تحليل عددي / المحاضرة الخامسة

الاستيفاء

إذا كان لدينا تابع ما معرفاً بدلالة متغير ما نقاط معلومة تدعى نقاط التوزيع والمطلوب هو معرفة قيمة هذا التابع في نقطة ما واقعة بين نقاط التوزيع.

طرق الاستيفاء:

1) طريقة الاستيفاء الداخلي للاغرانجي:

لنفرض أنه من أجل التابع $y=y(x)$ لدينا $(n+1)$ نقطة معرفة بالقيم

$$(x_0,y_0)\ ,\ (x_1,y_1)\ ,\ \dots\ ,\ (x_n,y_n)$$

والمسألة هنا هي إيجاد قيمة التابع من أجل قيمة ما x واقعة بين نقاط التوزيع

- نعطي كثيرة الحدود الاستيفاء الداخلي للاغرانجي بالعلاقة:

$$P_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \dots + y_n L_n(x)$$

حيث: $L_i(x)\ ;\ i=0,1,\dots,n$ تسمى مضاريب لاغرانجي

ونحسب من العلاقة:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}$$

وهكذا...

بعد حساب هذه المضاريب نعوض في علاقة كثيرة الحدود

Scanned by CamScanner

ملاحظة :

يعطى بالتمرين احيانا قيمة x حتى نوجد قيمة كثيرة الحدود عند هذه النقطة عندئذ نعوض في العلاقات القيمة المعطاة بدلا من x

* يعطى الخطأ في هذه الطريقة بالعلاقة :

$$\varepsilon(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

حيث $c \in [x_0, x_n]$ وتجعل المشتقة اكبر ما يمكن.

مثال:

ليكن لدينا الجدول :

x	0.40	0.50	0.70	0.80
y	-0.916291	-0.693147	-0.356675	-0.223144

المطلوب : حساب $f(0.6)$ التقريبية باستخدام كثيرة حدود الاستيفاء الداخلي لاغرانج

الحل : نلاحظ أن $n=3$ ، عندئذ فإن كثيرة حدود الاستيفاء الداخلي لاغرانج يعطى بالدستور :

$$P_3(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x)$$

$$\Rightarrow P_3(0.6) = y_0 L_0(0.6) + y_1 L_1(0.6) + y_2 L_2(0.6) + y_3 L_3(0.6) \quad \cdots (1)$$

حساب كثيرات حدود لاغرانج

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$

$$\Rightarrow L_0(0.6) = \frac{(0.6-0.50)(0.6-0.70)(0.6-0.80)}{(0.40-0.50)(0.40-0.70)(0.6-0.80)} = \frac{-1}{6}$$

Scanned by CamScanner

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$\Rightarrow L_1(0.6) = \frac{(0.6-0.40)(0.6-0.70)(0.6-0.80)}{(0.50-0.40)(0.50-0.70)(0.50-0.80)} = \frac{2}{3}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

$$\Rightarrow L_2(0.6) = \frac{(0.6-0.40)(0.6-0.50)(0.6-0.80)}{(0.70-0.6)(0.70-0.50)(0.70-0.80)} = \frac{2}{3}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

$$\Rightarrow L_3(0.6) = \frac{(0.6-0.40)(0.6-0.50)(0.6-0.70)}{(0.80-0.40)(0.80-0.50)(0.80-0.50)} = \frac{-1}{6}$$

بتعويض القيم السابقة في (1) نحصل على:

$$P_3(0.6) = (-0.916291)(\tfrac{-1}{6}) + (-0.693147)(\tfrac{2}{3}) + (-0.356675)(\tfrac{2}{3}) +$$

$$+ (-0.223144)(\tfrac{-1}{6})$$

$$= -0.5099755 .$$

Scanned by CamScanner

2 طريقة استيفاء الفروق الأمامية :

تعتمد هذه الطريقة على تشكيل جدول يسمى جدول الفروق الأمامية ويتم تشكيله كالآتي :

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
x_0	y_0				
x_1	y_1	$\Delta y_0 = y_2 - y_0$	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_0$
x_2	y_2	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	$\Delta^3 y_1$	⋮
⋮	⋮	$\Delta y_2 = y_3 - y_1$	⋮	⋮	
x_{n-1}	y_{n-1}	⋮			
x_n	y_n	$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$			

عندئذ يعطى كثيرة الحدود في هذه الطريقة بالعلاقة :

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 +$$

$$+ \cdots + \frac{q(q-1)\cdots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0$$

حيث : $q = \frac{x - x_0}{h}$

h : هو مقدار الخطوة أي $h = x_{i+1} - x_i$

ملاحظة :

لا يمكن تطبيق هذه الطريقة إلا إذا كانت الخطوة متساوية لكل هذه النقاط

Scanned by CamScanner

نعطي الخطأ في هذه الطريقة بالعلاقة:

$$\varepsilon(x) = \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} q(q-1)(q-2)\dots(q-n)$$

حيث $c \in [x_0, x_n]$ تجعل المشتق أكبر ما يمكن

مثال:
احسب قيمة كثيرة حدود الاستيفاء الداخلي لنيوتن ذو الفروق الأمامية من أجل $x = 1.25$ للتابع $y = \sqrt{x}$ المعطاة قيمه بالجدول التالي:

x	1	1.5	2	2.5
y	1,00000	1.22474	1.41421	1.58114

الحل:

نلاحظ أن $n=3$ ، $h=0.5$ ، $q = \frac{x-x_0}{h} = \frac{1.25-1}{0.5}$

لنشكل جدول الفروق الأمامية:

x	y	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1	1.00000			
		0.22474		
1.5	1.22474		-0.03527	
		0.18947		0.01273
2	1.41421		-0.02254	
		0.16693		
2.5	1.58114			

Scanned by CamScanner

أن كثيرة حدود الاستيفاء الداخلي لنيوتن ذو الفروق الأمامية تعطى بالدستور:

$$P_3(x) = y_0 + q\,\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0$$

$$\Rightarrow P_3(1.25) = 1 + (0.5)(0.22474) + \frac{0.5(0.5-1)}{2}(-0.03527) +$$

$$+ \frac{0.5(0.5-1)(0.5-2)}{3!}(0.01273)$$

$$= 1.11757375 \simeq 1.117574$$

حساب الخطأ:

$$\varepsilon(x) = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} h^{n+1} q(q-1)(q-2)(q-3) \right|$$

$$\Rightarrow \varepsilon(1.25) = \left| \frac{f^{4}(c)}{4!} (0.5)^2 (0.5)(0.5-1)(0.5-2)(0.5-3) \right| \quad (*)$$

لدينا: $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f^{(4)}(x) = \dfrac{0.9375}{x^{3.5}}$

لدينا $c \in [x_0, x_3] = [1, 2.5]$

إن أعظم قيمة للمشتق تكون عندما $c = 1$ إذاً: $f^{(4)}(c) = f^{(4)}(1) = 0.9375$

بالتعويض في (*) نجد:

$$\varepsilon(1.25) = 0.0022818$$

Scanned by CamScanner

تدريب:

أنشئ كشير حدود الاستيفاء الداخلي لنيوتن ذو الفروق الأمامية للتابع $y=e^x$ المعطى بالجدول

x	3.5	3.55	3.60	3.65	3.70
y	33.115	34.813	36,598	38.475	40,447

Scanned by CamScanner