الحلول العددية للمعادلات التفاضلية العادية:

هنالك عدد من المعادلات التفاضلية التي لا يمكن حلها بالطرق التقليدية المعروفة مسبقاً، لذلك نلجأ للطرق العددية لحلها، سنهتم بكل المعادلات التفاضلية العادية ذات الشروط الابتدائية من المرتبة الأولى فقط.

فيما يلي بعض طرق الحل العددي لهذا النوع من المعادلات:

① طريقة تايلور:

نفرض أنه لدينا معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى:

$$y' = f(x,y)$$

والتي تحقق الشرط الابتدائي $y(x_0) = y_0$

ونريد إيجاد قيمة y عند $x+h$ عندئذ نعطي دستور تايلور بالعلاقة:

$$y(x+h) \simeq y(x) + h\,y'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(x) + \dots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(x) + \dots$$

إن الخطأ في هذه الطريقة يعطى بالعلاقة:

$$\varepsilon = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}y^{(n+1)}(c) \quad ; \quad c \in [x, x+h]$$

مثال:

أوجد حل المعادلة التفاضلية:

$$y' = x \cdot y^{1/3}$$

من أجل $y(1)=1$ حيث $h=0.1$ وذلك في النقطة $x=1.1$

واحسب الخطأ في ذلك وذلك باستخدام طريقة تايلور من المرتبة الرابعة.

Scanned by CamScanner

الحل: إنّ دستور تايلور يعطى بالعلاقة:

$$y(x+h) \simeq y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + \frac{h^4}{4!}y''''(x)$$

حساب المشتقات:

$$y' = x \cdot y^{1/3}$$

$$y'' = y^{1/3} + \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}} \cdot x \cdot y' = y^{1/3} + \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}} \cdot x \cdot x\, y^{1/3}$$

$$\Rightarrow \quad y'' = y^{1/3} + \frac{1}{3}x^2 y^{-1/3}$$

$$y''' = -\frac{1}{9}x^3 y^{-1} + x\, y^{-1/3}$$

$$y'''' = \frac{1}{4}x^4 y^{-5/4} - \frac{2}{3}x^2 y^{-1} + y^{-1/3}$$

ومنه نجد:

$$y'(1) = 1 \;,\; y''(1) = \frac{4}{3} \;,\; y'''(1) = \frac{8}{9} \;,\; y''''(1) = \frac{4}{9}$$

ومنه:

$$y(1.1) = y(1+0.1) \simeq y(1) + h\,y'(1) + \frac{h^2}{2!}y''(1) + \frac{h^3}{3!}y'''(1) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(1)$$

$$\simeq 1 + (0.1)(1) + \frac{(0.1)^2}{2!}\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{(0.1)^3}{3!}\left(\frac{8}{9}\right) + \frac{(0.1)^4}{4!}\left(\frac{4}{9}\right)$$

$$\simeq 1.10682$$

Scanned by CamScanner

أما الخطأ فيحسب من العلاقة :

$$\varepsilon = \frac{h^5}{5!} y^{(5)}(c) \quad ; \quad c \in [1, 1.1]$$

وبما أن :

$$\varepsilon < 0.000002$$

طلب اضافي: وظيفة

احسب قيمة التابع عند النقطة $x = 1.2$

$$y(1.2) = y(1.1 + 0.1) \simeq y(1.1) + h\,y'(1.1) + \frac{h^2}{2!} y''(1.1)$$

$$+ \frac{h^3}{3!} y'''(1.1) + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(1.1)$$

③ طريقة أولر :

نفرض أنه لدينا :

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{حل ابتدائي}$$

تعتمد هذه الطريقة على أخذ الحد الأول والثاني في منشور تايلور للتابع $y(x)$ عندئذ نعطى دستور أولر بالعلاقة :

$$y_{i+1} = y_i + h\,f(x_i, y_i)$$

أما الخطأ في هذه الطريقة فيعطى بالعلاقة

$$\varepsilon = \frac{h^2}{2} y''(c) \quad ; \quad c \in [x_0, x_1] \quad ; \quad x_1 = x_0 + h \quad \text{حيث}$$

مثال : استخدم طريقة أولر لحل المعادلة التفاضلية

$$y' = f(x, y) = x\,y^{1/3}$$

حيث $y(1) = 1$ ؛ $h = 0.1$ وذلك في النقاط $1.1, 1.2, 1.3$

Scanned by CamScanner

الحل : إننا سنستخدم أولر بتطبيق العلاقة :

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$$

$$\Rightarrow \quad y_{i+1} = y_i + 0.1 \left(x_i \cdot y_i^{1/3} \right)$$

وعند خطوة:

لنوجد الحل في النقطة $x_1 = 1.1$

$$y_1 = y(x_1) = y(1.1) = y_0 + 0.1 \left(x_0 \cdot y_0^{1/3} \right)$$

$$= 1 + 0.1 \left(1 \times 1^{1/3} \right) = 1.1$$

لنوجد الحل في النقطة $x_2 = 1.2$ حيث $y_2 = y(x_2)$

$$y_2 = y_1 + 0.1 \left(x_1 \cdot y_1^{1/3} \right) = 1.1 + 0.1 \left(1.1 \times (1.1)^{1/3} \right)$$

$$= 1.21352$$

لنوجد الحل في النقطة $x_3 = 1.3$

$$y_3 = y_2 + 0.1 \left(x_2 \cdot y_2^{1/3} \right)$$

$$= 1.21352 + 0.1 \left(1.2 \times (1.21352)^{1/3} \right)$$

$$= 1.34152$$

تمرين وظيفة:

لتكن المعادلة $y' = y$ وشرط الابتدائي $y(0) = 1$ بأخذ $h = 0.1$ أوجد حل هذه المعادلة بطريقة أولر في النقطة $x = 0.5$

Scanned by CamScanner