكل متجانسة طولها 3m وعرضها 2m بالنسبة للمستويين yz, xz, وكتلتها 12 kg.

الحل:



لدينا صفيحة مستطيلة الشكل أي هي مستوي وبالتالي الكثافة سطحية.

$$\sigma = \frac{M}{S} = \frac{M}{a.b} \quad Kg.m^{-2}$$

$$J_{xy}(S) = J_{yx}(S) = \sigma \iint xy\, ds$$

$$= \frac{M}{a.b} \int_0^a \int_0^b x.y\, dx.dy$$

$$= \frac{M}{a.b} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^b$$

$$= \frac{M}{a.b} \left(\frac{a^2}{2} - 0\right)\left(\frac{b^2}{2} - 0\right)$$

$$= \frac{M a^2 b^2}{4 a.b} = \frac{M a.b}{4} = \frac{12 \times 3 \times 2}{4}$$

$$= 18\ Kg.m^2$$

ملاحظة: في حال كانت الصفيحة متناظرة بالنسبة لمحور (ولتكن y مثلاً) عندئذٍ عزوم العطالة ستكون معدومة (التي تكون y).

أي

$$J_{xy} = J_{yx} = 0$$

$$J_{zy} = J_{yz} = 0$$

CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مجسّم العطالة الناظمي:

هو مجسّم معادلته تعطى بالعلاقة:

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2[J_{xy} xy + J_{xz} xz + J_{yz} yz] = 1$$

$$A x^2 + B y^2 + C z^2 - 2[D xy + E xz + F yz] = 1$$

- في حالة تبسّط العطالة المركزي (أي إذا كانت محاور حملة العطالة هي محاور ناظم) فإنّ معادلة مجسّم العطالة تصبح:

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1$$

$$A x^2 + B y^2 + C z^2 = 1$$

عزم عطالة جسم بالنسبة لمحور

ليكن لدينا جسم صلب أو مجموعة مادية منسوبة لحملة إحداثيّة $O xyz$، وليكن Δ مستقيم حامل مركز الإحداثيّات O وشعاع هاديه $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$. عندئذٍ عزم عطالة الجسم بالنسبة للمستقيم Δ يعطى بالعلاقة:

$$I_\Delta = I_x \alpha^2 + I_y \beta^2 + I_z \gamma^2 - 2[J_{xy} \alpha\beta + J_{xz} \alpha\gamma + J_{yz} \beta\gamma]$$

نظريّة هويغنز (نظريّة المحاور المتوازية):

أوّلاً: عزم العطالة بالنسبة لنقطة A:

$$I_A = I_O + M d^2 = I$$

حيث أنّ:

I_O: عزم العطالة بالنسبة لمركز الكتلة O.

M: كتلة الجسم.

d: البعد بين A و O.

ثانياً: عزم العطالة بالنسبة لمحور Δ:

$$I_\Delta = I_{\Delta'} + M d^2$$

حيث أنّ:

$I_{\Delta'}$: عزم العطالة بالنسبة لمحور حامل من O وموازٍ Δ.

CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ثالثاً: عزم العطالة بالنسبة لمستوى Π $\quad I_{\Pi} = I_{\pi'} + Md^2$

حيث أن:

$I_{\pi'}$: عزم العطالة بالنسبة لمستوى ما، حاور مركز الكتلة و يوازي Π

مسألة:

ليكن لدينا صفيحة دائرية الشكل متجانسة نصف قطرها 2 وكتلتها 3 وليكن لدينا جملة محاور إحداثية مركزها هو مركز الصفيحة ومحاورها هي محاور تناظر الصفيحة

المطلوب:

1- احسب عزم العطالة بالنسبة للمحاور ox, oy, oz علماً أن الصفيحة تقع في المستوي xy

2- احسب تنسور العطالة المركزي

3- احسب محيّم العطالة المركزي

4- احسب عزم عطالة الصفيحة بالنسبة لمستقيم Δ موجود فيها وبالنسبة لمستقيم Δ' عمودي عليها

الحل:

لدينا صفيحة دائرية أي هي سطحي وبالتالي الكتلة سطحية

$$\sigma = \frac{M}{S} = \frac{M}{\pi R^2}$$

$$I_x = \sigma \iint d^2 \, ds$$

$$= \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} (R\sin\theta)^2 \cdot R \, dR \, d\theta$$

$$= \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} R^2 \sin^2\theta \, R \, dR \, d\theta$$

$$= \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R R^3 \, dR \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta \qquad \sin^2\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta$$

$$= \frac{M}{\pi R^2} \left[\frac{R^4}{4}\right]_0^R \left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{M}{\pi R^2} \left(\frac{R^4}{4} - 0\right)\left(\frac{2\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin 4\pi - 0\right)$$

CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$= \frac{M}{\cancel{\pi} R^{\cancel{2}}} \left(\frac{R^{\cancel{4}}}{4} \right) (\cancel{\pi})$$

$$= \frac{MR^2}{4} = \frac{3(2)^2}{4} = 3$$

وبما أنّ الصفيحة متناظرة بالنسبة للمحاور

$$I_x = I_y = \frac{MR^2}{4} = 3$$

$$I_z = I_x + I_y$$

$$= \frac{MR^2}{4} + \frac{MR^2}{4}$$

$$= \frac{MR^2}{2} = \frac{3(2)^2}{2} = 6$$

2- بما أنّ المحاور الإحداثية هي محاور تناظر للصفيحة فإن جداءات العطالة معدومة أي أنّ جملة العطالة هي جملة عطالة أساسيّة.

$$T_o = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

$$T_o = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

CamScanner
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

3- يعطى مجسم العطالة المركزي بالمعادلة

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1$$

وبما أنّ الصفيحة ثنائية البعد فإن المعادلة تصبح:

$$I_x x^2 + I_y y^2 = 1$$

$$\frac{MR^2}{4} x^2 + \frac{MR^2}{4} y^2 = 1$$

$$\frac{MR^2}{4} (x^2+y^2) = 1$$

$$x^2 + y^2 = \frac{4}{MR^2}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{3}$$

وهي معادلة دائرة.

4- حسب نظرية هويغنز

عزم عطالة بالنسبة لنقطة A $\quad I_A = I_0 + Md^2$

$$= \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z) + Md^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{4} + \frac{MR^2}{4} + \frac{MR^2}{2}\right) + MR^2$$

$\times 2$

$$= \frac{MR^2}{2} + MR^2$$

$$= \frac{3}{2} MR^2 = \frac{3}{2}(3)(2)^2 = 18$$

عزم العطالة بالنسبة لمحور Δ $\quad I_\Delta = I_x + Md^2$

مماس للصفيحة $\quad = \frac{MR^2}{4} + MR^2$

أو I_y

$$= \frac{5}{4} MR^2 = \frac{5}{4}(3)(2)^2 = 15$$

CamScanner

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner