التكامل العددي :

تستخدم طريقة التكامل العددي عادةً لحساب قيمة التكاملات للتوابع وذلك عندما لانستطيع حساب هذه التكاملات تحليلياً أو عندما يكون التابع المكامل معروفاً بقيمه فقط . هنالك عدد كبير من الطرق المستخدمة لحساب التكاملات العددية وسنذكر بعضاً من هذه الطرق :

- علاقة نيوتن - كوتس :

لحساب التكامل $I = \int_a^b f(x)\,dx$ نقوم بالاستعاضة عن التابع المستكمل $f(x)$ بكثيرة حدود استفاء داخلي ، ولتكن هنا كثيرة حدود الاستفاء الداخلي للاغرانج $p(x)$. ولتجزيء المجال (a,b) إلى n جزء متساوياً وبفرض أن الخطوة $h = \frac{b-a}{n}$ بوساطة النقاط $x_i = a + ih$ حيث $i = 0,1,2,\dots,n$.

وحيث أن $y_i = f(x_i)$ ، عندئذٍ يمكن إعطاء التكامل العددي بالعلاقة :

$$I_n = \sum_{i=0}^{n} g_i^{(n)} \cdot y_i$$

لنبدل الآن قيمة كثيرة حدود لاغرانج :

$$I_n = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} L_i^{(n)}(x) \cdot y_i \, dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \int_a^b L_i^{(n)}(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} g_i^{(n)} \cdot y_i$$

حيث أن : $L_i^{(n)}(x)$ كثيرة حدود لاغرانج

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

و $g_i^{(n)} = \int_a^b L_i^{(n)}(x)\,dx$ تسمى ثوابت الطريقة المستخدمة في التكامل العددي.

⇐ لنأخذ الآن الحالات التالية لـ n لنحصل على طرائق عدة لحساب التكامل:

(1) طريقة شبه المنحرف (عندما $n=1$):

$$n=1 \rightarrow g_0^{(1)} = \int_a^b L_0^{(1)}(x)\,dx = \int_a^b \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\,dx =$$

$$= h\cdot\int_0^1 (1-q)\,dq = \frac{h}{2}$$

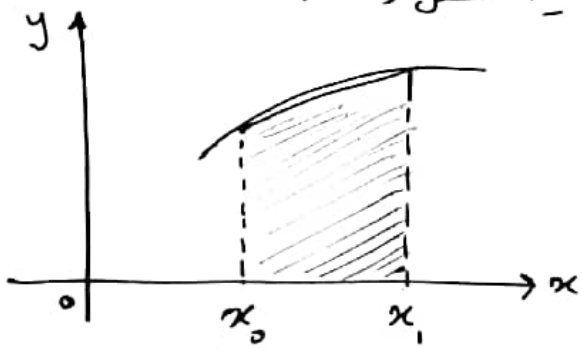
حيث $(x = x_0 + qh)$.

وبالتالي من أجل نقطتين نجد أن صيغة التكامل تأخذ الشكل:

$$\boxed{I_1 = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)}$$

تعرف هذه الصيغة بصيغة شبه المنحرف لأنها عبارة عن مساحة شبه منحرف كقيمة تقريبية للتكامل بدلاً من المساحة بين المنحني ومحور الفواصل والمستقيمين $y=x_0$ و $y=x_1$ كما في الشكل (1):

الشكل (1)



(2) صيغة سيمبسون للتكامل العددي (عندما $n=2$):

باستخدام نفس العمل في حالة $n=1$ نجد أن:

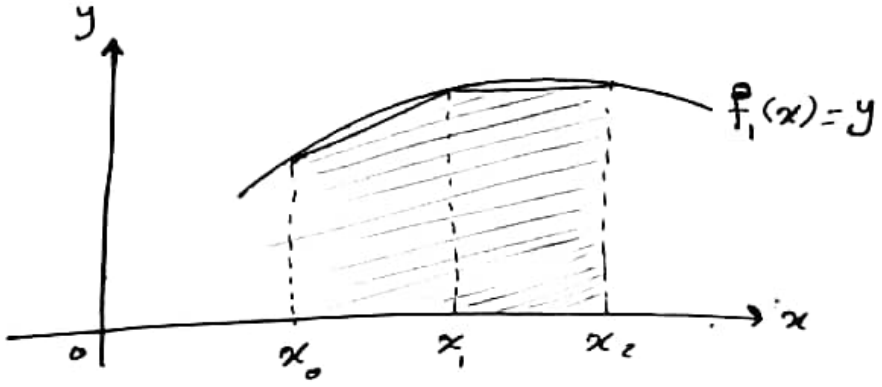
$$g_0^{(2)} = \frac{h}{3} \quad , \quad g_1^{(2)} = \frac{4h}{3} \quad , \quad g_2^{(2)} = \frac{h}{3}$$

وبالتالي فإن قيمة التكامل التقريبية في هذه الحالة هي:

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$I_2 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

تعرف هذه الصيغة باسم "صيغة سيمبسون" للتكامل العددي، الشكل (2) يبين آلية الحساب وفق هذه الصيغة.



الشكل (2)

③ "صيغة $\frac{3}{8}$" للتكامل العددي (عندما $n = 3$):

نحصل على الصيغة التالية:

$$I_3 = \frac{3}{8}h(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)$$

مثال (1): احسب التكامل $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ مستخدماً الطرق السابقة.

الحل: 1) بطريقة شبه المنحرف:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{1} = 1 \quad , \quad x_0 = 0 \quad , \quad x_1 = x_0 + h = 0 + 1 = 1$$

$$y_0 = f(x_0) = f(0) = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$y_1 = f(x_1) = f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

ومنه:

$$I_1 = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 0.75$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

2)- بطريقة سيمبسون :

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x_0 = 0,\ x_1 = x_0 + h = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2},\ x_2 = x_1 + h = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$y_0 = f(x_0) = 1,\ y_1 = f(x_1) = \frac{2}{3},\ y_2 = f(x_2) = \frac{1}{2}$$

ومنه :

$$I_2 = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) = \frac{1}{6}\left(1 + 4 \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{25}{36} \approx 0.6944$$

3) بطريقة $\frac{3}{8}$:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{3} = \frac{1}{3}$$

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = \frac{2}{3},\ x_3 = 1$$

$$y_0 = f(x_0) = 1,\ y_1 = \frac{3}{4},\ y_2 = \frac{3}{5},\ y_3 = \frac{1}{2}$$

ومنه :

$$I_3 = \frac{3}{8} \times h\,(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 + \frac{9}{4} + \frac{9}{5} + \frac{1}{2}\right) = \frac{111}{160} = 0.69375$$

• الآن لو حسبنا القيمة الحقيقية للتكامل نجد أنها تساوي :

$$I = \left[\ln(1+x)\right]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = 0.69315$$

الحل الدقيق

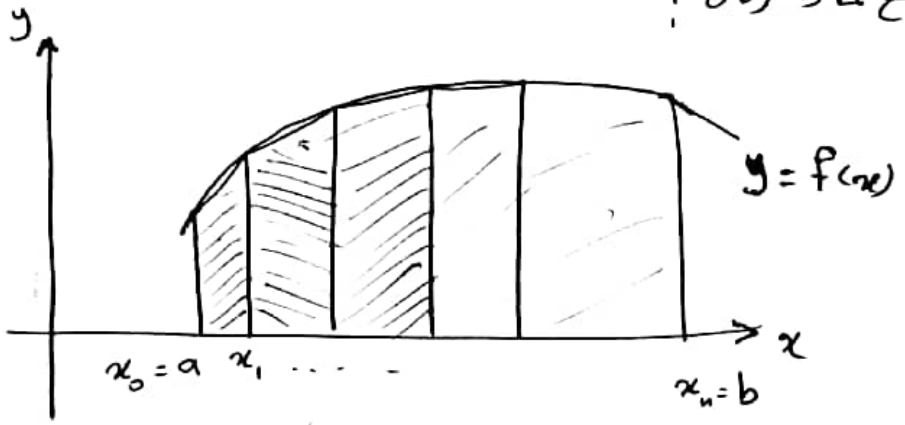
حساب الخطأ في طريقة $\frac{3}{8}$ (الخطأ المطلق) :

$$E = |I - I_3| = |0.69315 - 0.69375| = 0.0006$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

* قاعدة شبه المنحرف المركبة :

يمكن تحسين طريقة شبه المنحرف وذلك بزيادة عدد نقاط التقسيم أي تصغير قيم المجالات الجزئية h بعد تقسيم وحساب قيمة التكامل على كل مجال جزئي حسب قاعدة شبه المنحرف ثم نجمع هذه القيم ، نأخذ الشكل الآتي و الجمع كما ذكرناه :



نحصل على العلاقة العامة (المركبة) التالية :

$$I_1 = \frac{b-a}{2n}\left[f(x_0) + 2\left(f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_{n-1})\right) + f(x_n)\right]$$

مثال (2):

$$I = \int_0^4 e^x \, dx$$

باستخدام طريقة شبه المنحرف المركبة وذلك بتقسيم المجال $(0, 4)$ إلى أربع أقسام متساوية . $(n = 4)$

الحل : لدينا : $h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-0}{4} = 1$ ومنه بتطبيق العلاقة السابقة :

$$I = \frac{1}{2}\left(e^0 + 2\left(e^1+e^2+e^3\right) + e^4\right) = 57.991950$$

إن الحل الدقيق : $I = \left[e^x\right]_0^4 = e^4 - e^0 = 53.598150$

والخطأ المطلق :

$$E = \left|53.598150 - 57.991950\right| = 4.3938$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمارين : 1) استخدم طريقة شبه المنحرف وسيمبسون في التكامل لإيجاد كل من التكاملات الآتية :

a) $\int_1^2 \ln(x)\,dx$

b) $\int_0^{0.4} e^{3x}\cos(2x)\,dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2(x)\,dx$

الحل : a) شبه المنحرف 0.34657

سيمبسون 0.38583

b) شبه المنحرف : 0.39914

سيمبسون : 0.40371

c) شبه المنحرف : 0.39270

سيمبسون : 0.30543

2) احسب $I=\int_0^2 x^2 e^{-x^2}dx$ باستخدام شبه المنحرف المركبة من أجل $n=8$

الحل : $I = 0.4215820$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner