الفصل الأول
حساب الأخطاء Errors

مقدمة:

إن التحليل العددي هو علم التقريب حيث يتم استخدام طرق عددية لحل المسائل المعقدة وغير القابلة للحل بالطرق التحليلية وينشأ عن استخدام هذه الطرق العددية أخطاء يجب معرفتها عند الحصول على أي إجابة وذلك لكي نحكم على قبول هذه الإجابة أو رفضها.

هناك عدة أنواع من الخطأ أهمها:

1- خطأ المعطيات (DATA) الناتجة عن حل المسائل التي نحصل عليها من التجارب العملية غير الدقيقة بشكل كاف أو التي نأخذها مقربة لقيم حقيقية وذلك للتسهيل مستخدمين بذلك قواعد التدوير مثلاً.

2- خطأ الطريقة: ينتج عن الاستعاضة عن علاقة رياضية معقدة مثلاً بعلاقة أخرى أبسط منها. ومثل ذلك استخدام طريقة شبه المنحرف مثلاً في حساب قيمة التكامل المحدود.

3- الخطأ المقتطع: والناتج عن اعتبار أن مجموع السلسلة غير المنتهية مثلاً هو عدد من حدودها.

4- أخطاء الحاسب الآلي: ناتجة عن الحاسب نفسه فمثلاً لنفرض أن لدينا حاسب بحيث أن كل عدد فيه يحتوي على خمسة أرقام فقط وإننا نريد جمع العددين 9.2654 و 7.1625 إن المجموع هو 16.4279 وهو يحتوي على ستة أرقام عندئذ الحاسب لايستطيع تخزين هذه الأرقام وبالتالي يقوم بتدوير الأرقام الستة إلى 16.428 .

أخيراً هناك أخطاء مهملة، مثل الخطأ الشخصي الناتج عن الشخص الذي يقوم بعملية القياس لتجربة ما مقارنة بشخص آخر يقوم بعملية القياس لذات التجربة.

يمكن أن نعبر عن الأخطاء عادة بثلاثة طرق:

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(1-1) الخطأ المطلق Absolute error :

ويعرف بأنه عبارة عن الفرق بين القيمة الحقيقية والقيمة التقريبية ويرمز له بالشكل: $E_a = |x - x_1| = \Delta x$

حيث x هي القيمة الحقيقية (الدقيقة) و x_1 القيمة التقريبية المحسوبة أو التقريبية التجريبية، (سنرمز للخطأ المطلق بـ E بدلاً من E_a إذا لم يكن هناك التباس للسهولة).

(1-2) الخطأ النسبي Relative error :

وهو عبارة عن الخطأ المطلق مقسوماً على القيمة الحقيقية. حيث إن الخطأ المطلق لايعطي فكرة حقيقية عن دقة القياس مثلاً : لو قسنا طول غرفة وطول المسافة من حلب إلى دمشق وكان الخطأ المطلق نفسه فالسؤال هو أي القياسين أدق. طبعاً المسافة من حلب إلى دمشق أدق وبالتالي لمعرفة ذلك تم إدخال التعريف السابق والذي يرمز له بـ:

$$E_r = \frac{E}{|x|} = \frac{\Delta x}{|x|} \qquad (1\text{-}1)$$

(1-3) الخطأ المرتكب:

وهو عبارة عن إحدى القيمتين:

$$\alpha_x = x - x_1 \quad و \quad \alpha_x = x_1 - x \qquad (1\text{-}2)$$

أي أن :

$$E = |\alpha_x| = |x - x_1| = |x_1 - x|$$

(1-4) الخطأ المئوي Percentage error

وهو عبارة عن الخطأ النسبي مضروباً بـ 100 . أي يساوي $100E_r$.

(1-5) أخطاء تمثيل التوابع والعلاقات:

إن الأخطاء المرتكبة بسبب تمثيل التوابع يمكن تحديدها بعلاقة خطأ عامة كما يلي:

ليكن :

$$N = f(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (1\text{-}3)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(1-6) دقة الأعداد:

يوجد عادة نوعين من الأعداد ، تلك الأعداد المضبوطة تماماً، ونوع آخر يشير إلى قيم ذات درجات معينة من الدقة . أمثلة عن تلك ذات الدقة التامة، الأعداد الصحيحة $1,2,3,\ldots$.

الأعداد الكسرية $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\ldots$ والأعداد $\sqrt{3},\pi,e,\ldots$ وغيرها من الأعداد المكتوبة بهذه الطريقة. إن العدد المقرب هو واحد من تلك التي تعبر عن القيمة حيث الدقة تكون فقط لعدد من السجلات الرقمية وهكذا مثلاً $\sqrt{3}$ يكون مضبوطاً كتابة ولكن لايمكن أن نعبر عنه بدقة كرقم منته من الأعداد الرقمية، يمكننا أن نكتبه مثلاً بالشكل 1.732 حيث يكون كتقريب وكذلك يمكن كتابته بالشكل 1.73205 كتقريب أفضل. إن الأرقام المستخدمة للتعبير عن عدد تسمى أشكال معنوية significant figures إذا كان لهم معنى في العدد . مثلاً كل الأعداد الرقمية في 1.73205 تكون أشكال معنوية. بينما في العدد 0.00572 فقط 5 , 7 , 2 أشكال معنوية . الـ o استخدم لمكان النقطة العشرية. إذا استخدم الـ o في نهاية العدد ، يجب إضافة معلومات إضافية لتحديد فيما إذا كان معنوياً. مثلاً 525.000$ يمكن أن يكون دقيقاً (مضبوطاً) أو يمكن أن يكون تعبير مالي (نقدي) لأقرب ألف . إذا كانت الدقة مطلوبة، كل الأعداد تكتب على شكل نقطة عائمة، مثل: 5.25×10^5 أو 5.25000×10^5.

إن العمليات الرياضية تقود الأعداد إلى عدم تحديد ولذلك من الضروري حذف (قطع) هذه الأعداد إلى الشكل المراد ويسمى هذا القطع أو الحذف بالتدوير Rounding off.

وهذا التدوير يخضع للقواعد التالية على الأعداد:

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

ليكن العدد:

$$X = x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1} \ldots x_{n+\ell}$$

عندئذ لتدوير هذا العدد إلى عدد معنوي يحتوي على n رقم تحذف ℓ رقم متتالي وفق ما يلي:

1- إذا كان $x_{n+1} > 5$

تحذف بزيادة 1 على x_n فتصبح: $x_n + 1$

مثال (4): 60.73721 يدور إلى عدد يحوي على 4 أرقام معنوية فيصبح بالشكل: 60.74

2- إذا كان $x_{n+1} < 5$ تحذف دون تغيير x_n.

مثال: 60.7542 يصبح بعد تدويره لأربعة أرقام معنوية بالشكل : 60.75.

3- إذا كان $x_{n+1} = 5$ نميز حالتين:

أ – إذا كانت جميع الأرقام على يمين x_{n+1} معدومة فتتم عملية الحذف بزيادة 1 إلى x_n وذلك إذا كان: x_n فردي وإلاّ (في حالة x_n زوجي) فيتم الحذف دون تغيير x_n.

ب – إذا وجد رقم على يمين x_{n+1} غير معدوم فيتم الحذف مع إضافة 1 إلى x_n .

مثال: العدد $6.3\underline{3}500$ يدور لثلاثة أرقام .

1) العدد : 6.34

مثال (5): العدد $23.\underline{4}500$ يدور لثلاثة أرقام إلى العدد : 23.4 (دون تغيير) .

(1-7) الخطأ النسبي المرتكب في تدوير عدد ما:

يعطى بالقانون:

$$\eta \le \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \qquad (1\text{-}12)$$

حيث a هو أول رقم في العدد المقرب من اليسار n عدد الأرقام في العدد المقرب.

مثال (6): ماهو عدد الأرقام التي يجب أن تأخذها عند حساب $\sqrt{18}$ حتى لايتجاوز الخطأ النسبي الأعظمي المقدار 0.003 .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الحل:

لنأخذ a هنا تساوي 4 ، لذلك لدينا:

$$\frac{1}{2\times 4}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \le 0.003.\left(\frac{3}{10^3}\right)$$

ومنه لدينا: $10^{n-1} \ge 41.6666$

وبالتالي: $n \ge 3$

مثال (7): كم هو حد الخطأ النسبي إذا أخذنا بدلاً من π العدد $a = 3.14$.

الحل:

في هذه الحالة لدينا $n = 3$ ، $a = 3$ ومنه:

$$\eta=\frac{1}{2.3}.\left(\frac{1}{10}\right)^{3-1}=\frac{1}{600} \approx 0.001666$$

$$\le 0.002$$

مثال (8): كم رقم يجب أخذه في حساب $\sqrt{20}$ حتى لايتجاوز الخطأ النسبي 0.0005.

الحل:

ليكن العدد الأول $a = 4$ ومنه:

$$\frac{1}{2.4}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \le 0.0005$$

$$10^{n-1} \ge \frac{1}{0.004}=250$$

$$n \ge 4$$

مثال (9) : إن الأعداد التالية تقرب (تدور) إلى خمسة أرقام معنوية :

31.35764	تدور إلى	31.358
10.19313	تدور إلى	10.193
14.32250	تدور إلى	14.322
14.32150	تدور إلى	14.322

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال (10): ليكن العدد $x = 5.3251$ ولنفرض أن هذه القيمة قربت إلى القيمة التقريبية $x_1 = 5.3$.

عندئذ يمكن اعتبار الخطأ المرتكب:

$$\alpha_x = x - x_1 = 0.0251$$

أو:

$$\alpha_x = x_1 - x_o = -0.0251$$

وكذلك لدينا الخطأ المطلق:

$$E = |\alpha_x| = 0.0251$$

كما يمكن أن نعتمد القيمة 0.03 كحد أعلى من القيمة E ونرمز له بـ ε_x أي:

$$\varepsilon_x = 0.03$$

(طبعاً يمكن اعتبار أي قيمة أكبر من القيمة السابقة مثل 0.04 و 0.05 فقط كحد أعلى أيضاً لـ E).

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

حل المعادلات الجبرية غير الخطية

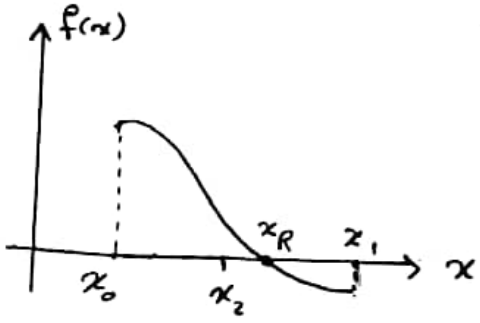
نبحث عن حل المعادلة $f(x)=0$

مثلاً المعادلة : $e^x - x = 0$

- نعلم أنّ بعض المعادلات لها حلول مركبة (عقدية) مثل المعادلة $x^2+1=0$
وهذا ليس مجال بحثنا في السامة الحقيقية .
والخطوة الأولى لحل هذا النوع من المعادلات تكمن في عزل الجذر ضمن مجال صغير
وذلك كي نضمن عدم وجود أكثر من جذر ضمن هذا المجال .

أ- طريقة التنصيف :

تتلخص في عزل الجذر المطلوب x_R ضمن مجال $[x_0, x_1]$ حيث x_R جذر بسيط كما في الشكل :



أولاً : نتحقق من الشرط :

$$f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$$

ثانياً : نحسب نصف المجال :

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_0 + x_1)$$

ونوجد $f(x_2)$

إذا كان الجداء $f(x_2) \cdot f(x_1) > 0$ فإنّ x_R موجود ضمن $[x_0, x_2]$

وإذا كان الجداء $f(x_2) \cdot f(x_1) < 0$ فإنّ x_R موجود ضمن $[x_1, x_2]$

ونضع x_2 بدل x_0 .

ثمّ نعيد العمل بنفس الطريقة حتى الحصول على الدقة التي نرغب بها .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال: أوجد الجذر التقريبي للمعادلة :

$$f(x) = \ln(x) - x + 1.9013 = 0$$

ضمن المجال $[2.8, 3.1]$ بطريقة التنصيف .

الحل: لنضع $x_0 = 2.8$ و $x_1 = 3.1$

عندئذٍ

$$f(x_0) = f(2.8) = 0.131$$

$$f(x_1) = f(3.1) = -0.067$$

$$\rightarrow f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$$

إذن يوجد حل لهذه المعادلة ضمن المجال $x_2 \in [x_0, x_1] = [2.8, 3.1]$

- لنأخذ نصف المجال السابق :

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_0 + x_1) = 2.95 \quad ; \quad x_2 \in [x_0, x_1]$$

$$f(x_2) = f(2.95) = 0.03$$

$$\rightarrow f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$$

إذن يوجد حل لهذه المعادلة ضمن المجال الجديد : $x_3 \in [x_1, x_2]$

$$x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = 3.025$$

$$f(x_3) = f(3.025) = -0.0167$$

$$\rightarrow f(x_2) \cdot f(x_3) < 0$$

إذن يوجد حل جديد ضمن المجال الجديد : $x_4 \in [x_2, x_3]$

وهكذا :

نكمل حتى الحصول على الدقة المطلوبة للحل .

مثال (2): احسب جذور المعادلة $f(x) = x^3 - 2x - 5 = 0$ الواقعة ضمن المجال $[2, 3]$ وذلك باستخدام طريقة التنصيف .

انتهت المحاضرة .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner