تحليل عددي - الجلسة الثالثة - نظري . والاسبوع الثالثة

- أصفار كثيرات الحدود :

ليكن كثير الحدود من الدرجة n :

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_0$$

إنّ حساب جذور (أصفار) معادلات كثيرات الحدود السابق من الدرجة 1 أو 2 و 3 و 4 يمكن حسابها بطرق كلاسيكية .
ولحساب هذه الجذور لدرجات أكبر نستخدم طرق عددية تقريبية تكرارية .
- سنقدم طريقة هورنر لحساب قيمة كثير حدود من الدرجة n في نقطة $x=a$.

* طريقة هورنر :

تستخدم طريقة هورنر لحساب قيمة كثير حدود في نقطة ، نشر تايلور لكثير حدود في نقطة ، إيجاد مشتقات كثير حدود في نقطة (مشتقات متتالية) .

- لنوضح تطبيق الطريقة السابقة بالأمثلة العملية الآتية :

مثال(١) : طبق طريقة هورنر لتحويل كثيرة الحدود التالية :

$$P(x) = 4x^3 + 2x^3 - 3x + 4$$

إلى كثيرة حدود بدلالة $(x-2)$ ثم أوجد قيمة $P(x)$ ومشتقاتها المتتالية من أجل $x=2$.

الحل : لنشكل جدول هورنر :

$P(x)$:	4	0	2	0	-3	4
$x=2$		8	16	36	72	138
	4	8	18	36	69	$142 = A_0$
		8	32	100	272	
	4	16	50	136	$341 = A_1$	
		8	48	196		
	4	24	98	$332 = A_2$		
		8	64			
	4	32	$162 = A_3$			
		8				
	4	$40 = A_4$				
	4	$= A_5$				

(1)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

لنكتب نشر كثير الحدود $P(x)$ حسب طريقة هورنر :

$$P(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \dots + A_n(x-a)^n$$

$$P(x) = 142 + 341(x-2) + 332(x-2)^2 + 162(x-2)^3 + 40(x-2)^4 + 4(x-2)^5$$

ونعطى الدستور الرئيسي الذي يعطي قيمة كثير الحدود $P(x)$ ومشتقاته المتتالية في نقطة $(x=2)$ بالعلاقة :

$$A_n = \frac{1}{n!} P^{(n)}(a) \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots, 5$$

أي

$$A_n = n! \cdot A_n$$

$n = 0 \rightarrow P(2) = 0! \times A_0 = 1 \times 142 = 142$

$n = 1 \rightarrow P'(2) = 1! \times A_1 = 1 \times 341 = 341$

$n = 2 \rightarrow P''(2) = 2! \times A_2 = 664$

$n = 3 \rightarrow P'''(2) = 3! \times A_3 = 972$

$n = 4 \rightarrow P^{(4)}(2) = 4! \times A_4 = 960$

$n = 5 \rightarrow P^{(5)}(2) = 5! \times A_5 = 480$

---

* إيجاد جذور معادلة $f(x) = 0$ باستخدام طريقة هورنر :

مثال : أوجد جميع الجذور للمعادلة :

$$x^5 + 2x^4 - 18x^3 - 8x^2 + 41x + 30 = 0$$

الحل : قواسم العدد 30 هي :

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30$$

لنختبر $(x = +1)$ حسب طريقة هورنر :

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

	1	2	-18	-8	41	30
(1)	-	1	3	-15	-23	18
	1	3	-15	-23	18	48

$R=48$ فالعدد (+1) ليس جذراً للمعادلة .

- للتحقق (-1):

	1	2	-18	-8	41	30
(-1)	-	-1	-1	19	-11	-30
	(+1)	1	-19	11	30	0

إذن $x=-1$ جذر للمعادلة

$$(x+1)(x^4+x^3-19x^2+11x+30)=0$$

$$x^4+x^3-19x^2+11x+30=0$$

من أجل $(x=+2)$:

	1	1	-19	11	30
(2)	-	2	6	-26	-30
	1	3	-13	-15	0

إذن $x=2$ جذر للمعادلة ، أصبح لدينا :

$$(x+1)(x-2)(x^3+3x^2-13x-15)=0$$

$$x^3+3x^2-13x-15=0$$

قواسم العدد 15 هي : ± 1 ، ± 3 ، ± 5 ، ± 15

للتحقق $(x=3)$ كحل للمعادلة الأخيرة :

	1	3	-13	-15
(3)	-	3	18	15
	1	6	5	0

$x=3$ جذر للمعادلة ، إذن :

$$(x+1)(x-2)(x^3+3x^2-13x-15)=0$$

$$(x+1)(x-2)(x^2+6x+5)=0$$

$$(x+1)(x-2)(x-3)(x+5)=0$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

إذن جذور المعادلة هي :

$x = -5$ ، $x = 3$ ، $x = 2$ ، $x = -1$ مكررة

تمارين : 1) أوجد ناتج قسمة كثيرة الحدود التالية باستخدام طريقة هورنر، ثم أوجد قيمتها وقيم مشتقاتها المتتالية من أجل $x = 3$:

$$P(x) = x^5 - 5x^3 + 8x - 12$$

2) طبق طريقة هورنر لتحويل كثيرة الحدود التالية :

$$P(x) = 2x^6 + x^4 - 3x^3 + 2x - 1 = 0$$

إلى كثيرة حدود بدلالة $x = 2$ ، ثم أوجد قيمة كثيرة الحدود ومشتقاتها المتتالية في النقطة $x = 2$ باستخدام جدول هورنر .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

« الطرائق العددية لحل جملة المعادلات الجبرية الخطية »

إنّ حلّ المعادلات الخطية الموافقة لعدد من المسائل في العلوم التطبيقية و الهندسية وكذلك في العلوم الاجتماعية والعلوم الاقتصادية تعطى كما هو معلوم بشكل عام بالشكل المصفوفاتي التالي :

$$A.X = B$$

والتي تكتب بشكل مفصّل كما يلي :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots \quad \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

من أجل $x_1, x_2, \dots, x_n$ مجهول ، تكون الثوابت a_{ij} و b_i معلومة حيث : $i,j = 1, 2, \dots, n$

هناك طرائق جبرية مباشرة لحل هذه المجموعة من المعادلات مثل كرامر وغيرها من الطرائق المباشرة الأخرى ، وهناك طرائق تعرف باسم طرائق تقريبية غير مباشرة تحتاج لتكرارات عديدة للحصول على الحل التقريبي مثل طريقة جاكوبي وطريقة غوص - سايدل وغيرها من الطرائق العددية .

1- طريقة جاكوبي : لنعرض طريقة الحل لهذه من خلال مجموعة ثلاثة معادلات خطية بثلاثة مجاهيل :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أولاً: نحل المعادلة الأولى بالنسبة لـ x_1 , المعادلة الثانية بالنسبة لـ x_2 وهكذا ... ، وهذا نعطي :

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)$$

$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)$$

$$x_3 = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)$$

نضع للطرف الأول من المعادلات السابقة دليل علوي $(k+1)$ وهو للمجاهيل في الطرف الثاني دليل علوي (k) :

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_2^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)})$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)})$$

ولنعطِ للمجاهيل الثلاثة قيماً ابتدائية اختيارية $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, $x_3^{(0)}$ ونعوض في الطرف الأيمن من المعادلات السابقة فنحصل على القيم الجديدة ، أي نعطي قيم لـ (k) تبدأ من الصفر ...

وهكذا بنفس الطريقة نعوض القيم الجديدة $x_1^{(1)}$ ، $x_2^{(1)}$ ، $x_3^{(1)}$ من جديد في الطرف الأيمن فنحصل على حل جديد آخر ، أي تقريب ثاني للحل $x_1^{(2)}$ ، $x_2^{(2)}$ ، $x_3^{(2)}$ وهكذا ...

ملاحظة : إذا لم نعطِ الحل الابتدائي نأخذ الحل التقريبي الصفري $(0,0,0)$

- وبداية الحل نتأكد من شرط الحل للجملة :

$$\max_i \left(\frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \right) < 1 \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال: لتكن جملة المعادلات الخطية:

$$10x_1 - 2x_2 + x_3 = 9$$
$$x_1 + 5x_2 - x_3 = 8$$
$$4x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 32$$

أوجد حل هذه الجملة باستخدام طريقة جاكوبي.

الحل: لنتحقق من شرط تقارب الحل:

$$\max_i \left(\frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{3} |a_{ij}| \right) < 1 \quad , \; i = 1, 2, 3$$

$$i=1 \Rightarrow \frac{1}{a_{11}} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{3} |a_{ij}| \right) = \frac{1}{10} \left(|-2| + |1| \right) = \frac{3}{10} < 1$$

$$i=2 \Rightarrow \frac{1}{a_{22}} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{3} |a_{ij}| \right) = \frac{1}{5} \left(|a_{21}| + |a_{23}| \right)$$
$$= \frac{1}{5} \left(|1| + |-1| \right) = \frac{2}{5} < 1$$

$$i=3 \rightarrow \frac{1}{a_{33}} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{3} |a_{ij}| \right) = \frac{1}{8} \left(|a_{31}| + |a_{32}| \right) = \frac{6}{8} < 1$$

نلاحظ أن:

$$Max \left(\frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \frac{6}{8} \right) < 1$$

وهذا يعني أن شرط تقارب الحل محقق.

نعزل x_1 ، x_2 و x_3 على الترتيب نحصل على:

$$x_1 = \frac{1}{10} (9 + 2x_2 - x_3)$$

$$x_2 = \frac{1}{5} (8 - x_1 + x_3)$$

$$x_3 = \frac{1}{8} (32 - 4x_1 - 2x_2)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

عندئذٍ نجد العلاقات التكرارية التي تعطي الحلول هي :

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{10}\left(9 + 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{5}\left(8 - x_1^{(k)} + x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{8}\left(32 - 4x_1^{(k)} - 2x_2^{(k)}\right) \end{aligned}\right\} \quad \cdots (1)$$

حيث :

$k = 0, 1, 2, \ldots$

لدينا الحل التقريبي الابتدائي

$$X^{(0)} = (0, 0, 0) \leftarrow x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$$

$k=0 \Rightarrow$ بالتعويض في (1)

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \frac{1}{10}\left(9 + 2x_2^{(0)} - x_3^{(0)}\right) = \frac{9}{10} \\ x_2^{(1)} = \frac{1}{5}\left(8 - x_1^{(0)} + x_3^{(0)}\right) = \frac{8}{5} \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{8}\left(32 - 4x_1^{(0)} - 2x_2^{(0)}\right) = \frac{32}{8} = 4 \end{cases}$$

إذن الحل التقريبي الأول هو :

$$X^{(1)} = \left(\frac{9}{10}, \frac{8}{5}, 4\right)$$

$k=1 \Rightarrow$ بالتعويض في (1)

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = \frac{1}{10}\left(9 + 2x_2^{(1)} - x_3^{(1)}\right) = \frac{1}{10}\left(9 + 2\left(\frac{8}{5}\right) - 4\right) = 0.82 \\ x_2^{(2)} = \frac{1}{5}\left(8 - x_1^{(1)} + x_3^{(1)}\right) = \frac{1}{5}\left(8 - \frac{9}{10} + 4\right) = 2.22 \\ x_3^{(2)} = \frac{1}{8}\left(32 - 4x_1^{(1)} - 2x_2^{(1)}\right) = \frac{1}{8}\left(32 - 4\times\frac{9}{10} - 2\times\frac{8}{5}\right) = 3.15 \end{cases}$$

إذن الحل التقريبي الثاني هو :

$$X^{(2)} = (0.82, 2.22, 3.15)$$

وبالاستمرار نحصل على التكرارات المتتالية . . . .

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تمارين: ① استخدم طريقة جاكوبي لحل جملة المعادلات الخطية الآتية:

$$12x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 18$$
$$-x_1 + 8x_2 - 2x_3 = -32$$
$$-x_1 + 3x_2 + 12x_3 = 6$$

تحقق من شرط تقارب الحل على الأرجح أوجد حل تقريبي واحد $X^{(1)}$ باعتبار الحل الابتدائي صفري $X^{(0)} = (0, 0, 0)$.

② حل جملة المعادلات الخطية التالية باستخدام طريقة جاكوبي:

~~$10x_1 - 2x_2 + \dots$~~

$$4x_1 + 0.24x_2 - 0.08x_3 = 8$$
$$0.09x_1 + 3x_2 - 0.15x_3 = 9$$
$$0.04x_1 - 0.08x_2 + 4x_3 = 20$$

---

2 طريقة غوص - سايدل:

هذه الطريقة أيضاً لحل جملة معادلات خطية مع تعديل بسيط لطريقة جاكوبي، إذ أننا في كل مرة نستفيد من التقريبات الناتجة.

يعطى في هذه الطريقة n معادلة بـ n مجهول وحل ابتدائي (إذا لم يعطى هذا التقريب نأخذ الحل الصفري).

نتأكد من شرط الحل: $\max_i \left(\frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right) < 1$

حيث $(i = 1, 2, \dots, n)$.

وهو الشرط نفسه في طريقة جاكوبي.

- من أجل حل ابتدائي يمكن لطريقة غوص - سايدل أن تقارب من الحل الحقيقي بينما لا تتقارب منه طريقة جاكوبي. يبرهن أن طريقة غوص - سايدل تتقارب مرتين أسرع من طريقة جاكوبي ولذلك تعتبر طريقة غوص - سايدل أفضل من طريقة جاكوبي.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

- مثال : حل جملة المعادلات الخطية الآتية بطريقة غوص-سايدل :

$$4x_1 + 3x_2 = 24$$
$$2x_1 + 4x_2 - x_3 = 30$$
$$-x_2 + 4x_3 = -24$$

تحقق من شروط التقارب للحل على الأرض ، أوجد الحل واحد فقط ، واعتمد على الحل الابتدائي $X^{\circ} = (1, 1, 1)$

الحل : لنتحقق من شرط التقارب :

$$\max_i \left(\frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{3} |a_{ij}| \right) < 1 \quad ; \; i = 1, 2, 3$$

$$i=1 \rightarrow \frac{1}{|a_{11}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{3} |a_{ij}| = \frac{1}{4}(|3|) = \frac{3}{4} < 1$$

$$i=2 \rightarrow \frac{1}{|a_{22}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{3} |a_{ij}| = \frac{1}{4}(|2| + |-1|) = \frac{3}{4} < 1$$

$$i=3 \rightarrow \frac{1}{|a_{33}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{3} |a_{ij}| = \frac{1}{4}(|-1|) = \frac{1}{4} < 0$$

نلاحظ أن : $\max_i \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4} \right) < 1$ وشرط تقارب الحل تحقق :

بعزل x_1 و x_2 و x_3 من المعادلات الثلاثة على الترتيب :

$$x_1 = \frac{1}{4}(24 - 3x_2)$$
$$x_2 = \frac{1}{4}(30 - 2x_1 + x_3)$$
$$x_3 = \frac{1}{4}(-24 + x_2)$$

عندئذ العلاقات التكرارية التي تعطي الحلول هي :

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}(24 - 3x_2^{(k)})$$
$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{4}(30 - 2x_1^{(k)} + x_3^{(k)})$$
$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{4}(-24 + x_2^{(k)})$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

لدينا الحل الابتدائي $x^{(0)} = (1, 1, 1)$

$k=0 \rightarrow$

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{4}(24 - 3x_2^{(0)}) = \frac{1}{4}(24-3) = \frac{21}{4}$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{4}(30 - 2x_1^{(1)} + x_3^{(0)}) = \frac{1}{4}(30 - 2\times\frac{21}{4} + 1) = 5.125$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{4}(-24 + x_2^{(1)}) = \frac{1}{4}(-24 + 5.125) = -4.71875$$

$$\rightarrow X^{(1)} = (\frac{21}{4}, 5.125, 4.71875)$$

تدريب: ① حل جملة المعادلات الخطية التالية باستخدام طريقة غوص-سايدل:

$$4x_1 - x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 9$$
$$-x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 2$$

تحقق من شرط تقارب الحل على الأرجح، وأوجد حل واحد فقط.

على اعتبار الحل الابتدائي هو الصفر $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$

انتهت المحاضرة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner