٣ كثيرة حدود الاستيفاء الداخلي لنيوتن ذو الفروق الخلفية :

تعتمد هذه الطريقة على تشكيل جدول يسمى بجدول الفروق الخلفية وهو نفسه جدول الفروق الأمامية ولكن الاختلاف بصيغة كثيرة الحدود والتي تعطى بالعلاقة :

$$P_n(x) = y_n - q\cdot\nabla y_n + \frac{q(q-1)}{2!}\nabla^2 y_n - \cdots + (-1)^n \frac{q(q-1)\cdots(q-n+1)}{n!}\nabla^n y_n$$

حيث $q = \frac{x_n - x}{h}$

h مقدار الخطوة ، ويجب أن تكون الخطوة متساوية لتطبيق هذه الطريقة

ملاحظة :

إن صيغة الخطأ في هذه الطريقة مماثلة تماماً لطريقة الفروق الأمامية

$$\varepsilon(x) = \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} q(q-1)(q-2)\cdots(q-n)$$

حيث $c \in [x_0, x_n]$ تجعل المشتقة أكبر ما يمكن

Scanned by CamScanner

مثال: لتكن قيم الجذر $y=\sqrt{x}$ معطاة في الجدول التالي:

x	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04
y	1.00000	1.00499	1.00995	1.01489	1.01980

المطلوب:
ايجاد قيمة $\sqrt{x}$ في النقطة 1.005 باستخدام كثيرة صيغ الاستقراء الداخلي لنيوتن ذو الفروق الخلفية ثم أوجد الخطأ في هذه القيمة.

الحل:
لدينا:

$$q = \frac{x_n - x}{h} = \frac{1.04 - 1.005}{0.01} = 3.5$$

x_i	y_i	∇y_i	$\nabla^2 y_i$	$\nabla^3 y_i$	$\nabla^4 y_i$
1.00	1.00000				
		0.00499			
1.01	1.00499		-0.00003		
		0.00496		0.00001	
1.02	1.00995		-0.00002		-0.00002
		0.00494		-0.00001	
1.03	1.01489		-0.00003		
		0.00491			
1.04	1.01980				

نعلم أن كثيرة صيغ الاستقراء الداخلي لنيوتن ذو الفروق الخلفية تعطى بالصيغة:

$$P_n(x) = y_n - q\nabla y_n + \frac{q(q-1)}{2!}\nabla^2 y_n - \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\nabla^3 y_n + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\nabla^4 y_n$$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow P_4(1.005) = 1.01980 - 3.5(0.00491) + \frac{3.5(3.5-1)}{2}(-0.00003) -$$

$$- \frac{3.5(3.5-1)(3.5-2)}{6}(-0.00001) +$$

$$+ \frac{3.5(3.5-1)(3.5-2)(3.5-3)}{24}(-0.00002) =$$

$$= 1.002500156$$

لنحسب الآن الخطأ :

$$\varepsilon(x) = \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} q(q-1)(q-2)\dots(q-n)$$

حيث $c \in [x_0, x_n]$ أي $c \in$

$$\varepsilon(x) = \left| \frac{h^5 f^{(5)}(c)}{5!} q(q-1)(q-2)(q-3)(q-4) \right|$$

لدينا : $f^{(5)}(x) = 3.28125\, x^{-4.5}$

ولدينا $c \in [1, 1.04]$

إن أعظم قيمة للمشتق تكون عندما $c = 1$ ومنه $f^{(5)}(c) = 3.28125$

$$\Rightarrow \varepsilon(x) = \left| \frac{(0.01)^5 \times 3.28125}{120} 3.5(3.5-1)(3.5-2)(3.5-3)(3.5-4) \right|$$

$$= 0.08972168 \times 10^{-9}.$$

Scanned by CamScanner

الاشتقاق العددي باستخدام كثيرة حدود الاستيفاء الداخلي لنيوتن ذو الفروق الأمامية :

تعطى كثيرة الحدود الاستيفاء الداخلي لنيوتن ذو الفروق الأمامية بالعلاقة

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!}\Delta^4 y_0 + \cdots$$

حيث $q = \frac{x-x_0}{h}$ ، h مقدار الخطوة

عندئذ تعطى مشتق الدرجة الأول بالعلاقة :

$$P_n'(x) = \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 + \frac{2q-1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{3q^2-6q+2}{6}\Delta^3 y_0 + \frac{2q^3-9q^2+11q-3}{12}\Delta^4 y_0 + \cdots\right)$$

حيث $\frac{dq}{dx} = \frac{1}{h}$

في حالة خاصة عندما يكون $x = x_0$ عندئذ : $q = \frac{x_0-x_0}{h} = 0$

وبالتالي:

$$P_n'(x_0) = \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0 + \cdots\right)$$

- تعطى مشتق الدرجة الثاني بالعلاقة :

$$P_n''(x) = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 + (q-1)\Delta^3 y_0 + \frac{6q^2-18q+11}{12}\Delta^4 y_0 + \cdots\right)$$

وفي حالة خاصة عندما $x = x_0$ وبالتالي $q = 0$ نعوض في العلاقة السابقة فنحصل على :

$$P_n''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 + \cdots\right)$$

Scanned by CamScanner

- نعوض مشتق الثالث بالعلاقة

$$P_n'''(x) = \frac{1}{h^3}\left(\Delta^3 y_0 + \frac{2q-3}{2}\Delta^4 y_0 + \cdots\right)$$

أما في حالة $x = x_0$ عندما نعوض في العلاقة السابقة $q = 0$ ومنه:

$$P_n'''(x_0) = \frac{1}{h^3}\left(\Delta^3 y_0 - \frac{3}{2}\Delta^4 y_0 + \cdots\right)$$

وهكذا لبقية المشتقات

ملاحظة:

لحساب مشتق الحد $\frac{q(q-1)}{2!} = \frac{q^2-q}{2}$ بالنسبة لـ x يكون كما يلي:

$$\frac{d\left(\frac{q^2-q}{2}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{q^2-q}{2}\right)}{dx} \times \frac{dq}{dq} = \frac{d\left(\frac{q^2-q}{2}\right)}{dq} \times \frac{dq}{dx}$$

$$= \frac{2q-1}{2} \times \frac{dq}{dx} = \frac{2q-1}{2} \times \frac{1}{h}$$

حيث $q = \frac{x-x_0}{h}$ ومنه $dq = \frac{dx}{h}$ وبالتالي:

$$\frac{dq}{dx} = \frac{1}{h}$$

Scanned by CamScanner

مثال : دورة 2011/2012

لتأخذ التابع $y = \sqrt{x}$ ، المعطى قيمه في الجدول :

x	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20
y	1,00000	1,02470	1,04881	1,07238	1,0954

المطلوب :

1) احسب $p'(1)$ باستخدام طريقة المشتق العددي لعلاقات الفروق الأمامية لنيوتن .

2) احسب الخطأ في حساب $p'(1)$.

الحل : نلاحظ أنّ : $n = 4$ ، $h = 0,05$ ولنشكل جدول الفروق الأمامية :

x	y	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$	$\Delta^4 y_i$
1.00	1,00000	0,02470	-0,00059		
1.05	1,02470	0,02411	-0,00054	0,00005	-0,00002
1.10	1,04881	0,02357	-0,00051	0,00003	
1.15	1,07238	0,02306			
1.20	1,09544				

بما أنّ $x_0 = 1$ ، عندئذ فإنّ دستور المشتق الأول عند هذه النقطة هو :

$$p'(1) = \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 - \frac{1}{4}\Delta^4 y_0\right)$$

$$p'(1) = \frac{1}{0,05}\left(0,02470 - \frac{(-0,00059)}{2} + \frac{(0,00005)}{3} - \frac{(-0,00002)}{4}\right)$$

$$p'(1) = 0,5041$$

Scanned by CamScanner

(2) حساب الخطأ : إنّ دستور الخطأ يعطى :

$$E_n(x_0) = (-1)^n \frac{h^n}{n+1} y^{(n+1)}(c) = (-1)^4 \frac{(0,05)^4}{5} y^{(5)}(c) \quad \cdots (*)$$

حساب $y^{(5)}(x)$:

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{-1}{4} x^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow y''' = \frac{3}{8} x^{-\frac{5}{2}}$$

$$\Rightarrow y^{(4)} = \frac{-15}{16} x^{-\frac{7}{2}}$$

$$\Rightarrow y^{(5)} = \frac{105}{32} x^{-\frac{9}{2}}$$

نلاحظ أنه عندما $c=1$ ، فإن المشتق يكون أكبر ما يمكن

أي أنّ :

$$y^{(5)}(1) = \frac{105}{32} \xrightarrow{\text{بالتعويض في } (*)} E_n(x_0) = 0.000004\,1016$$

تدرّب : ليكن لدينا التابع $y = \sqrt{x}$ المعطى قيمته بالجدول التالي :

x	1	1.05	1.10	1.15	1.20
y	1	1,02470	1,04881	1,07238	1,09544

أوجد $P'(1.1)$ ، $P''(1.1)$ ، $P'''(1.1)$

باستخدام الفروق الأمامية .

Scanned by CamScanner