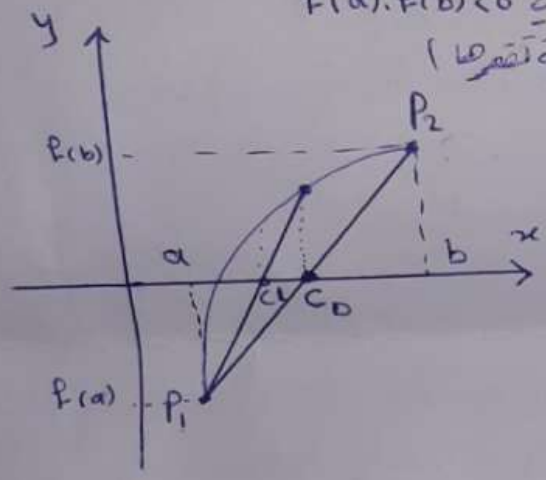
حل معادلة جبرية غير خطية :

② طريقة لاغرانج (طريقة القواطع) :

نفرض لدينا المعادلة $f(x)=0$ حيث $f(x)$ دالة مستمرة في المجال $[a,b]$ ونفرض أننا استطعنا أن نقوم بعزل جذراً وحيداً ضمن المجال المذكور وإذا كان هذا المجال صغيراً بقدر كافٍ فإنه يمكننا أن نستعيض عن القاطع بدلاً من قوس المنحني للمجال المذكور حيث $f(a).f(b)<0$

ونفرض أنه $f''(x)\neq 0 \ \forall a<x<b$ (أي لا تغير جهة تقعرها)



عندئذ يمكننا كتابة معادلة القاطع المار من النقطتين $P_1(a, f(a))$ و $P_2(b, f(b))$ حيث يعطى معادلة مستقيم مار من نقطتين بالعلاقة :

$$y-y_0 = m(x-x_0)$$

حيث الميل :

$$m = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$$

ومنه :

$$y-f(b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b)$$

من هذه المعادلة نحصل على نقطة تقاطع القاطع مع محور السينات حيث $y=0$ $x=c_0$

$$\Rightarrow \quad -f(b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(c_0-b)$$

$$\Rightarrow \quad c_0 = b - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(b)$$

عندئذٍ نميز ثلاثة احتمالات :

Scanned by CamScanner

1) اذا كان $f(a).f(c_0) < 0$ عندئذ سيقع الجذر في المجال $[a, c_0]$

2) اذا كان $f(b).f(c_0) < 0$ عندئذ سيقع الجذر في المجال $[c_0, b]$

3) إذا كان $f(c) = 0$ يكون c هو الجذر المطلوب

* اذا كان $f(c) \neq 0$ عندئذ يمكننا التحقق من وفق الاحتمالين (1) و (2) وبالتالي سيتم حصر هذا الجذر بمتتالية من المجالات $\{[a_i, b_i]\}$
اذن في كل خطوة نقترب من الجذر وفق علاقة تكرارية من الشكل

$$c_i = b_i - \frac{b_i - a_i}{f(b_i) - f(a_i)} f(b_i)$$

مثال:

أوجد جذر المعادلة $f(x) = x^3 - 0.2x^2 - 0.2x - 1.2 = 0$
والواقع ضمن المجال $(1, 1.5)$ مستخدماً طريقة الاوتار (القواطع) أوجد خطيين متتاليين فقط، مقرّب الحل لثلاثة أرقام عشرية.

الحل: لنضع $a = 1$ ، $b = 1.5$

$$\left.\begin{aligned} f(a) &= f(1) = -0.6 \\ f(b) &= f(1.5) = 1.425 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(a) \cdot f(b) < 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 0.4x - 0.2$$
$$f''(x) = 6x - 0.4 \neq 0 \quad \forall 1 < x < 1.5$$

حساب التقريب الأول:

$$c_0 = b - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(b)$$

$$= 1.5 - \frac{1.5 - 1}{1.425 + 0.6} (1.425) = 1.148$$

Scanned by CamScanner

$f(c_0) = f(1.148) = -0.18$

نلاحظ أنه

$f(c_0) \cdot f(b) < 0$

وبالتالي يكون المجال الجديد $[1.148, 1.5]$
$a \quad b$

حساب التقريب الثاني:

$$c_1 = 1.5 - \frac{1.5 - 1.148}{1.425 + 0.18}(1.425)$$

$$= 1.187$$

مثال:

استخدم طريقة الأوتار (القواطع) لإيجاد جذر المعادلة $f(x) = x^3 + 3x - 1 = 0$ والواقع ضمن المجال $[0, 1]$

أوجد خطوتين متتاليتين فقط، قرّب الحل لمقارنة أرقام عشرية

الحل:

نضع $a = 0 \quad , \quad b = 1$

$$\left.\begin{aligned} f(a) = f(0) &= -1 \\ f(b) = f(1) &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(a) \cdot f(b) < 0$$

$$f'(x) = 3x^2 + 3$$
$$f''(x) = 6x \neq 0 \quad \forall \quad 0 < x < 1$$

حساب التقريب الأول:

$$c_0 = b - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} \cdot f(b)$$

$$c_0 = 1 - \frac{1 - 0}{3 + 1}(3) = 0.25$$

$$f(c_0) = f(0.25) = -0.234$$

Scanned by CamScanner

نلاحظ أنه:

$$f(c_1) \cdot f(b) = f(0.25) \cdot f(1) < 0$$

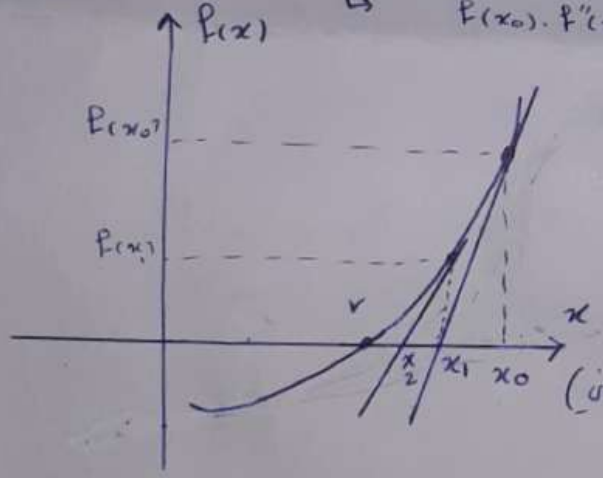
وبالتالي يكون المجال الجديد $[0.25, 1]$

حساب التقريب الثاني

$$c_1 = 1 - \frac{1-0.25}{3+0.234}(3) = 0.304$$

(3) طريقة نيوتن أو طريقة المماسات

نفرض لدينا المعادلة $f(x) = 0$ حيث $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ مستمرة قرب جذر r، ولتكن x_0 جذر ابتدائي (نقطة معطاة) حيث $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ ونفرض أن منحنى التابع f معطى بالشكل:



نرسم مماس المنحنى في النقطة $(x_0, f(x_0))$ عندئذ يقطع محور xx' في نقطة x_1 وهو التقريب الأول ومن هذه النقطة $(x_1, f(x_1))$ نرسم مماس عندئذ يقطع محور xx' في x_2 (التقريب الثاني) وهكذا...

إيجاد x_1:

لدينا معادلة مماس في النقطة $(x_0, f(x_0))$ تعطى بالعلاقة

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

نضع $y = 0$ من أجل إيجاد x_1 عندئذ:

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Scanned by CamScanner

وبنفس الطريقة نحصل على x_2:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

وهكذا نتابع فنجد العلاقة:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

وهو دستور نيوتن (المماسات)

مثال:

استخدم طريقة نيوتن المماسات لحساب جذر المعادلة:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5 = 0$$

من أجل $x_0 = 2.5$، احسب جذرين متتاليين مع تقريب الاجابات لأربعة أرقام عشرية

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5$$
$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

اذن دستور نيوتن يعطى بالعلاقة:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n^2 - 5}{3x_n^2 - 4x_n}$$

حساب x_1:

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 - 2x_0^2 - 5}{3x_0^2 - 4x_0}$$

$$= 2.5 - \frac{(2.5)^3 - 2(2.5)^2 - 5}{3(2.5)^2 - 4(2.5)} = 2.7143$$

Scanned by CamScanner

حساب x_2 :

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 - 2x_1^2 - 5}{3x_1^2 - 4x_1}$$

$$= 2.7143 - \frac{(2.7143)^3 - 2(2.7143)^2 - 5}{3(2.7143)^2 - 4(2.7143)}$$

$$= 2.69$$

تمرين وظيفة :

استخدم طريقة نيوتن المماسات لحل المعادلة :

$$f(x) = x^3 - 3x - 5$$

مع أخذ التقريب الأول $x_0 = 3$ ، احسب حلين متتاليين مع تقريب الإجابة لثلاثة أرقام عشرية .

تمرين :

استخدم دستور المماسات لنيوتن لإيجاد الجذر النوني لعدد ما K ثم استنتج قانون الجذر التربيعي والجذر التكعيبي

الحل : لنشكل أولاً المعادلة $f(x) = 0$ ونفرض أنّ $x = \sqrt[n]{K}$

$$\Rightarrow \quad x^n = K \quad \Rightarrow \quad f(x) = x^n - K = 0$$

$$f'(x) = n x^{n-1}$$

إنّ دستور نيوتن يعطى بالشكل :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$\Rightarrow \quad x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^n - K}{n x_i^{n-1}} = x_i - \frac{x_i^n}{n x_i^{n-1}} + \frac{K}{n x_i^{n-1}}$$

$$= x_i - \frac{x_i}{n} + \frac{K}{n x_i^{n-1}}$$

Scanned by CamScanner

$$\Rightarrow \quad x_{i+1} = \frac{n x_i - x_i}{n} + \frac{K}{n x_i^{n-1}}$$

$$= \frac{(n-1)\, x_i}{n} + \frac{K}{n x_i^{n-1}}$$

$$= \frac{(n-1)\, x_i}{n} + \frac{(n-1) K}{(n-1) n x_i^{n-1}}$$

$$= \frac{n-1}{n} \left(x_i + \frac{K}{(n-1) x_i^{n-1}} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{i+1} = \frac{n-1}{n} \left(x_i + \frac{K}{(n-1) x_i^{n-1}} \right)}$$

حصل لك قانون الجذر التربيعي من أجل $n=2$

$$n=2 \Rightarrow x_{i+1} = \frac{1}{2} \left(x_i + \frac{K}{x_i} \right)$$

حصل لك قانون الجذر التكعيبي من أجل $n=3$

$$n=3 \Rightarrow x_{i+1} = \frac{2}{3} \left(x_i + \frac{K}{2 x_i^2} \right)$$

حصل لك قانون الجذر من الرتبة الرابعة من أجل $n=4$

$$n=4 \Rightarrow x_{i+1} = \frac{3}{4} \left(x_i + \frac{K}{3 x_i^3} \right)$$

طلب اضافي:

استخدم طريقة نيوتن (الماسات) لحساب الجذر التربيعي للعدد $\sqrt{3}$ حيث $x_0 = 2$ قرب لأربعة أرقام عشرية.

لدينا:

$$x_{i+1} = \frac{1}{2} \left(x_i + \frac{K}{x_i} \right)$$

Scanned by CamScanner

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{3}{x_0}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{3}{2}\right) = 1.7500$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{3}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(1.75 + \frac{3}{1.75}\right) = 1.7321$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{3}{x_2}\right) = \frac{1}{2}\left(1.7321 + \frac{3}{1.7321}\right) = 1.7321$$

نلاحظ أنّ $x_2 = x_3$ إذن الجذر المطلوب هو 1.7321

تمرين وظيفة:

أوجد $\sqrt[3]{127}$ باستخدام طريقة نيوتن مع أخذ العتبة $x_0 = 5$

Scanned by CamScanner