الفصل الأول

المتواليات العددية

§1. تمهيد و تعاريف:

لنتأمل مجموعات الأعداد المتتالية المرتبة وفق نظام معين:

$$1, 2, 3, 4, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

إن هذه الأعداد تتوالى عدداً بعد آخر، وكل عدد يزيد بواحد عن العدد الذي يسبقه بينما مجموعة الأعداد التالية:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

فيها حاصل قسمة كل عدد على العدد الذي يسبقه يساوي $\frac{1}{2}$. وأخيراً المجموعة :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

في هذه المجموعة المقام يزيد بمقدار واحد في كل عدد عن العدد الذي يسبقه.

كل من أعداد هذه المجموعات تسمى متوالية أعداد نظراً لوجود علاقة ثابتة بين كل عدد والعدد الذي يليه بالترتيب.

1–1– تعريف متوالية الأعداد:

تعرّف متوالية الأعداد بأنها تابع معرّف على مجموعة الأعداد الطبيعية N ونرمز لقيم هذا التابع بـ $f(n) = a_n$، حيث تسمى حدود المتوالية، ونسمي العدد n برقم الحد a_n.

نكتب المتوالية بالشكل: $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots , a_n , \ldots$

أو بشكل مختصر: $\{a_n\} \quad , \quad n \in N$.

يسمى العدد a_1 بالحد الأول للمتوالية والعدد a_2 بالحد الثاني للمتوالية، والعدد a_n بالحد العام للمتواليه (الحد النوني).

أمثلة على المتواليات:

1– **المتوالية:** $1,2,3, \ldots\ldots\ldots, n, \ldots\ldots\ldots$ حدها العام $a_n = n$

2- **المتوالية:** $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\ldots\ldots\ldots,\frac{1}{2^n},\ldots\ldots\ldots$ حدها العام $a_n=\frac{1}{2^n}$

3- **المتوالية:** $\ldots\ldots,-1,+1,-1,\ldots\ldots\ldots,+1,-1,\ldots$ حدها العام $a_n=(-1)^n$

4- **المتوالية:** $2,2,2,\ldots\ldots\ldots,2,\ldots\ldots\ldots$ حدها العام $a_n=2$

المتوالية الأخيرة تعتبر مثالاً على المتوالية الثابتة.

مثـــال:

اكتب الحدود الأربعة الأولى للمتوالية التي حدها العام: $a_n=\frac{1}{2^{n-1}}$

الحـــل: بأخذ $n=1,2,3,4$ على التوالي نجد أن:

$$a_1=\frac{1}{2^0}=1,\ a_2=\frac{1}{2^1}=\frac{1}{2},\ a_3=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4},a_4=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}\ldots\ldots\ldots$$

وتكون المتوالية المطلوبة هي:

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}$$

مثـــال:

أوجد الحد العام للمتوالية:

$$1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16},\frac{1}{25}$$

الحـــل: يمكن كتابة حدود المتوالية كما يلي:

$$a_1=\frac{1}{1^2},\ a_2=\frac{1}{2^2},a_3=\frac{1}{3^2},a_4=\frac{1}{4^2}$$

نستنتج أن الحد العام هو: $a_n=\frac{1}{n^2}$

- إذا حدد في متوالية الحد الأخير سميت متوالية منتهية، وعندما يكون عدد حـــدودها غير منتهِ سميت المتوالية غير منتهية.

1ــ 2ــ تعريف المتوالية المحدودة:

نسمي المتوالية $\{a_n\}$ محدودة إذا وجد عدد موجب M بحيث أنه من أجـــل أي $n\in N$ فإن المتراجحة: $|a_n|\le M$ محققة.

وفي الحالة المعاكسة تسمى المتوالية غير محدودة.

مثـــال: المتواليتان $a_n = \frac{1}{n^4}$, $a_n = (-1)^n$ محدودتان.

لأن المتوالية الأولى: $0 \le \frac{1}{n^4} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{1}{n^4}\right| \le 1$

وكذلك المتوالية الثانية: $-1 \le (-1)^n \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \left|(-1)^n\right| \le 1$

3-1 ـ تعريف المتوالية المتزايدة:

نسمي المتوالية $\{ a_n \}$ متزايدة إذا كان مــن أجــل أي عــدد $n \in N$ تكــون المتراجحة التالية محققة: $a_{n+1} > a_n$.

وتسمى المتوالية $\{a_n\}$ متناقصة، إذا كان من أجــل أي عــدد $n \in N$ تكــون المتراجحة التالية محققة: $a_{n+1} < a_n$.

مثـــال:

بيّن أن المتوالية: $a_n = \frac{n}{n+1} \; ; \; n = 1,2,3,\ldots\ldots..$ متزايدة.

الحـــل: لأجل ذلك يجب أن نبرهن أنه من أجل كل عدد $n \in N$ فإن المتراجحة: $a_{n+1} > a_n$ أو $a_{n+1} - a_n > 0$ محققة.

بالفعل هذا محقق فبعد تبديل كل n بـــ $n+1$ وإجراء الطرح نجد أن:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} > 0$$

مثـــال: المتوالية $1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \ldots\ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots\ldots$ متناقصة لأن:

$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$ مهما كانت قيمة n . وبالتالي فإن $a_{n+1} < a_n$ متوالية متناقصة.

1 ـ4 ـ تعريف نهاية متوالية:

لتكن $\{ a_n \}$ متوالية ما ، نقول عنها أنها متقاربة ونهايتها L. ونكتب:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

عندما تتقارب حدودها من L من أجل قيم n كبيرة بقدر كاف، وإذا لــم تكــن المتوالية متقاربة نقول عنها أنها متباعدة.

مثـــال: حدد فيما إذا كانت المتوالية $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ متقاربة أم متباعدة.

الحـــل: إن حدود المتوالية: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\ldots\ldots$. تدنو من العدد $L = 0$ عنـــدما تأخذ n قيماً أكبر فأكبر.

إذن المتوالية متقاربة $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

مثـــال:

تنتج شركة شمعات اشتعال محركات، نـــسبة الـــشمعات العاطلـــة منهـــا 2% واحتمال الحصول على شمعة عاطلة واحدة على الأقل في عينة عشوائية مكونة مـــن n شمعة هو: $f(n) = 1 - (0.98)^n$ والمطلوب:

أوجد الحدود a_5 ، a_{10} ، a_{25} ، a_{100} ، a_{200} من هذه المتوالية واحـــسب $\ell im_{n\to\infty} a_n$ وفسرّ الجواب.

الحـــل: لدينا متوالية معرّفة بالعلاقة التالية: $a_n = f(n) = 1 - (0.98)^n$ وبحساب هذه الحدود وفق العلاقة السابقة نجد أن الحدود المطلوبة هي:

$$a_5 = 0.10\ ,\ a_{10} = 0.18\ ,\ a_{25} = 0.40\ ,\ a_{100} = 0.87\ ,\ a_{200} = 0.98$$

فعلى سبيل المثال احتمال الحصول على شمعة اشتعال عاطلة على الأقـــل فـــي عينة عشوائية مكونة من 25 شمعة 0.4 أي 40%. لحساب $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ نكتب:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - (0.98)^n\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} (0.98)^n = 1 - 0 = 1$$

ويفسّر الجواب كالآتي، إذا كان حجم العينة كبيراً بقدر كاف فإنها تحوي علـــى شمعة عاطلة واحدة على الأقل.

سنقتصر في دراستنا في هذا الفصل على المتواليـــات الحـــسابية والمتواليـــات الهندسية. وللمتواليات تطبيقات عديدة منها في مجال حساب القيمة الحالية للقـــروض، وإيجاد أقساط الدفعات المالية.

2.§ المتوالية الحسابية:

المتوالية الحسابية هي متوالية أعداد ينتج كل حد من حدودها، بدءاً مـــن الحـــد الثاني بعد إضافة مقدار ثابت (موجب أو سالب) للمقدار السابق لـــه، يـــسمى المقـــدار

الثابت الذي يضاف لأي حد من حدودها بأساس المتوالية الحسابية ونرمز له بـــالحرف d كما نرمز للحد الأول منها بالرمز a.

تسمى المتوالية الحسابية متزايدة إذا كان كل حد من حدودها أكبر من الحد الذي يسبقه (أي أنه إذا كان $d > 0$). ونسمي المتوالية الحسابية متناقصة إذا كان أي حد فيها أقل من الحد السابق له (أي أنه إذا كان $d < 0$).

2 ــ 1ــ قانون الحد العام للمتوالية الحسابية:

إن أي حد من حدود متوالية حسابية يساوي إلى حدها الأول $a = a_1$ مـــضافاً إليه عدد الحدود السابقة له مضروباً بأساس المتوالية d ، ونعبر عن ذلـــك رياضـــياً بالقانون:

$$a_n = a + (n-1)d \quad , \quad n \in N$$

يعطى أساس المتوالية الحسابية بالعلاقة :

$$\boxed{d = a_n - a_{n-1}}$$

- كل حد من حدود متوالية حسابية بدءاً من حدها الثاني، هو وسط حـــسابي للحـــدين المتساويان البعد عنه، أي أن:

$$a_k = \frac{a_{k-n} + a_{k+n}}{2} \, , \; k \in N \, , \; n \in N \, , \; k - n > 0$$

- في كل متوالية حسابية يكون فيها : $a_K + a_\ell = a_n + a_m$ بشرط: $k + \ell = n + m$
- إن كل حد من حدود متوالية حسابية بدءاً من حدها الثاني، هو وسط حسابي للحدين السابق واللاحق له، أي أن: $a_K = \dfrac{a_{K-1} + a_{K+1}}{2}$

2ــ2 ــ مجموع الحدود الـــ n الأولى للمتوالية الحسابية:

لتكن لدينا المتوالية الحسابية التالية:

$$a_1 = a \, , \, a_2 = a + d \, , \, a_3 = a + 2d , \cdots\cdots\cdots , \, a_n = a + (n-1)d$$

ونرمز لمجموعها بـــ S_n فنكتب:

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \cdots\cdots\cdots + a + (n-1)d$$

هذا المجموع يمكن كتابة على الشكل التالي وذلك بإعادة ترتيبه بالعكس :

$$S_n = a + (n-1)d + \cdots\cdots\cdots + (a+2d) + (a+d) + a$$

بجمع كل حدين متقابلين بالترتيب من المجموعين السابقين نحصل على:

$$2S_n = [2a+(n-1)d]+[2a+(n-1)d]+\cdots\cdots+[2a+(n-1)d]$$

إن عدد الحدود في هذا المجموع n حد وبالتالي يكون:

$$2S_n = n[2a+(n-1)d]$$

ومنه:

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]}$$

وهذه العلاقة تمثل مجموع الحدود الـــ n الأولى لمتوالية حسابية.

كما يمكن كتابة العلاقة السابقة بدلالة الحد الأخير بالشكل التالي:

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}[a+a_n]}$$

من خلال العلاقة الأخيرة يمكننا حساب مجموع متوالية حسابية بمعرفة حـــديها الأول والأخير وعدد حدودها.

- اعتماداً على قانون الاستقراء الرياضي يمكن إثبات أن مجموع أعداد طبيعية متماثلة الأس:

$$1+2+3+\dots\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+3^2+\dots\dots+n^2 = \frac{n(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+3^3+\dots\dots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

أمثلة على المتواليات الحسابية:

مثال:

أوجد عدد الحدود ومجموع متوالية حسابية حـــدها الأول 0 وأساســـها $d=\frac{1}{2}$ وحدها الأخير يساوي 5.

الحـــل: من نص المسألة نجد أن: $a=0 \;,\; d=\frac{1}{2} \;,\; a_n=5$

باستخدام العلاقة: $a_n = a+(n-1)d$

نجد:

$$n-1=\frac{a_n-a}{d}$$

$$n=\frac{a_n-a}{d}+1$$

$$n=\frac{5-0}{\frac{1}{2}}+1=10+1=11$$

$$S_n=\frac{n}{2}(a+a_n)=\frac{11}{2}(0+5)=\frac{55}{2}=27.5$$

مثـــال:

أوجد الحد الأول والأساس وعدد الحــدود لمتواليـــة حـــسابية حـــدها الأخيـــر $a_n=55$ و $S_{15}=412.5$ و $a_2+a_5=32.5$.

الحـــل:

انطلاقاً من:

$$a_2+a_5=32.5$$

$$(a+d)+(a+4d)=32.5$$

$$2a+5d=32.5 \qquad (1)$$

ومن الفرض نجد أن:

$$S_{15}=412.5$$

$$\frac{15}{2}(a+a_{15})=412.5$$

$$15a+105d=412.5 \qquad (2)$$

بحل جملة المعادلتين (1) و (2) نحصل على: $a=10 \;,\; d=2.5$

وبالتعويض في العلاقة:

$n=\frac{a_n-a}{d}+1$ نجد أن: $n=\frac{55-10}{2.5}+1=19$

مثـــال: إذا كانت العلاوة السنوية لراتب مدير مصنع هي 600 ل.س، وكان راتبه في آخر سنة عمل بها في المصنع قد بلغ 3300 ل.س وإجمالي دخله طوال فترة عمله في هذه الوظيفة هو 10500 ل.س. **والمطلوب:**

احسب قيمة الراتب لمدير المصنع عند بداية التعيين وعدد سنوات الخدمة.

الحــل:

بفرض أن مقدار الراتب عند بداية التعين هي a، ومقدار الزيادة الـسنوية هــي $d = 600$ ، فإن الراتب في السنة الثانية سيكون $a + 600$ والراتب في السنة الأخيرة هو 3300 ل.س وهو يمثل الحد الأخير مــن متواليــة حــسابية متزايــدة أساســها $d = 600 > 0$.

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$3300 = \mathrm{a} + (\mathrm{n}-1)600 \qquad (1)$$

وإن مجموع ما يتقاضاه يمثل مجموع حدود متوالية حسابية:

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$

$$10500 = \frac{\mathrm{n}}{2}\left[2\mathrm{a} + (\mathrm{n}-1)600\right] \qquad (2)$$

من المعادلة (1) نجد أن: $a = 3900 - 600n$

بالتعويض في المعادلة (2) نجد:

$$10500 = \frac{n}{2}\left[2(3900 - 600n) + (n-1)600\right]$$

بعد الإصلاح نحصل على معادلة من الدرجة الثانية بــالمتحول n وهــي مــن الشكل:

$$n^2 - 12n + 35 = 0$$

$$(n-7)\cdot(n-5) = 0$$

ومنه نجد أن $n = 7$ أو $n = 5$

من أجل $n = 7$ تكون قيمة $a = -300$ مرفوضة.

ومن أجل $n = 5$ تكون قيمة $a = 900$ مقبولة.

ومعنى ذلك أن مدة الخدمة هي 5 سنوات ومقدار الراتب عنــد بدايــة التعــين هو 900 ل.س.

مثـــال: أودع محمد مبلغ 1000 ل.س بفائدة بسيطة شهرية % 1 في أحد المــصارف.

احسب رصيده في نهاية سنة من تاريخ الإيداع.

الحــل: إن المبلغ المودع في بداية السنة وقدره 1000 ل.س يمثل الحد الأول لمتوالية حسابية، حدود هذه المتوالية هي:

$$1000\ ,\ 1010\ ,\ 1020\ ,\ 1030\ ,\ 1040\ ,\ \ldots\ldots\ldots$$

نرى أن أساسها هو $d=10$. لحساب الرصيد في نهاية السنة نوجد الحد a_{12}:

$$a_{12}=a+(n-1)\cdot d$$
$$=1000+(12-1)10=1110\ \ s\cdot p$$

§3. المتوالية الهندسية:

المتوالية الهندسية هي متوالية أعداد، كل حد من حدودها بدءاً من الحد الثـاني يساوي إلى الحد السابق له مضروباً بمقدار ثابت (موجب أو سالب)، نـسمي المقـدار الثابت بأساس المتوالية الهندسية ونرمز له بـالرمز r ، ونرمـز للحـد الأول فيهـا بالحرف a.

يحسب أساس المتوالية الهندسية من العلاقة: $r=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\quad ,\ n\geq 1$

فمثلا المتوالية: $20\ ,10\ ,5\ ,\dfrac{5}{2}\ ,\ \ldots\ldots\ldots$

هي متوالية هندسية أساسها $r=\dfrac{1}{2}$ وحدها الأول $a=20$

يعطى الشكل العام لمتوالية هندسية حدها الأول a وأساسها r وعدد حدودها n بالشكل الآتي:

$$a\ ,\ a\cdot r\ ,\ a\cdot r^2\ ,\ a\cdot r^3\ ,\ldots\ldots\ldots,\ a\cdot r^{n-1}$$

3ـ1ـ قانون الحد العام للمتوالية الهندسية:

كل حد من حدود متوالية هندسية بدءاً من الحد الثاني يساوي إلى الحد الأول a مضروباً بأساس المتوالية r المرفوع إلى قوة تساوي إلى عدد الحدود الـسابقة لـذلك الحد. أي أن: $a_n=a\cdot r^{n-1}$

- مربع كل حد من حدود متوالية هندسية بدءاً من الحد الثاني يساوي جـداء الحـدين المتساويين في البعد عنه أي: $a_k^2=a_{k-n}\ .\ a_{k+n}$
- في كل متوالية هندسية تكون المساواة: $a_k\ .\ a_\ell=a_n\ .\ a_m$ محققة بشرط:

$$k+\ell=n+m$$

• مربع كل حد من حدود المتوالية الهندسية يساوي جداء الحدين السابق واللاحق له:

$$a_n{}^2 = a_{n-1} . a_{n+1}$$

3ـ2ـ مجموع الحدود الـ n الأولى للمتوالية الهندسية :

لإيجاد مجموع الحدود الـ n الأولى للمتوالية الهندسية:

$$a\,,\, a\cdot r\,,\, a\cdot r^2\,,\, a\cdot r^3\,,\cdots\cdots\cdots,\, a\cdot r^{n-1}$$

نفرض أن مجموع حدودها S_n ، أي أن:

$$S_n = a + ar + ar^2 + \ldots\ldots\ldots + ar^{n-1} \qquad (1)$$

نضرب طرفي المساواة (1) بـ r:

$$r\cdot S_n = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots\ldots + ar^n \qquad (2)$$

بطرح(2) من (1) نحصل على:

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$(1-r)S_n = a(1-r^n)$$

ومنه: $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ بشرط : $r \neq 1$

عندما يكون أساس المتوالية الهندسية r مساوياً للواحد $(r=1)$ فإن المتواليـــة تتحول إلى متوالية ثابتة: $a, a, a, \cdots\cdots\cdots, a$ ويكون مجموعها $n\cdot a$.

يمكن كتابة قانون مجموع الحدود الـ n الأولى لمتوالية هندسية بالصورة الآتية :

$$S_n = \frac{a - r\cdot a_n}{1-r} \quad , \quad r \neq 1$$

3ـ3ـ المتوالية الهندسية اللانهائية:

نسمي المتوالية الهندسية $\{a_n\}$ متوالية هندسية لانهائية إذا كـــان أساســـها r بالقيمة المطلقة أقل من الواحد أي أن: $|r| < 1$ وبملاحظة أن: $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$

فيكون مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية والتي نرمز لها بالرمز S_∞ هو:

$$S_\infty = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} \lim_{n\to\infty}(1-r^n) = \frac{a}{1-r}\,(\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} r^n)$$

ومنه يكون:

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

أمثـلة على المتواليات الهندسية:

مثــال: أوجد مجموع الحدود الـ 12 الأولى للمتوالية الهندسية: $4\ ,-8\ ,16\ ,-32$

الحــل: لدينا $a=4$ ، $r=-2$ ، $n=12$

$$S_n=\frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r}\quad ,\qquad r\neq 1$$

$$S_{12}=\frac{4\left(1-(-2)^{12}\right)}{1-(-2)}=-5460$$

مثــال: أوجد الحد الأول ومجموع الحدود العشرة الأولى للمتوالية الهندسية:

$$a_{10}=7\ ,\ n=10\ ,\ r=\frac{1}{2}$$

الحــل: انطلاقاً من العلاقة: $a_{10}=ar^9 \quad \Rightarrow \quad a_n=ar^{n-1}$

$$a=\frac{a_{10}}{r^9}=\frac{7}{\left(\frac{1}{2}\right)^9}=7.(2)^9=3584$$

ومنه بالتعويض نجد:

$$S_{10}=\frac{3584\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1-\frac{1}{2}}=7161$$

مثــال:

متوالية هندسية مؤلفة من (6) حدود، مجموع الحدود الثلاثة الأولى منها يساوي 168 ومجموع الحدود الثلاثة الأخيرة يساوي 21. أوجد حدود هذه المتوالية.

الحــل:

$$a_1+a_2+a_3=168$$
$$a_4+a_5+a_6=21$$

أو يمكن كتابتها حسب تعريف المتوالية الهندسية بالشكل التالي:

$$a+ar+ar^2=168$$

أو

$$ar^3+ar^4+ar^5=21$$

$$\mathrm{a}\left(1+\mathrm{r}+\mathrm{r}^2\right)=168 \qquad (1)$$

$$ar^3\left(1+r+r^2\right)=21 \qquad (2)$$

بتقسيم (2) على (1) نحصل على:

$$r^3=\frac{21}{168}=\frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad r=\frac{1}{2}$$

وبتعويض قيمة $r=\frac{1}{2}$ في المعادلة (1) نحصل على قيمة $a=96$.

والمتوالية المطلوبة هي: 96 , 48 , 24 , 12 , 6 , 3

مثـــال:

عبّر عن الكسر العشري المتكرر: $0.232323\cdots\cdots$ بصورة كسر عادي.

الحـــل:

بحسب التمثيل العشري نستطيع كتابة الرقم $0.232323\cdots\cdots$ بالشكل التالي:

$$0.232323\cdots\cdots=\frac{23}{100}+\frac{23}{10000}+\frac{23}{1000000}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{23}{100}+\frac{23}{100}\left(\frac{1}{100}\right)+\frac{23}{100}\left(\frac{1}{100}\right)^2+\cdots\cdots$$

وهذا المجموع يمثل متوالية هندسية لانهائية حـــدها الأول $a=\frac{23}{100}$ وأساســـها $\frac{1}{100}$ ويكون مجموعها S_∞

$$S_\infty=\frac{\frac{23}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{23}{100}\left(\frac{100}{99}\right)=\frac{23}{99}$$

إذن

$$0.232323\cdots\cdots=\frac{23}{99}$$

تمارين ومسائل غير محلولة

1- اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتواليات الآتية:

1) $a_n = 2^{n-1}$

2) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$

3) $a_n = \dfrac{2^{n-1}}{n!}$

4) $a_n = \dfrac{e^n}{n^3}$

5) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n!}$

2- أوجد الحد العام لكل من المتواليات الآتية:

$$1, 4, 7, 10, \ldots\ldots$$

$$1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots\ldots$$

$$2, \frac{8}{5}, \frac{32}{25}, \frac{128}{125}, \ldots\ldots$$

$$1, l, \frac{l^2}{2}, \frac{l^3}{6}, \frac{l^4}{24}, \ldots\ldots$$

3- إذا علمت أن الحد رقم (21) والحد رقم (35) لمتوالية حسابية هما (64) و (106) على الترتيب. أوجد الحدود الثلاثة الأولى لهذه المتوالية.

الجواب: $4, 7, 10$

4- إذا علمت أن الحد الخامس والحد السابع لمتوالية هندسية هما: 324 و 2916 على الترتيب. أوجد الحدود الثلاثة الأولى لهذه المتوالية.

الجواب: $4, 12, 36 \quad if \quad r = 3 \qquad 4, -12, 36 \quad if \quad r = -3$

5 - احسب مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية: $1, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{16}, -\dfrac{1}{64}, \ldots\ldots$

الجواب: $S_\infty = \dfrac{4}{5}$

6- أوجد الحدود الخمسة الأولى للمتوالية المعرّفة بالشكل: $a_n = 3(a_{n-1} + 2)$

حيث: $a_1 = a = 1$.

الجواب: 1 , 9 , 33 , 105 , 321

7- إذا كانت : 2 , x , y , 17 متوالية حسابية، فأوجد قيم y, x.

الجواب: $x = 7,\ y = 12$

8- إذا كان مجموع ثلاثة حدود متعاقبة في متوالية حسابية تساوي 15 وجداؤهم يساوي 80 فأوجد الحدود الثلاثة. (توجيه : أرمز للحد الأوسط بـ y).

الجواب: 8 , 5 , 2 أو 2 , 5 , 8

9- إذا علمت أن الحد الثالث في متوالية هندسية يساوي $\frac{63}{4}$ والحد السادس منها يساوي $\frac{1701}{32}$ فأوجد الحد الخامس فيها.

الجواب: $a_5 = \frac{567}{16}$

10- لدينا متوالية حسابية حدها الأول 5 والحد الـ (50) فيها يساوي (103)، كم حداً يجب أن نضيف إليها ليصبح مجموعها (572).

الجواب: $n = 22$

11 - إذا كانت الأعداد a,b,c تشكل متوالية هندسية، أثبت أن الأعداد:

$\frac{1}{\log_a N}, \frac{1}{\log_b N}, \frac{1}{\log_c N}$ تشكل متوالية حسابية.

12- احسب جداء الأعداد : $10^{\frac{1}{10}}, 10^{\frac{2}{10}}, 10^{\frac{2}{10}}, \cdots\cdots\cdots, 10^{\frac{19}{10}}$.

الجواب: 10^{19}

13- اكتب الكسر العشري المتكرر $0.22222\cdots\cdots\cdots$ بصورة كسر عادي.

الجواب: $\frac{2}{9}$

14- أوجد مجموع الحدود الـ 19 الأولى لمتوالية حسابية فيها:

$$a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$$

الجواب: 1064

15– أوجد مجموع كل الأعداد ثلاثية الأرقام ومن مضاعفات العدد خمسة.

الجواب: 98550

16 – متوالية حسابية فيها:

$$a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 15$$
$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 12.5$$

أوجد حدها الأول وأساسها.

الجواب: $d = 0.5$, $a_1 = 0.5$

17– لدينا متوالية هندسية فيها:

$$a_1 + a_3 + a_5 + \ldots\ldots = \frac{16}{3}$$
$$a_2 + a_4 + a_6 + \ldots\ldots = \frac{4}{3}$$

أوجد الحدود الثلاثة الأولى منها.

الجواب: $5 , \frac{5}{4} , \frac{5}{16}$

الفصل الثاني
الفائدة البسيطة والفائدة المركبة

§.1. مقدمة وتعاريف:

تأتي أهمية استخدام معدل (سعر) الفائدة كأداة من أدوات السياسة الاقتصادية، حيث أن الطلب على الاستثمار يتعلق بسعر الفائدة، فإذا كان سعر الفائدة منخفضاً فإن الطلب على الاستثمار سيكون كبيراً مما يؤدي إلى زيادة النشاط الإنتاجي، وبالعكس إذا كان سعر الفائدة مرتفعاً فإن الطلب على الاستثمار سيكون قليلاً وهذا سيؤدي إلى قلة النشاط الإنتاجي.

يلعب سعر الفائدة دوراً كبيراً في تحقيق الاستقرار والنمو الاقتصاديين وتحفيز الاستثمار كما يربط سعر الفائدة بين سوق السلع والخدمات وسوق النقد.

إن الفائدة هي التكلفة التي تتحملها المنشآت الاقتصادية بأنواعها المختلفة الصناعية والتجارية لقاء الحصول على رأس المال، فالفائدة عملياً هي تكلفة رأس المال.

تقسم الفائدة إلى نوعين هما: الفائدة البسيطة والفائدة المركبة، تستخدم الفائدة البسيطة في حالة الاستثمارات والقروض قصيرة الأجل التي مدتها سنة واحدة فما دون، بينما تطبق الفائدة المركبة في حالة الاستثمارات والقروض طويلة الأجل مدتها الزمنية أكثر من سنة.

وللفائدة المركبة تطبيقات كثيرة في المجالات الاقتصادية كمسائل الإنتاج والاستثمار، وفي مختلف المجالات العلمية والاجتماعية والسكانية.

يتحدد سعر الفائدة تبعاً لعوامل عدة منها عرض النقود وطلبها والتضخم النقدي.

1ـ1ـ تعريف الفائدة البسيطة:

هي العائد أو التعويض المادي الناتج عن استثمار أو اقتراض أموال الغير خلال فترة زمنية معنية، نسمي المبلغ المقترض بالأصل، وتحسب الفائدة كنسبة مئوية سنوية

من الأصل دائماً طوال فترة استخدام القرض، أي أن الفوائد المخصصة لا تضاف إلى أصل المبلغ.

تحتوي معادلة الفائدة البسيطة على ثلاث مركبات:

1- الأصل (المبلغ المقترض أو المبلغ المستثمر) ونرمز له بـ C.

2- معدل أو سعر الفائدة وتقدر بالسنوات (نسبة مئوية في السنة) ونرمز له بـ i.

3- دورة الاستثمار أو الاقتراض ونرمز لها بـ n.

وتعطى معادلة الفائدة البسيطة بالعلاقة: $C_n = C(1+i\cdot n)$

حيث أن C_n جملة المبلغ بعد n سنة وتسمى (القيمة المستقبلية للمبلغ C).

مثـــال:

اقترض شخص من أحد المصارف مبلغاً من المال مقداره 1000 ل.س بمعدل فائدة بسيطة % 5 سنوياً. أوجد القيمة المستقبلية للمبلغ وذلك:

1- بعد عامين.

2- بعد ثلاثة اشهر.

3- بعد 180 يوم.

الحـــل:

1) من المعلومات المعطاة: $n=2$ ، $i=0.05$ ، $C=1000$

ومن معادلة الفائدة البسيطة: $C_n = C(1+i\cdot n)$

$$C_2 = 1000[1+(0.05)\cdot(2)] = 1000(1.1) = 1100\ S\cdot P$$

2) إن ثلاثة شهور تمثل ربع عام إذن: $n=\dfrac{3}{12}=0.25$

$$C_{0.25} = 1000[1+(0.05)\cdot(0.25)] = 1000(1.0125) = 1012.5\ S\cdot P$$

3) في معظم المعاملات المالية يعتبر العام 360 يوماً ومنه: $n=\dfrac{180}{360}=0.5$

$$C_{0.5} = 1000[1+(0.05)\cdot(0.5)] = 1000(1.025) = 1025\ S\cdot P$$

1-2- تعريف الفائدة المركبة:

هي الفائدة التي تضاف إلى الأصل (المبلغ الأصلي) في نهاية كل وحدة زمن معينة وتستثمر معه لتشكل أصلاً جديداً (رأسمالاً جديداً) للدورة الزمنية التالية تحـسب

عليه الفائدة من جديد. بمعنى أنه في الدورة الزمنية الجديدة تحسب فائدة علـــى أصـــل المبلغ وفائدة على فائدة أصل المبلغ في الدورة الزمنية السابقة. هنا الأصـــل (المبلـــغ الأصلي) متغير دائماً، حيث تحسب الفائدة في كل دورة زمنية على جملة المبلـــغ فـــي الدورة الزمنية السابقة.

• **معدل الفائدة:**

هو فائدة وحدة نقدية واحدة (ليرة واحدة) في نهاية كل دورة زمنية (سنة مثلاً) ويرمز لمعدل الفائدة بالرمز i ويعبر عنه بالشكل $i\ \%$.

1ـ3ـ معادلة الفائدة المركبة:

إذا فرضنا أن شخصاً أودع مبلغ C ل.س في أحد المـــصارف لمـــدة n مـــن السنوات بفائدة معدلها $i\ \%$ سنوياً فتكون الفائدة المستحقة على المبلغ C فـــي نهايـــة السنة الأولى أي عندما $n=1$:

$$I_1 = C.i.n = C.i$$

وجملة المبلغ C في نهاية السنة الأولى C_1 :

$$C_1 = C + C\,i = C\left(1+i\right)$$

وهي تمثل الأصل المستثمر في بداية السنة الثانية، وإذا ترك المبلغ لمدة ســـنة ثانية ولم يسحب هذا الشخص فوائد السنة الأولى بل تركها تضاف لأصل المبلـــغ فـــي نفس الحساب، في هذه الحالة ستحسب الفائدة على الأصـــل الجديـــد وهـــو $C(1+i)$ وستكون الفائدة هي:

$$I_2 = C_1 \cdot i = C\left(1+i\right)\cdot i$$

وجملة المبلغ C_1 في نهاية السنة الثانية:

$$C_2 = C_1 + I_2 = C\left(1+i\right) + C\left(1+i\right)\cdot i$$

وبإخراج $C(1+i)$ عامل مشترك نجد:

$$= C\left(1+i\right)\cdot(1+i) = C(1+i)^2$$

وهذا الأخير يمثل الأصل المستثمر في بداية السنة الثالثة.

وبالاستمرار بهذه الطريقة ستكون جملة المبلغ في نهاية السنة الثالثة هي:

$$C_3 = C_2 + C_2 \cdot i = C_2(1+i) = C(1+i)^3$$

بشكل عام جملة مبلغ C ل.س (القيمة المستقبلية لمبلـــغ C) مـــستثمر بفائـــدة مركبة $i\ \%$ سنوياً لمدة n من السنوات ستكون:

$$C_n = C(1+i)^n$$

إن مقدار الفائدة المستحقة عن مبلغ C لمدة n من السنوات تحسب من العلاقة:

$$I = C_n - C = C(1+i)^n - C$$

$$I = C\,[(1+i)^n - 1]$$

مثـــال:

أوجد جملة مبلغ (القيمة المستقبلية) 500 ل.س مستثمر بمعدل فائـدة 12 % سنوياً.

1- بعد شهر.

2- بعد سنة.

3- بعد خمس سنوات.

وذلك في حالة الفائدة البسيطة وفي حالة الفائدة المركبة.

الحـــل:

- **في حالة الفائدة البسيطة نستخدم القانون:** $C_n = C(1+i\cdot n)$

1- جملة المبلغ بعد شهر هي:

$$C_n = 500\left(1+0.12\times\frac{1}{12}\right) = 505 \quad S.p$$

2- جملة المبلغ بعد سنة هي:

$$C_1 = 500(1+0.12(1)) = 560 \quad S.p$$

3- جملة المبلغ بعد خمس سنوات هي:

$$C_5 = 500(1+0.12(5)) = 800 \quad S.p$$

- **في حالة الفائدة المركبة نستخدم القانون:** $C_n = C(1+i)^n$

1- جملة المبلغ بعد شهر على أساس معدل فائدة مركبة هي:

$$C_n = 500(1+0.12)^{\frac{1}{12}} = 500(1.12)^{0.085}$$
$$= 500(1.0094507) = 504.72 \quad S.p$$

2- جملة المبلغ بعد سنة على أساس الفائدة المركبة هي:

$$C_1 = 500(1+0.12)^1 = 560 \quad S.p$$

3- جملة المبلغ بعد خمس سنوات هي:

$$C_5 = 500(1+0.12)^5 = 500(1.12)^5$$
$$= 500(1.7623417) = 881.170 \quad S.p$$

بمقارنة جملة المبلغ في حالتي الفائدة البسيطة والفائدة المركبة نلاحظ أن الجملة في حالة الفائدة البسيطة أكبر من الجملة في حالة الفائدة المركبة عندما تكون المدة n أقل من سنة وتتساوى الجملتان عندما تكون المدة سنة واحدة $(n=1)$، وتكون الجملة في حالة الفائدة المركبة أكبر من الجملة في حالة الفائدة البسيطة عندما $n>1$ (أي عندما تكون المدة n أكبر من سنة).

مثـــال:

استثمر شخص مبلغاً من المال قدره 000 100 ل.س في مصرف يمنح فائـــدة مركبة معدلها % 4 سنوياً حتى نهاية مدة ما، وفي نهاية المدة وجد أن جملة ما تكوّن له 148024.43 ل.س، احسب مدة استثمار هذا المبلغ.

الحــل: نعلم أن: $C_n = 148024.43\,,\ \ i = 0.04\ ,\ C = 100000$

من معادلة الفائدة المركبة: $C_n = C(1+i)^n$

بالتعويض نجد: $148024.43 = 100\,000(1+0.04)^n$

ومنه: $(1.04)^n = \dfrac{14804.43}{100000} = 1.4802443$

نأخذ لغاريتم الطرفين: $\ln(1.04)^n = \ln(1.4802443)$

وحسب خواص اللغاريتم نجد: $n \cdot \ln(1.04) = \ln(1.4802443)$

$$n = \frac{\ln(1.4802443)}{\ln(1.04)} = \frac{0.39220714}{0.039220713} = 10$$

إذن مدة الاستثمار هي عشر سنوات.

مثـــال:

أوجد معدل الفائدة المركبة إذا كانت جملة المبلـــغ 55839.478 ل.س بعـــد 10 سنوات هي 000 100 ل.س.

الحــل: نعلم أن: $n = 10$ ، $C_{10} = 100000$ ، $C = 55839.478$

من معادلة الفائدة المركبة: $C_n = C(1+i)^n$

$$100000 = 55839.478(1+i)^{10}$$

$$\frac{100000}{55839.478} = (1+i)^{10} \quad \Rightarrow \quad 1.790847686 = (1+i)^{10}$$

$$(1+i) = (1.790847686)^{\frac{1}{10}} = (1.790847686)^{0.1} = 1.06$$

$$i = 1.06 - 1 = 0.06$$

إذن معدل الفائدة المركبة هو % 6 سنوياً.

مثـــال:

مبلغ من المال قدره C ل.س نرغب في استثماره بمعدل فائـــدة مركبـــة % 4 سنوياً لتكوين مبلغ 000 100 ل.س بعد 6 سنوات لتغطية نفقات الـــسكن. فمـــا قيمـــة المبلغ C.

الحـــل: نعلم أن: $C_6 = 100000$, $i = 0.04$, $n = 6$

ومن معادلة الفائدة المركبة نجد أن: $C_n = C(1+i)^n \Rightarrow C = C_n(1+i)^{-n}$

$$C = 100000(1+0.04)^{-6} = 100000(1.04)^{-6}$$

$$C = 100000(0.79032) = 79031.5 \quad S.p$$

1ـــ4ـــ جملة مبلغ عندما تكون مدة الاستثمار مقدّرة بالسنوات والأشهر والأيام:

إذا كانت مدة الاستثمار مقدرة بالسنوات والأشهر (أي عدداً صحيحاً وكسراً).

لنفترض أن الفترة الزمنية هي n سنة و $\frac{\alpha}{\beta}$ في الـــسنة ($\alpha < \beta$)، لحـــساب جملـــة المبلغ في نهاية الفترة الزمنية ($n + \frac{\alpha}{\beta}$) نستخدم إحدى الطريقتين:

1– نحسب فائدة المبلغ بالنسبة للفترة الزمنية n على أساس الفائدة المركبة، أما الفترة الزمنية ($\frac{\alpha}{\beta}$) فتحسب على أساس الفائدة البسيطة وتسمى هذه الطريقة بالطريقـــة الحقيقية. وتحسب من العلاقة: $C_{n+\frac{\alpha}{\beta}} = C(1+i)^n \cdot (1 + \frac{\alpha}{\beta} \cdot i)$

2– نحسب فائدة المبلغ بالنسبة للفترة الزمنية $\frac{\alpha}{\beta}$ على أساس الفائدة المركبة، وتـــسمى هذه الطريقة بالطريقة التجارية وتحسب من العلاقة:

$$C_{n+\frac{\alpha}{\beta}} = C(1+i)^{n+\frac{\alpha}{\beta}}$$

مثـــال:

احسب جملة مبلغ 000 10 ل.س مستثمر بفائدة مركبة معدلها % 6.3 ســـنوياً ولمدة 5 سنوات وثلاثة شهور.

الحـــل: من نص المسألة لدينا: $n = 5\ ,\quad C = 10000\ ,\ i = 0.063$

طريقة أولى:

يُحسب العدد الصحيح من سنوات مدة الاستثمار بقانون الفائدة المركبـــة، أمـــا العدد غير الصحيح لمدة الاستثمار (الأشهر) فيُحسب علـــى أســـاس قـــانون الفائـــدة البسيطة:

$$\begin{aligned} C_n &= 10000(1+0.063)^5\left[1+(0.063)\left(\frac{3}{12}\right)\right] \\ &= 10000(1.063)^5\left[1+(0.063)\cdot(0.25)\right] \\ &= 10000(1.3572702)(1+0.01575) = 13786.47 \quad \text{S.p} \end{aligned}$$

طريقة ثانية:

تحسب كامل مدة الاستثمار على أساس الفائدة المركبة والأشهر بـــأجزاء مـــن السنة.

$$\begin{aligned} C_n &= 10000(1+0.063)^{5+\frac{3}{12}} = 10000(1.063)^{5.25} \\ &= 10000(1.37816) = 13781.6 \quad S.p \end{aligned}$$

1ــ5ــ جملة مبلغ قدره C ل.س مستثمر لمدة n من السنوات بمعدل فائدة مركبـــة سنوية % i والفائدة مضافة m من المرات خلال السنة:

عند استثمار (اقتراض) مبلغ من المال قدره P ل.س لمدة n مـــن الـــسنوات بفائدة مركبة سنوية % i والفائدة مضافة m من المرات في السنة فإن m تأخذ القيم الآتية:

$m = 1$: الفائدة تضاف مرة واحدة في السنة الكاملة (الفائدة سنوية).

$m = 2$: الفائدة تضاف مرتان في السنة (الفائدة نصف سنوية).

$m = 3$: الفائدة تضاف ثلاث مرات في السنة (الفائدة $\frac{1}{3}$ سنوية).

$m = 4$: الفائدة تضاف أربع مرات في السنة (الفائدة فصلية أو ربع سنوية).

$m=12$: الفائدة تضاف 12 مرة في السنة (الفائدة شهرية).

$m=365$: الفائدة تضاف 365 مرة في السنة.

تعطى جملة مبلغ قدره C ل.س مستثمر n من السنوات بمعدل فائــدة مركبــة سنوية i % والفائدة مضافة m من المرات خلال السنة بالصيغة الآتية:

$$C_n = C\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\,n}$$

حيث:

Cـــ الأصل (المبلغ الأصلي) المستثمر أو المقترض.

i ـــ معدل الفائدة السنوية الذي يضاف m مرة في السنة.

mــ عدد فترات التركيب (عدد مرات إضافة الفائدة) في السنة الواحدة.

nــ عدد سنوات مدة الاستثمار (مدة الاقتراض).

إن: $\frac{i}{m}$ يمثل معدل الفائدة لفترة إضافة الفائدة (معدل الفائدة الجزئي).

مثــال:

أوجد القيمة المستقبلية (جملة) لمبلغ 1000 ل.س مستثمر لمدة 3 سنوات بمعدل فائدة مركبة سنوية 8 % تضاف:

1- مرة واحدة في السنة (الفائدة سنوية).

2- مرتان في السنة (نصف سنوية).

3- أربع مرات في السنة (فصلية).

4- 12 مرة في السنة (شهرية).

الحل: لدينا: $n=3 \quad , m=1 \quad , \ i=0.08, \quad C=1000$

1- باستخدام المعادلة:

$$C_n = C\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\,n} \Rightarrow C_n = 1000\left(1+\frac{0.08}{1}\right)^{(1)(3)} = 1259.71 \quad S.p$$

2- لدينا: $C=1000 \ , i=0.08 \ , \ m=2 \ , \ n=3$

$$C_n = 1000\left(1+\frac{0.08}{3}\right)^{(2)(3)} = 1265.32 \quad S.p$$

3- لدينا: $C=1000 \quad ,i=0.08 \ , m=4 \ , \ n=3$

$$C_n=1000\left(1+\frac{0.08}{4}\right)^{(4)(3)}=1268.24 \quad S.p$$

4- لدينا: $C=1000 \ , \ i=0.08 \ , \ m=12 \ , \ n=3$

$$C_n=1000\left(1+\frac{0.08}{12}\right)^{(12)(3)}=1271.75 \quad S.p$$

نلاحظ أن جملة المبلغ تزداد أكثر فأكثر كلما زاد عدد مرات إضافة الفائدة في السنة.

لنضع هذه النتائج في الجدول الآتي:

جملة المبلغ	الأصل المستثمر	فترة التركيب	المعدل السنوي للفائدة
$1259.71 \ S.p$	$1000 \ S.p$	سنوية $(m=1)$	8%
$1265.32 \ S.p$	$1000 \ S.p$	نصف سنوية $(m=2)$	8%
$1268.24 \ S.p$	$1000 \ S.p$	فصلية $(m=4)$	8%
$1271.75 \ S.p$	$1000 \ S.p$	شهرية $(m=12)$	8%

مثـــال:

ما المبلغ الذي يجب أن تودعه اليوم ولمدة 5 سنوات وبمعدل فائدة مركبة 10 % سنوياً حيث تضاف الفائدة كل ثلاثة شهور لتحصل على مبلغ قدره 8000 ل.س.

الحـــل: لدينا: $m=4 \ , \ n=5 \ , \ i=0.10 \ , \ C_5=8000$

باستخدام المعادلة: $C_n=C\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m.n}$

$$8000=C\left(1+\frac{0.10}{4}\right)^{(4)(5)}=C\,(1+0.025)^{20}$$

ومنه: $C=\frac{8000}{(1.025)^{25}}=4882.17 \ S\cdot P$

1 -6- الفائدة المركبة المستمرة طيلة أيام السنة:

لنفرض أن m عدد فترات التركيب في السنة (عدد مرات إضافة الفائدة في السنة) يجري باستمرار طيلة أيام السنة (أي أن $m \to \infty$ تقترب أكثر فأكثر من اللانهاية):

نعيد كتابة المعادلة:

$$C_n = C\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}$$

بالشكل التالي:

$$C_n = C\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}\right]^{n}$$

$$\lim_{m\to\infty} C\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}\right]^{n} = C\left[\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}\right]^{n}$$

لندخل متغيراً جديداً: $u = \frac{m}{i}$. حيث أن: $u \to \infty$ عندما $m \to \infty$،

وبعد التعويض نحصل على:

$$C\left[\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{ui}\right]^{n} = C\left[\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u}\right]^{in}$$

بما أن:

$$\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^{u} = e$$

ومنه نجد:

$$\ell im_{m\to\infty} C\left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}\right]^{n} = C\cdot e^{in}$$

- إن القيمة المستقبلية لمبلغ قدره P ل.س مستثمر لمدة n من السنوات بمعدل فائدة مركبة $i\%$ سنوياً تضاف بشكل مستمر طيلة أيام السنة يعطى بالعلاقة:

$$A_n = P\cdot e^{i\cdot n}$$

حيث:

C ـ الأصل (المبلغ الأصلي) المستثمر.

i ـ معدل الفائدة المركبة السنوية .

n ـ الزمن بالسنوات.

مثـــال:

أوجد القيمة المستقبلية بعد ثلاث سنوات لمبلغ قدره 1000 ل.س مستثمر بفائدة مركبة معدلها % 8 سنوياً والفائدة تضاف:

1- بشكل يومي.[1]

2- بشكل مستمر.

(1) **ملاحظة:** يمكن اعتبار عدد أيام السنة العادية 365 يوماً وعدد أيام السنة الكبيسة 366 يوماً وعدد أيام السنة التجارية 360 يوم.

الحل: $C=1000 \ , \ i=0.08 \ , \ m=365 \ , \ n=(365)(3)=1095$

1- نظراً لأن الفائدة تضاف بشكل يومي نستخدم العلاقة الآتية:

$$C_n=p\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn} \ \Rightarrow \ C_3=1000\left(1+\frac{0.08}{365}\right)^{1095} \approx 1271.20 \ \ S.p$$

2- نظراً لأن الفائدة تضاف بشكل مستمر نستخدم العلاقة الآتية:

$$C_n=pe^{in} \ \Rightarrow \ C_3=1000e^{(0.08)(3)} \approx 1271.25 \ \ S.p$$

§-2- المعدل الحقيقي والمعدل الاسمي للفائدة

المعدل الحقيقي هو المعدل الذي تتساوى مدته مع مدة إضافة الفائدة إلى رأس المال. **والمعدل الحقيقي السنوي** هو مقدار الفائدة الفعلية التي تعود على وحدة النقود في نهاية السنة على أساس أن الفائدة المستحقة عن كل فترة تضاف إلى رأس المال مجرد استحقاقها وتستثمر بالطريقة نفسها التي يستثمر بها رأس المال الأصلي.

المعدل الاسمي هو المعدل الذي لا تتطابق مدته مع مدة إضافة الفائدة إلى رأس المال. **والمعدل الاسمي السنوي** هو حاصل ضرب المعدل عن الفترة التي هي أقل من السنة في عدد الفترات الموجودة في السنة. فإذا قيل أن معدل الفائدة % 4 عن نصف السنة فإن المعدل السنوي الاسمي يكون: $4\% \times 2 = 8\%$ ونقول أن معدل الفائدة الاسمي % 8 يدفع على مرتين في السنة.

2_1_ العلاقة بين المعدل الحقيقي السنوي والمعدل الاسمي السنوي للفائدة :

لنفرض أن مبلغاً أصلياً قدره C ل.س استثمر بمعدل فائدة مركبة اسمي j يضاف m من المرات في السنة لنرمز بـ i لمعدل الفائدة الحقيقي السنوي. إن القيمة المستقبلية لمبلغ C ل.س بعد سنة واحدة هي:

$$C\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}=C\left(1+i\right)$$

نقسم طرفي المساواة على C فنجد: $\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}=1+i$

ومنه نجد : $i=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1$

من خلال هذه العلاقة يمكننا حساب معدل الفائدة الحقيقي السنوي إذا كان معدل الفائدة المركبة الاسمي معلوماً.

i ــ معدل الفائدة الحقيقي السنوي.

j ــ معدل الفائدة المركبة الاسمي الذي يضاف m مرة في السنة.

m ــ عدد مرات إضافة الفائدة على المبلغ الأصلي في السنة.

بأخذ الجذر ذي الدليل m لطرفي المساواة :

$$\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}=1+i \Rightarrow \left(1+\frac{j}{m}\right)=\left(1+i\right)^{\frac{1}{m}} \Rightarrow \frac{j}{m}=\left(1+i\right)^{\frac{1}{m}}-1$$

نجد: $j=m\left[\left(1+i\right)^{\frac{1}{m}}-1\right]$

من العلاقة الأخيرة يمكننا حساب معدل الفائدة الاسمي السنوي بدلالة معدل الفائدة الحقيقي السنوي.

مثـــال:

احسب المعدل الحقيقي السنوي الذي يقابل معدل اسمي سنوي 8 % إذا كانت الفوائد تضاف إلى الأصل:

1- مرة كل سنة.

2- كل ستة شهور.

3- كل ثلاثة شهور .

4- 12 مرة في السنة.

الحــل: لدينا: $j = 8\ \%$ والمطلوب إيجاد: $i = ?$

باستخدام القانون: $i = \left(1 + \dfrac{j}{m}\right)^m - 1$

1- في هذه الحالة نجد أن فترة المعدل الحقيقي هي نفس فترة المعدل الاســمي وهــي سنة أي:

$$i = \left(1 + \frac{0.08}{1}\right)^1 - 1 = 1.08 - 1 = 0.08 = 8\%$$ سنوياً

2- عندما: $j = 0.08$ ، $m = 2$

$$i = \left(1 + \frac{0.08}{2}\right)^2 - 1 = (1.04)^2 - 1 = 0.0816 = 8.16\ \%$$ سنوياً

3- عندما: $j = 0.08$ ، $m = 4$

$$i = \left(1 + \frac{0.08}{4}\right)^4 - 1 = (1.02)^4 - 1 = 0.08243 = 8.234\ \%$$ سنوياً

4- عندما: $j = 0.08$ ، $m = 12$

$$i = \left(1 + \frac{0.08}{12}\right)^{12} - 1 = (1.0067)^{12} - 1 = 0.08343 = 8.343\ \%$$ سنوياً

المعدل الاسمي السنوي	فترة إضافة الفائدة	المعدل الحقيقي السنوي	المبلغ الأصلي	جملة المبلغ بعد 3 سنوات
8%	سنوية	8%	1000	$1000(1+0.08)^3 = 1259.71$
8%	نصف سنوية	8.16%	1000	$1000(1+0.0816)^3 = 1265.32$
8%	فصلية	8.243%	1000	$1000(1+0.08243)^3 = 1268.23$
8%	شهرية	8.343%	1000	$1000(1+0.08343)^3 = 1271.75$

يتساوى معدل الفائدة الحقيقي السنوي مع معدل الفائدة الاسمي السنوي عندما تضاف الفائدة مرة واحدة في السنة، ويكون معدل الفائدة الحقيقي السنوي أكبر من معدل الفائدة الاسمي السنوي عندما تضاف الفائدة أكثر من مرة واحدة في السنة.

مثــال:

أوجد معدل الفائدة الحقيقي المقابل لمعدل الفائدة السنوي 8 % إذا كانت الفائدة تضاف كل ربع سنة.

الحــل:

لدينا: $j = 0.08 \quad ، \quad m = 4$

$$i = \left(1 + \frac{0.08}{4}\right)^4 - 1 = (1 + 0.02)^4 - 1 = (1.02)^4 - 1$$

$$= 1.08243215 - 1 = 0.08243216 = 8.243216\ \%$$

مثــال: يعطي أحد المصارف فائدة مركبة معدلها 6.1 % سنوياً تضاف كل ثلاثة أشهر ويعطي مصرف آخر فائدة مركبة معدلها 6 % سنوياً تضاف شهرياً. في أي المصرفين يكون الاستثمار أفضل ؟

الحــل:

للإجابة على هذا السؤال علينا أن نحسب معدلي الفائدة الحقيقيين السنويين للمصرفين، والمصرف الذي يملك معدل الفائدة الحقيقية السنوية الأكبر يكون الاستثمار فيه أفضل، لأنه يعطي مقدار فائدة أكبر.

معدل الفائدة الحقيقي السنوي للمصرف الأول i_1 هو:

$$i_1 = (1 + \frac{0.061}{4})^4 - 1 = 0.0624096$$

ومنه: $i_1 = 6.24\%$.

ومعدل الفائدة الحقيقي السنوي للمصرف الثاني i_2 هو:

$$i_2 = (1 + \frac{0.06}{12})^{12} - 1 = 0.0616778$$

ومنه: $i_2 = 6.16\%$.

نستنتج أن: $i_1 > i_2$ ويكون الاستثمار أفضل لدى المصرف الأول.

§3. خصم الديون بفائدة مركبة:

من الشائع في المعاملات المالية أن يخصم المقرض الفائدة من المبلغ المقترض مقدماً، فمثلاً إذا اقترض شخص مبلغاً قدره C ل.س من مصرف فيقوم المصرف بخصم الفائدة، وفي نهاية المدة يدفع المقترض للمصرف مبلغ C ل.س. تسمى هذه الطريقة بطريقة الخصم، ويسمى المبلغ المطروح بمقدار الخصم، والمبلغ الذي أخذه المقترض بالقيمة الحالية للقرض.

نسمي الفرق بين القيمة الحالية V_p للقرض والتي تساوي $V_p = V_n(1+i)^{-n}$ والقيمة الاسمية V_n للقرض والتي تساوي $V_n = V_p(1+i)^n$ (القيمة المستقبلية بالخصم، ونرمز للخصم بالحرف D ، حيث:

$$D = V_n - V_p = V_n - V_n(1+i)^{-n} = V_n[1-(1+i)^{-n}]$$

3–1– معدل الخصم :

معدل الخصم: هو مقدار الخصم عن مبلغ وحدة نقدية واحدة، وتستحق الدفع بعد سنة واحدة. نعلم أن:

$$D = V_n - V_p \Rightarrow V_p = V_n - D \Rightarrow \frac{V_n}{(1+i)^n} = V_n - D$$

- لإيجاد القيمة الحالية لوحدة نقدية واحدة تستحق بعد فترة زمنية قدرها سنة نعوض في العلاقة السابقة كل من: $V_n = 1 \;,\; n = 1 \;,\; D = d$ فنجد أن :

$$\frac{1}{1+i} = 1 - d \Rightarrow d = 1 - \frac{1}{1+i}$$

ومنه

$$d = \frac{1+i-1}{1+i} = \frac{i}{1+i} \Rightarrow \boxed{d = \frac{i}{1+i}}$$

وهو معدل الخصم المركب بدلالة معدل الفائدة المركبة.

- ولنحسب معدل الفائدة المركبة i بدلالة معدل الخصم:

$$d = \frac{i}{1+i} \Rightarrow d(1+i) = i. \Rightarrow d + id = i$$

ومنه:

$$d = i - id \Rightarrow d = i(1-d) \Rightarrow \boxed{i = \frac{d}{1-d}}$$

- القيمة الحالية بدلالة معدل الخصم المركب d :

$$\frac{1}{1+i} = 1-d \Rightarrow (\frac{1}{1+i})^n = (1-d)^n$$

بضرب الطرفين بـــ V_n نجد:

$$\frac{V_n}{(1+i)^n} = V_n(1-d)^n$$

ومنه:

$$\boxed{V_p = V_n(1-d)^n}$$

مثـــال:

احسب معدلات الخصم المقابلة لمعدلات الفائدة 5 % ، 6.2 % سنوياً.

الحـــل: 1-

$$d = \frac{i}{1+i} = \frac{0.05}{1+0.05} = \frac{0.05}{1.05} = 0.0476 = 4.76\%$$

2-

$$d = \frac{0.063}{1+0.062} = 0.05838 = 5.84\%$$

مثـــال:

احسب معدلات الفائدة المقابلة لمعدلات الخصم 1.96 % ، 2.439 %

الحـــل:

باستخدام العلاقة:

$$i = \frac{d}{1-d}$$

$$i = \frac{0.0196}{1-0.0196} = \frac{0.0196}{0.9804} = 2\%$$ سنوياً

$$i = \frac{0.02439}{1-0.02439} = \frac{0.0249}{0.97561} = 2.5\ \%$$ سنوياً

مثـــال:

سند قيمته الاسمية 60000 ل.س ويستحق الدفع بعد 15 عاماً من الآن، فـــإذا حسبت الفائدة المركبة بمعدل 7% سنوياً. ما مقدار الخصم؟

الحـــل: لدينا: $V_{15} = 60000$ ، $i = 0.07$ ، $n = 15$

باستخدام قانون الخصم:

$$D = V_n[1-(1+i)^{-n}] = 60000[1-(1+0.07)^{-15}]$$

$$= 60000[1-(1.07)^{-15}] = 38253.23 \quad S.p$$

§4. تسوية الديون بفائدة مركبة

إن تسوية الديون تعني سداد الديون في غير موعد استحقاقها، فإذا تأجل سداد الدين مدة ما فإن قيمته تزداد بمقدار الفوائد التي تستحق على مبلغ الدين خلال مدة التأجيل، وإذا تقدم موعد سداد الدين مدة ما فإن قيمته تنقص إلى القيمة التي لو استثمرت طول مدة التقديم لأصبحت جملتها مساوية لمبلغ الدين الأصلي، بمعنى أن القيمة الاسمية لأي دين تتغير بتغير تاريخ استحقاق الدين.

إن استبدال الديون القديمة بديون جديدة (إعادة جدولة الديون) يخضع للقاعدة الآتية:

القيمة الحالية للديون القديمة (قبل التسوية) = القيمة الحالية للديون الجديدة (بعد التسوية)

يأخذ استبدال الديون (إعادة جدولة الديون) أكثر من شكل نذكر منها:

1- استبدال الدين الأصلي بدين آخر جديد لمدة أطول (أقصر) من مدة الدين الأصلي، أي تأخير (تقديم) تاريخ استحقاق الدين الأصلي.

2- استبدال مجموعة من الديون الأصلية (القديمة) بدين واحد جديد يستحق الأداء بعد مواعيد استحقاق الديون الأصلية (القديمة).

3- استبدال مجموعة من الديون الأصلية (القديمة) بدين واحد جديد يستحق قبل مواعيد استحقاق الديون الأصلية .

4- استبدال مجموعة من الديون الأصلية بعدة ديون جديدة مختلفة سواء من حيث القيمة أومن حيث تاريخ الاستحقاق أو كلاهما معاً.

مثـــال:

تاجر مدين لدائن بالمبالغ الآتية:

30000 ل.س تستحق السداد بعد سنة واحدة من الآن .

40000 ل.س تستحق السداد بعد ثلاث سنوات من الآن.

50000 ل.س تستحق السداد بعد ست سنوات من الآن.

طلب هذا التاجر من الدائن استبدال الديون الثلاثة الأصلية بدين جديد يستحق السداد بعد ثلاث سنوات من الآن، فإذا كان معدل الفائدة المركبة % 5 ما قيمة الدين الجديد؟

الحــل: لنرمز للقيمة الاسمية للدين الجديد بــــ $V_{n'}$ ومن نص المسألة لدينا:

$$V_{n_1} = 30000 \qquad n_1 = 1 \quad ، \quad i = 0.05$$

$$V_{n_2} = 40000 \qquad n_2 = 3$$

$$V_{n_3} = 50000 \qquad n_3 = 6$$

بحسب قاعدة تسوية الديون:

القيمة الحالية للديون الثلاثة الأصلية = القيمة الحالية للدين الجديد.

$$\frac{V_{n'}}{\left(1+i\right)^{n'}} = \frac{V_{n_3}}{\left(1+i\right)^{n_3}} + \frac{V_{n_2}}{\left(1+i\right)^{n_2}} + \frac{V_{n_1}}{\left(1+i\right)^{n_1}}$$

$$\frac{V_{n'}}{(1.05)^3} = \frac{50000}{(1.05)^6} + \frac{40000}{(1.05)^3} + \frac{30000}{(1.05)^1}$$

ومنه نجد : $V_{n'} = 116266.88 \quad S.p$

مثـــال:

تاجر مدين بثلاثة ديون قيمها الاسمية هي 70000 ، 90000 ، 120000 ل.س وتستحق السداد بعد 5 , 8 , 10 سنوات على الترتيب. اتفق مع دائنة على خصم هــذه الديون. ما مقدار الخصم إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة % 12 سنوياً ؟

الحــل: $V_{n_1} = 70000 \quad ؛ \quad V_{n_2} = 90000 \quad ، \quad V_{n_3} = 120000$

$$n_1 = 5 \quad ، \quad n_2 = 8 \quad ، \quad n_3 = 10$$

القيمة الحالية للديون الثلاثة = القيمة الحالية للدين الأول + القيمة الحالية للــدين الثاني + القيمة الحالية للدين الثالث

القيمة الحالية للديون الثلاثة = $\frac{V_{n_3}}{(1+i)^{n_3}} + \frac{V_{n_2}}{(1+i)^{n_2}} + \frac{V_{n_1}}{(1+i)^{n_1}}$

القيمة الحالية للديون الثلاثة = $\frac{120000}{(1+0.12)^{10}} + \frac{90000}{(1+0.12)^8} + \frac{70000}{(1+0.12)^5}$

القيمة الحالية للديون الثلاثة = $3863.6788 + 36349.490 + 39719.879$

القيمة الحالية للديون الثلاثة = 114706.157

الخصم = مجموع القيم الاسمية للديون الثلاثة – القيمة الحالية للديون الثلاثة

$$D = (70000 + 90000 + 120000) - 44706.157 = 165293.843 \quad S.p$$

تمارين ومسائل غير محلولة

1- أودع شخص مبلغاً من المال قدره 7000 ل.س بفائدة مركبة معدلها % 4 سنوياً حتى نهاية مدة ما، وفي نهاية المدة وجد أن جملة ما تكوّن له 12121.76 ل.س،
المطلوب: احسب مدة إيداع هذا المبلغ.

الجواب: 14 سنة

2- احسب القيمة المستقبلية لقرض قيمته 8500 ل.س بعد 10 سنوات إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة % 4.5 سنوياً.

الجواب: 13200

3- بعد مضي ست سنوات من إيداع شخص مبلغ قدره 2500 ل.س في حساب التوفير بفائدة مركبة معدلها % 8 ،انخفض معدل الفائدة المركبة إلى % 5 سنوياً.

المطلوب: كم يكون في حساب الشخص بعد عشر سنوات من تاريخ تغير معدل الفائدة.

الجواب: 6462.12

4- ما المبلغ الذي يجب أن تودعه الآن بفائدة مركبة معدلها % 8 سنوياً على أساس أن الفائدة تضاف كل ثلاثة شهور ولمدة 20 عاماً ليصبح رصيدك 10000 ل.س.

الجواب: 2051.10

5- أودع شخص مبلغاً من المال قدره 1000 ل.س في أحد المصارف لمدة أربع سنوات بمعدل فائدة مركبة سنوية مضافة مرتين في السنة ، فحصل في نهاية الأربع سنوات على مبلغ 1435.77 ل.س. **والمطلوب:** ما معدل الفائدة المركبة ؟

الجواب: % 9.25

6- ما المدة اللازمة لإيداع مبلغ قدره 5000 ل.س بفائدة مركبة معدلها % 9.5 سنوياً والفائدة تضاف كل ثلاثة شهور للحصول على مبلغ 8000 ل.س؟

الجواب: 5سنوات

7- أودع أحمد مبلغاً قدره 40000 ل.س في مصرف لمدة ثلاث سنوات وستة أشهر، فإذا علمت أن المصرف يعطي فائدة مركبة معدلها % 10 سنوياً. **احسب:** القيمة المستقبلية (الجملة) لهذا المبلغ في نهاية المدة.

الجواب: 55838.584 أو 55902

8- ما المبلغ الذي سيصبح في حسابك بعد عامين من إيداع مبلغ قدره 5000 ل.س بفائدة مركبة معدلها % 8 سنوياً والفائدة تضاف بشكل مستمر طيلة أيام السنة.

الجواب: 5867.55 ل.س

9- عند شراء شخص لجهاز الحاسب، دفع من ثمنه 10000 ل.س نقداً، واتفق مع البائع على دفع مبلغ 7500 ل.س بعد عامين بفائدة مركبة معدلها % 6 سنوياً على أساس أن الفائدة تضاف مرتان في السنة، والمطلوب: ما ثمن جهاز الحاسب نقداً عند تاريخ الشراء؟

الجواب: 16663.65 ل.س

10- أوجد معدل الفائدة الاسمي السنوي حيث تضاف الفوائد مرتين في السنة وبموجبه يؤول مبلغ 1000 ل.س إلى 1266.77 ل.س بعد أربع سنوات.

الجواب: % 6

11- ما معدل الفائدة المركبة الاسمي السنوي حيث تضاف الفائدة كل ثلاثة شهور، إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة الحقيقي السنوي هو % 8.8 ؟ **الجواب:** 8.524 %

12- لدى أحد الأشخاص مبلغ 15000 ل.س، أراد استثماره في أحد المصارف بفائدة مركبة فعرضت عليه ثلاثة مصارف العروض الثلاثة الآتية:

1- فائدة مركبة حقيقية معدلها % 6.85 سنوياً والفائدة تضاف في نهاية كل سنة.

2- فائدة مركبة معدلها % 6.5سنوياً والفائدة تضاف مرتين في السنة.

3- فائدة مركبة معدلها % 6.75سنوياً والفائدة تضاف ثلاث مرات في السنة. فأي عرض هو الأفضل للمستثمر؟

الجواب: عرض المصرف الثالث % 6.90

13- تاجر مدين بمبلغ 450000 ل.س تستحق في نهاية 6 سنوات، أوجد القيمة الحالية لهذا الدين إذا حسبت الفائدة المركبة بمعدل % 4 سنوياً، ثم احسب قيمة الخصم.

الجواب: 355641.54 , 94358.45

14- ثلاثة ديون قيمها الاسمية 30000 ، 40000 ، 50000 ل.س تستحق بعد 3 , 5 , 6 سنوات على الترتيب والمطلوب:

1ـ أوجد القيمة الحالية للسندات الثلاثة.

2ـ احسب مقدار خصم الديون الثلاثة إذا علمت أن معدل الفائدة المركبة % 7سنوياً.

الجواب: 86325.5 , 33674.5 ل.س

15- تاجر مدين بالسندات الآتية:

سند قيمته الاسمية 40000 ل.س ويستحق الدفع بعد عامين.

وسند قيمته الاسمية 70000 ل.س ويستحق الدفع بعد أربع سنوات.

ومجموع قيمتيهما الحالتين 84488.40 ل.س، اتفق المدين مع الدائن على خصم هذين السندين ما معدل الفائدة المركبة التي تم على أساسها الخصم؟.

الجواب: % 8.5

16- شخص مدين بالسندين التاليين:

الأول قيمته 500000 ل.س يستحق الدفع بعد ثلاث سنوات من الآن.

والثاني قيمته 600000 ل.س يستحق الدفع بعد خمس سنوات من الآن.

يريد هذا الشخص أن يستعيض عن هذين السندين بسند وحيد يستحق بعد 7 سنوات من الان، ما القيمة الاسمية للسند الجديد إذا علمت ان معدل الفائدة المركبة % 6 سنوياً.

الجواب: 1 305 398.5 ل.س

17- تاجر مدين بالسندين التاليين:

سند قيمته الاسمية 200000 ل.س يستحق السداد بعد ثلاث سنوات من الآن.

وسند قيمته الاسمية 300000 ل.س يستحق السداد بعد خمس سنوات من الآن.

أراد هذا التاجر استبدال هذين السندين بسندين جديدين متساويين بالقيمة الاسمية يستحق الأول بعد ست سنوات ويستحق الثاني بعد سبع سنوات، علماً أن معدل الفائـــدة المركبة 6 % سنوياً، ما قيمه كل من السندين الجديدين؟

الجواب: 286201.46 ل.س

الفصل الثالث
الدفعات الدورية

§.1. مفهوم الدفعات

يقصد بالدفعات مجموعة من المبالغ تدفع بشكل دوري منتظم وعلى فترات زمنية متساوية، عندما تكون مبالغها متساوية تسمى بالدفعات الدورية المتساوية، يطلق على المبلغ الذي يدفع دورياً بمبلغ الدفعة، نسمي الزمن من فترة الدفعة الأولى إلى نهاية فترة الدفعة الأخيرة بمدة الدفعة.

عندما تكون الفترة الفاصلة بين كل دفعتين سنة، تسمى الدفعات سنوية. أو تكون الفترة الفاصلة بين كل دفعتين نصف سنة، فتسمى دفعات نصف سنوية أو دفعات شهرية.

أمثلة:

- مجموعة دفعات تدفع لاستثمارها لتتراكم وتصل إلى مبلغ معين في وقت معين (مثل المبالغ التي تدفع شهرياً في حساب ادخار).
- مجموعة دفعات تدفع شهرياً لسداد قرض مع فوائده (مثل القروض العقارية).
- مبالغ الدفعة الواحدة التي تدفع لشركات التأمين للتأمين على الحياة.

1-1- أنواع الدفعات:

يمكن تقسيم الدفعات إلى أنواع مختلفة وفقاً لأساس التقسيم المستخدم.

1 - الدفعات المتساوية والدفعات المتغيرة:

الدفعات المتساوية: هي تلك الدفعات التي يكون فيها مبالغ الدفعة متساوية.

الدفعات المتغيرة: هي الدفعات التي يكون فيها مبالغ الدفعة غير متساوية.

2- الدفعات المحدودة (المؤقتة) والدفعات الدائمة:

الدفعات المحدودة: هي الدفعات التي يستمر سدادها لمدة محدودة.

الدفعات الدائمة: هي تلك الدفعات التي يستمر سدادها دون توقف خلال مدة لانهائية من الزمن.

3- الدفعات العاجلة والدفعات المؤجلة:

الدفعات العاجلة: هي الدفعات التي يبدأ فيها السداد من الدورة الزمنية الأولى من تاريخ اليوم فإذا تم سداد أول مبلغ للدفعة في بداية هذه الدورة الزمنية سميت بالدفعة العاجلة الفورية، وإذا تم سداد أول مبلغ للدفعة في نهاية الدورة الزمنية سميت بالدفعة العاجلة العادية.

الدفعات المؤجلة: فيها يبدأ سداد أول مبلغ للدفعة بعد انتهاء مدة محدودة من بداية التعاقد تسمى ((مدة التأجيل))، فإذا تم سداد أول مبلغ للدفعة في بداية الدورة الزمنية التي تلي مدة التأجيل سميت الدفعة ((مؤجلة فورية))، وإذا تم سداد أول مبلغ للدفعة من نهاية الدورة الزمنية الأولى لانتهاء مدة التأجيل سميت الدفعة ((مؤجلة عادية)) و أياً كان نوع الدفعات في التقسيمات السابقة فإنها إما أن تسدد مبالغها في آخر كل دورة زمنية فتسمى بدفعات عادية، أو تسدد مبالغها في أول كل دورة زمنية فتسمى بدفعات فورية.

1ـ2 ـ جملة الدفعات السنوية الدورية العادية المتساوية:

الدفعات الدورية السنوية المتساوية العادية: هي دفعات متساوية تدفع بشكل دوري في نهاية كل سنة. وتستخدم هذه الدفعات من أجل تسديد القروض ويطلق عليها أحياناً اسم دفعات سداد.

لنرمز لجملة الدفعات هذه بالرمز V_n، ولمقدار الدفعة السنوية (القسط السنوي) R ولمعدل الفائدة المركبة بـ i ، وللقيمة الحالية لها بـ V_P.

إن المبلغ الأول (الدفعة الأولى) يستثمر من نهاية السنة الأولى وحتى نهاية المدة، أي أنه يستثمر لمدة$(n-1)$ سنة وتكون جملته بعد$(n-1)$ سنة:

$$R\left(1+i\right)^{n-1}$$

وأن المبلغ الثاني (الدفعة الثانية) يستثمر من نهاية السنة الثانية وحتى نهاية المدة، أي أنه يستثمر لمدة $(n-2)$من السنوات، وتكون جملته بعد $(n-2)$سنة:

$$R\left(1+i\right)^{n-2}$$

وأن المبلغ قبل الأخير (الدفعة قبل الأخيرة) يستثمر لمدة سنة واحدة وتكون جملته:

$$R(1+i)$$

وأن المبلغ الأخير (الدفعة الأخيرة) لا يستثمر وتبقى قيمته كما هي R .

ومنه جملة الدفعات تساوي:

$$V_n = R\,(1+i)^{n-1} + R\,(1+i)^{n-2} + \dots\dots + R\,(1+i) + R$$

بإعادة ترتيبها عكسياً وإخراج R عامل مشترك نجد:

$$V_n = R\,[\,1+(1+i)+(1+i)^2+\dots\dots+(1+i)^{n-1}\,]$$

الطرف الأيمن داخل القوسين يمثل متوالية هندسة متزايـدة حـدها الأول (1) وأساسها $(1+i)$ وعدد حدودها (n)، فيكون مجموعها:

$$V_n = R\,\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1} \Rightarrow V_n = R\,\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

تمثل العلاقة السابقة القيمة المستقبلية (جملة) لـ n من الدفعات العاديـة المتساوية قيمة كل منها R ل.س وبمعدل فائدة مركبة $i\,\%$.

1 ــ3ــ القيمة الحالية للدفعات السنوية الدورية العادية المتساوية:

لنفرض أن المطلوب هو إيجاد قيمة المبلغ المطلوب استثماره V_P ل.س بفائـدة مركبة معدلها السنوي $i\,\%$، لنحصل على دفعة مكونة من n من الأقساط مقدار كـل منها R ل.س تدفع بعد سنة من بدء استثمار المبلغ V_P.

ننظر إلى المبلغ V_P وكأنه يتكون من n من الأجزاء وكل جـزء مـن هـذه الأجزاء يموّل قسطاً واحداً من مجموعة من الأقساط عددها n ومقدار كل منهـا R ل.س. إن كل جزء من هذه الأجزاء يمثل القيمة الحالية لإحدى الدفعات، وتكون القيمة الحالية للدفعات:

$$V_P = R\,(1+i)^{-n} + \dots\dots\dots + R\,(1+i)^{-2} + R\,(1+i)^{-1}$$

بضرب طرفي المساواة بـ $(1+i)^n$ نجد:

$$V_P\,(1+i)^n = R + R\,(1+i) + \dots\dots + R\,(1+i)^{n-2} + R\,(1+i)^{n-1}$$

نعلم أن:

$$R + R\,(1+i) + \dots\dots\dots + R\,(1+i)^{n-2} + R\,(1+i)^{n-1} = V_n$$

وبالتالي:

$$V_P\,(1+i)^n = V_n$$

ومنه:
$$V_P = V_n\left(1+i\right)^{-n} = R\,\frac{\left(1+i\right)^n - 1}{i}\left(1+i\right)^{-n}$$
$$V_P = R\,\frac{1-\left(1+i\right)^{-n}}{i}$$

مثـــال:

يودع شخص مبلغاً قدره 2000 ل.س في مصرف في نهاية كل عـــام ولمـــدة 20 عاماً أوجد جملة ما تكون له، إذا كان المصرف يعطـــي فائـــدة مركبـــة معـــدلها 8.5 % سنوياً. ثم احسب مقدار الفائدة المستحقة.

الحـــل:
$$R = 2000 \quad , \quad i = 0.085 \quad , \quad n = 20$$

نظراً لأن الدفعات دورية سنوية عادية نستخدم العلاقة:
$$V_n = R\,\frac{\left(1+i\right)^n - 1}{i}$$
$$V_{20} = 2000\frac{\left(1+0.085\right)^{20} - 1}{0.085} = 96754.03 \quad S.p$$

مقدار الفائدة المستحقة = جملة الدفعات – إجمالي الدفعات
$$I = V_n - n\cdot R = 96754.03 - (20)\cdot(2000) = 56754 \quad S.p$$

مثـــال:

احسب القيمة الحالية لدفعات سنوية مبلغها 200 ل.س تدفع آخر كل سنة ولمدة 20 عاماً، على أساس معدل فائدة مركبة % 6 سنوياً.

الحـــل:
$$R = 200 \quad , \quad i = 0.06 \quad , \quad n = 15$$
$$V_P = R\,\frac{1-\left(1+i\right)^{-n}}{i} = 200\frac{1-\left(1.06\right)^{-15}}{0.06} = 1942.45 \quad S.p$$

1 ــ4ــ جملة الدفعات الجزئية الدورية العادية:

الدفعات الجزئية الدورية العادية هي دفعات متساوية في القيمـــة تـــدفع بـــشكل دوري منتظم في نهاية كل دورة زمنية، حيث أن الدورة هي جزء من السنة (شـــهر، فصل، نصف سنة ...الخ).

لتكن مدة الاستثمار هي n من السنوات، ولنقسم كل سنة من هذه المدة إلى m قسماً متساوياً، فيكون $n \cdot m$ هو عدد الدفعات المتساوية خلال الـــ n من السنوات.

لنفرض أن قيمة القرض V ل.س، يسدد على دفعات عادية دورية قيمة كل منها R ل.س تدفع في نهاية كل فترة زمنية جزئية علـــى أســـاس معـــدل فائـــدة مركبـــة معدلها i % سنوياً.

فيكون معدل الفائدة الجزئي لكل فترة زمنية جزئية J_m هو: $J_m = \frac{i}{m}$

حيث: m عدد الفترات الجزئية في السنة الواحدة.

إن الدفعة الجزئية الأولى تستثمر من نهاية الفترة الزمنية الجزئية الأولى وحتى نهاية المدة أي إنها تستثمر لمدة $(m \cdot n - 1)$ فترة جزئية وتكون جملتها:

$$R\left(1+J_m\right)^{m \cdot n-1}$$

وأن الدفعة الجزئية الثانية تستثمر من نهاية الفترة الزمنية الجزئية الثانية وحتى نهاية المدة أي أنها تستثمر لمدة $(m \cdot n - 2)$ فترة جزئية وتكون جملتها:

$$R\left(1+j_m\right)^{m \cdot n-2}$$

وأن الدفعة الجزئية قبل الأخيرة تستثمر لفترة جزئية واحدة وتكون جملتها:

$$R\left(1+j_m\right)$$

وأن الدفعة الجزئية الأخيرة لا تستثمر وتبقى قيمتها كما هي R.

وبناء عليه فإن جملة الدفعات الجزئية العادية $V_{m,n}$ تكون:

$$V_{m,n} = R\left(1+j_m\right)^{m \cdot n-1} + R\left(1+j_m\right)^{m \cdot n-2} + ... + R\left(1+j_m\right) + R$$

بإعادة ترتيبها عكسياً وإخراج R عامل مشترك نجد:

$$V_{m,n} = R\left[1+\left(1+j_m\right)+\left(1+j_m\right)^2+.......+\left(1+j_m\right)^{m \cdot n-2}+\left(1+j_m\right)^{m \cdot n-1}\right]$$

مجموعها يكون:

$$V_{m,n} = R\,\frac{\left(1+j_m\right)^{m \cdot n}-1}{\left(1+j_m\right)-1}$$

ومنه:

$$V_{m,n} = R\,\frac{\left(1+j_m\right)^{m \cdot n}-1}{j_m} \quad , \quad j_m = \frac{i}{m}$$

تمثل هذه العلاقة جملة دفعات جزئية عادية قيمة كل منها R ل.س.

• **تعطى القيمة الحالية للدفعات الجزئية العادية $V_0^{m,n}$ بالعلاقة:**

$$V_0^{m,n} = R\,\frac{1-\left(1+j_m\right)^{-mn}}{j_m} \quad ، \quad j_m = \frac{i}{m}$$

مثـــال: يودع شخص مبلغاً قدره 1000 ل.س في نهاية كل ستة أشهر ولمدة 10 سنوات في مصرف يعطي فائدة مركبة سنوية 8 % تضاف مرتان في السنة.

والمطلوب: أوجد جملة الدفعات.

الحـــل: نظراً لان الدفعات جزئية نصف سنوية فإن المعدل النصف سنوي هو:

$$j_m = \frac{i}{m} = \frac{0.08}{2} = 0.04$$

$$R = 1000\ ,\ m = 2\ ,\ n = 10\ ,\ m\cdot n = 20$$

باستخدام العلاقة :

$$V_{m,n} = R\,\frac{\left(1+j_m\right)^{mn}-1}{j_m} = 1000\,\frac{\left(1+0.04\right)^{20}-1}{0.04} = 29778.08\ \ S.p$$

مثـــال:

احسب القيمة الحالية لدفعات عادية مبلغها 200 ل.س تدفع في نهاية كل شهر لمدة خمس سنوات على أساس معدل فائدة مركبة سنوية 6 % والفائدة تضاف شهرياً.

الحـــل: الدفعات عادية شهرية والمعدل الشهري للفائدة:

$$j_m = \frac{i}{m} = \frac{0.06}{12} = 0.005$$

$$R = 200\ ,\ m = 12\ ,\ n = 5\ ,\ m\cdot n = 12\times 5 = 60$$

باستخدام العلاقة:

$$V_0^{m,n} = R\,\frac{1-\left(1+j_m\right)^{-mn}}{j_m} = 200\,\frac{1-\left(1+0.005\right)^{-60}}{0.005} = 10345.11\ \ S.p$$

5-1 جملة الدفعات السنوية الدورية الفورية المتساوية V_n':

الدفعات السنوية الدورية الفورية: هي متتالية من المبالغ تدفع بشكل منتظم في بداية كل سنة وتسمى دفعات إيداع أو استثمار، كلمة فورية تعني أن الدفع أو الإيداع يتم في بداية السنة.

إن المبلغ الأول وقدره R ل.س (القسط السنوي الأول) يستثمر من بداية الفترة الأولى وحتى نهاية المدة، (n) من السنوات، فتكون جملته:

$$.R\left(1+i\right)^{n}$$

وإن المبلغ الثاني R ل.س يستثمر من بداية الفترة الثانية وحتى نهاية المدة، أي لمدة $(n-1)$ في السنوات، فتكون جملته:

$$.R(1+i)^{n-1}$$

وإن المبلغ الأخير (الدفعة الأخيرة) يستثمر لفترة واحدة، أي لمدة سنة واحدة، فتكون جملته: $R(1+i)$

وتكون جملة الدفعات الفورية V'_n:

$$V'_n = R\left(1+i\right)^{n} + R\left(1+i\right)^{n-1} + \dots\dots + R\left(1+i\right)^{2} + R\left(1+i\right)$$

$$V'_n = R\left(1+i\right) + R\left(1+i\right)^{2} + \dots\dots + R\left(1+i\right)^{n-1} + R\left(1+i\right)^{n}$$

المجموع الأخير يمثل متوالية هندسية متزايدة حدها الأول $R(1+i)$ وأساسها $(1+i)$ وعدد حدودها (n) هو:

$$V'_n = R\left(1+i\right)\frac{\left(1+i\right)^{n}-1}{\left(1+i\right)-1}$$

$$V'_n = R\,\frac{\left(1+i\right)^{n}-1}{i}\left(1+i\right)$$

تمثل هذه العلاقة جملة الدفعات الفورية السنوية.

- **تعطى القيمة الحالية للدفعات الفورية السنوية V'_P بالعلاقة:**

$$V'_P = R\,\frac{1-\left(1+i\right)^{-n}}{i}\left(1+i\right)$$

مثـــال:

أوجد القيمة الحالية لدفعات عادية مبلغها 2000 ل.س تدفع في أول كل سنة لمدة خمس عشرة عاماً، إذا كانت الفائدة المركبة تحسب بمعدل % 6 سنوياً.

الحــل: نظراً لأن مبلغ الدفعة يسدد في أول كل سنة فتعتبر دفعات سنوية فورية.

$$R = 2000,\quad i = 0.06,\quad n = 15$$

$$V'_P = R\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)$$

$$= 2000\frac{1-(1+0.06)^{-15}}{0.06}(1+0.06) = 20589.96 \quad S.p$$

مثـــال:

أدخر شخص في أحد المـصارف (15) دفعـة سـنوية فوريـة قيمـة كـل منها (10000) ل.س بفائدة % 5 سنوياً، بهدف تكوين رأسمال. أوجد جملة الدفعات.

الحـــل:

$$R = 10000, \quad i = 0.05, \quad n = 15$$

$$V'_n = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)$$

$$= 10000\frac{(1+0.05)^{-15} - 1}{0.05}(1+0.05) = 226574.9 \quad S.p$$

1-6 – جملة الدفعات الجزئية الفورية $V^*_{m,n}$:

تحسب **جملة الدفعات الجزئية الفورية** من العلاقة الآتية:

$$V^*_{m,n} = R\,(1+j_m)\frac{(1+j_m)^{m\cdot n} - 1}{j_m} \quad , \quad j_m = \frac{i}{m}$$

كما تحسب **القيمة الحالية لدفعات جزئية فورية** من العلاقة:

$$V_0^{*,m,n} = R\,(1+j_m)\frac{1-(1+j_m)^{-m\cdot n}}{j_m} \quad , \quad j_m = \frac{i}{m}$$

§.2 - الدفعات الدائمة:

إذا استثمر مبلغ ما لمدى الحياة، ولم تترك فائدته لتتراكم عليـــه، أي أن المبلـــغ المستثمر ظل ثابتاً وسحبت فائدته في نهاية كل وحدة زمنية فيكون مقدار الفائدة ثابتـــاً ويستمر دفعها على هذا الشكل لمدى الحياة، ويطلق على هذه الفائـــدة اســـم الدفعـــة الدائمة.

أمثــلة على الدفعات الدائمة:

ــ إيراد العقارات والأراضي.

ــ فوائد السندات.

ــ فوائد القروض طويلة الأجل.

لا يمكن حساب جملة الدفعات الدائمة لأن عددها غير محــدد ومــدة ســدادها بأنواعها المختلفة ليس لها نهاية، الأمر الذي يستحيل معه حساب جملة هــذه الــدفعات ويمكن التحقق من هذه النتيجة رياضياً كما يلي:

لنرمز بجملة الدفعات الدائمة بالرمز $V_{n,\infty}$:

$$V_{n,\infty} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+i)^n - 1}{i} = \frac{(1+i)^\infty - 1}{i} = \infty$$

1-2 ــ القيمة الحالية للدفعات الدائمة:

1- القيمة الحالية للدفعات الدائمة العادية V_∞

$$V_\infty = \lim_{n\to\infty} R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = R\frac{1-(1+i)^{-\infty}}{i}$$

نلاحظ أن:

$$(1+i)^{-\infty} = \frac{1}{(1+i)^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

ومنه القيمة الحالية للدفعات الدائمة العادية يساوي: $V_\infty = \frac{R}{i}$

مثــال:

احسب القيمة الحالية لاستثمار عائده الــسنوي 3000 ل.س، وســعر الفائــدة المركبة السائدة هو % 12 سنوياً.

الحــل:

$$V_\infty = \frac{R}{i} = \frac{3000}{0.12} = 25000 \quad S.P$$

2- القيمة الحالية لدفعات دائمة فورية V'_{∞}

$$= R(1+i)\lim_{n\to\infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = R(1+i)\frac{1-(1+i)^{-\infty}}{i}$$

$$V'_{\infty} = \lim_{n\to\infty} R\left(1+i\right)\frac{1-\left(1+i\right)^{-n}}{i}$$

ومنه القيمة الحالية للدفعات الدائمة الفورية يساوي:

$$V'_{\infty} = \frac{R\left(1+i\right)}{i}$$

مثـــال: احسب ثمن شراء قطعة أرض زراعية إيجارها الـــسنوي 1000 ل.س علـــى أساس معدل فائدة مركبة % 4 سنوياً وذلك إذا كان أول دفعة للإيجار تستحق حالاً.

الحـــل: هنا الدفعة دائمة فورية:

$$V'_{\infty} = \frac{R\left(1+i\right)}{i} = 1000\left(\frac{1}{0.04}+1\right) = 26000\ S.p$$

تمارين ومسائل غير محلولة

1 ـ اشترى شخص شقة سكنية واتفق على دفع الثمن كالآتي:

- 20000 ل.س فورياً.
- 1000 ل.س في آخر كل سنة ولمدة 10 سنوات.

والمطلوب: ما ثمن الشقة السكنية نقداً إذا حسبت الفائدة المركبة بمعدل 5 % سنوياً؟

الجواب: $V_P = 27721.735$ ل.س

2ـ اقترضت إحدى الشركات مبلغ 500000 ل.س، وتعهدت بسداده على عشرين دفعة سنوية فما قيمة كل دفعة إذا حسبت الفائدة المركبة بمعدل 5 % سنوياً؟

3ـ دفعة سنوية عادية مدتها خمس سنوات، وجد أن جملتها على أساس معدل فائدة مركبة 2 % سنوياً تساوي 5204 ل.س ما القيمة الحالية للدفعات في أول السنوات الخمس؟

الجواب: $V_P = 4713.46$ ل.س

4- دفعات عادية سنوية مبلغها 100 ل.س، وجد أن قيمتها الحالية على أساس معدل فائدة مركبة 2.5 % سنوياً هي 875.210 ل.س. ما مدة الدفعات ؟

الجواب: $n = 10$

5ـ يودع شخص في مصرف في آخر كانون الأول من كل عام (500) ل.س ابتداء من آخر كانون الأول من عام 1990، وبعد إيداع الدفعة مباشرة في سنة معينة وجد أن رصيده 3661.500 ل.س. أوجد تلك السنة المعينة إذا كان معدل الفائدة المركبة 15 % سنوياً.

الجواب: $n = 7$

6- اشترت إحدى الشركات مصنعاً بمبلغ 400000 ل.س، واتفقت مع البائع على أن تدفع له من الثمن 88 216.8 ل.س فوراً، وتسدد الباقي على (20) دفعة متساوية

تدفع كل منها في آخر كل نصف سنة بمعدل فائدة مركبة نصف سنوية % 2.5. وبعد أن قامت الشركة بدفع العشرة أقساط الأولى مباشرة اتفقت مع البائع على دفع الأقساط الباقية عليها مرة واحدة. **والمطلوب:** اوجد قيمة المبلغ الواجب على الشركة دفعه عندئذ؟

الجواب: 17 541.28 ل.س.

7ـ أودع شخص في أحد المصارف عدداً من الدفعات السنوية المتساوية قيمة كل منها (500) ل.س في أول كل سنة بفائدة مركبة % 3 سنوياً، فحصل في نهاية المدة على مبلغ 9568.44 ل.س. **والمطلوب:** احسب عدد هذه الدفعات ؟

8ـ ما المبلغ الواجب إيداعه في بداية كل سنة للحصول على مبلغ قدره 6500 ل.س ولمدة ثلاث سنوات على أساس معدل فائدة مركبة % 4 سنوياً ؟

9ـ يرغب شخص بتكوين رأسمال قدره 1000000 ل.س ، بإيداع 60 دفعة شهرية، على أساس فائدة مركبة معدلها % 9 سنوياً والفائدة تضاف شهرياً. **والمطلوب** ما مقدار القسط الشهري الواجب إيداعه؟

الجواب: $R = 13159.66$

10 ـ يرغب شخص ببيع سيارته نقداً بمبلغ 2400 وحدة نقدية، وفي حالة البيع بالتقسيط يتم السداد على دفعات شهرية عادية مدتها (24) شهراً، فإذا كان معدل الفائدة الشهرية % 1 احسب قيمة القسط الشهري الذي سيقبضه بائع السيارة. وما مقدار الفائدة المستحقة.

الجواب: $I = 311.52$ $R = 112.98,$

11ـ طلب أحد المتبرعين من مصرف أن يدفع 1000 ل.س كل ستة شهور لجمعية خيرية مدى الحياة. احسب ما يجب أن يدفعه المتبرع للمصرف مقدماً، علماً أن معدل الفائدة المركبة السنوية % 4 والفائدة تضاف مرتين في السنة في الحالتين الآتيتين:

1 ـ إذا كان القسط النصف سنوي يدفع في أول كل ستة شهور.

2 – إذا كان القسط النصف سنوي يدفع في آخر كل ستة شهور.

الجواب: $V'_{\infty} = 51000$, $V_{\infty} = 50000$

12– شخص كان يودع مبلغ 3000 ل.س في آخر كل سنة لمدة خمس سنوات في مصرف ما، ثم قام بإيداع ضعف هذا المبلغ لمدة عشر سنوات التالية، احسب جملة المستحق له في نهاية 20 سنة، إذا كان معدل الفائدة المركبة % 12سنوياً.

الجواب: 289879.39

الفصل الرابع
استهلاك القروض

§1. مفهوم استهلاك القروض

يقصد باستهلاك القروض سدادها مع فوائدها، ويتم استهلاك (سداد) القروض طويلة الأجل بطرق مختلفة يتفق عليها بين الدائن والمدين ومنها:

1ــ سداد القرض مع فوائدة دفعة واحدة في نهاية مدة الاقتراض، حيث تحسب قيمة القرض في نهاية مدة الاقتراض من العلاقة: $C_n = C(1+i)^n$.

2ــ سداد الفوائد الدورية بشكل دوري أولاً وسداد أصل القرض في نهاية مدة الاقتراض مضافاً إليها الفائدة الدورية الأخيرة.

3ــ سداد القرض بدفعات دورية غير متساوية، حيث كل دفعة تتكون من قسمين. القسط المتساوي المقتطع من أصل القرض + الفائدة المترتبة على المتبقي من القرض.

4ــ سداد القرض وفوائده على دفعات دورية متساوية (سنوية، شهرية،....الخ)

وفي هذا الفصل نتناول بالدراسة مايلي:

1ــ1ــ استهلاك القرض بدفعات سنوية غير متساوية:

بموجب هذه الطريقة يقوم المدين بتسديد أصل القرض V على أقساط متساوية من الأصل فقط مع سداد الفوائد المستحقة على الأرصدة المتبقية المتناقصة بصفة دورية، وتجدر الإشارة إلى أنه طالما أصل القرض يتناقص بمبلغ متساوي بشكل دوري فإن الفائدة المحتسبة على الرصيد المتبقي في القرض سوف تتناقص هي الأخرى بقيمة ثابتة مما يجعلها تأخذ شكل متوالية عددية يمكن إيجاد مجموعها بسهولة.

يحسب مقدار القسط المتساوي المقتطع من أصل القرض من العلاقة:

$$R = \frac{V}{n}$$

V ــ أصل القرض (المبلغ الأصلي للقرض).

n ــ عدد الأقساط السنوية.

بفرض إن المبلغ الواجب سداده في نهاية السنة الأولى (الدفعة السنوية الأولــى) k_1 هو:

$$k_1 = R + Vi$$

وإن المبلغ الواجب سداده في نهاية السنة الثانية (الدفعة السنوية الثانية) k_2 هو:

$$k_2 = R + (V - R)i$$

وإن المبلغ الواجب سداده في نهاية السنة الثالثة (الدفعة السنوية الثالثة) k_3 هو:

$$k_3 = R + (V - 2R)i$$

وإن المبلغ الواجب سداده في نهاية السنة n (الدفعة السنوية رقم n) k_n هو:

$$k_n = R + (V - (n-1)R)i$$

مثــال:

اقترض شخص مبلغ 1200000 ل.س من أحد المصارف بفائدة مركبة معــدلها 9 % سنوياً، على أن يسدد القرض والفوائد بدفعات دورية سنوية غير متساوية خلال ست سنوات، و**المطلوب:**

1 ــ احسب قيمة القسط المتساوي الثابت من القرض.

2 ــ تشكيل جدول استهلاك القرض.

الحــل: $V = 1200000, \quad i = 0.09 \quad , \; n = 6$

قيمة القسط المتساوي الثابت من القرض R هي:

$$R = \frac{1200000}{6} = 200000 \quad S.p$$

المبلغ الواجب سداده في نهاية السنة الأولى (الدفعة السنوية الأولى) k_1 يساوي إلى: القسط المتساوي من أصل القرض + الفائدة المستحقة على كامل قيمــة القــرض خلال السنة الأولى:

فائدة السنة الأولى I_1: $I_1 = 1200000(0.09) = 108000 \; S.p$

ومنه مقدار الدفعة الأولى: $k_1 = 200000 + 108000 = 308000 \quad S.p$

الرصيد المتبقي من القرض في بداية السنة الثانية هو:

$$1200000 - 200000 = 1000000 \quad S.p$$

وتكون فائدة السنة الثانية I_2: $I_2 = 1000000(0.09) = 90000 \ S.p$

مقدار الدفعة السنوية الثانية (القسط الثاني) k_2 وتساوي إلى: القسط المتساوي الثابت من أصل القرض + فائدة السنة الثانية على الرضيد المتبقي من قيمة القرض في بداية السنة الثانية:

$$k_2 = 200000 + 90000 = 290000 \ S.p$$

الرصيد المتبقي من القرض في بداية السنة الثالثة:

$$1000000 - 200000 = 800000 \ S.p$$

فائدة السنة الثالثة I_3: $I_3 = 800000(0.09) = 72000 \ S.p$

قيمة الدفعة السنوية الثالثة (القسط الثالث) k_3:

$$k_3 = 200000 + 72000 = 2720000 \ S.p$$

الرصيد المتبقي من القرض في بداية السنة الرابعة:

$$800000 - 200000 = 600000 \ S.p$$

فائدة السنة الرابعة I_4:

$$I_4 = 600000.(0.09) = 54000 \ S.p$$

مقدار الدفعة السنوية الرابعة (القسط الرابع) k_4:

$$k_4 = 200000 + 54000 = 254000 \ S.p$$

الرصيد المتبقي من القرض في بداية السنة الخامسة:

$$600000 - 200000 = 400000 \ S.p$$

فائدة السنة الخامسة I_5:

$$I_5 = 400000.(0.09) = 36000 \ S.p$$

مقدار الدفعة السنوية الخامسة (القسط الخامس) k_5:

$$k_5 = 200000 + 36000 = 236000 \ S.p$$

الرصيد المتبقي من القرض في بداية السنة السادسة:

$$400000 - 200000 = 200000 \ S.p$$

فائدة السنة السادسة I_6:

$$I_6 = 200000(0.09) = 18000 \ S.p$$

مقدار الدفعة السنوية السادسة (القسط السادس) k_6 :

$$k_6 = 200000 + 18000 = 218000 \ S.p$$

جدول الاستهلاك

السنة	رصيد القرض في بداية السنة	القسط المتساوي الثابت من أصل القرض	الفائدة المستحقة على الرصيد المتبقي من القرض	قيمة الدفعة السنوية	رصيد القرض في نهاية السنة
الأولى	1200000	200000	108000	308000	1000000
الثانية	1000000	200000	90000	290000	800000
الثالثة	800000	200000	72000	272000	600000
الرابعة	600000	200000	54000	254000	400000
الخامسة	400000	200000	36000	236000	200000
السادسة	200000	200000	18000	218000	0
المجموع		1200000	378000	1578000	

لاحظ أن الفوائد تمثل متوالية عددية متناقصة حدها الأول 108000 وأساسها 18000 وحدها الأخير 18000 وعدد حدودها (6) ومجموعها 378000.

وإجمالي الدفعات المسددة = مجموع الأقساط المتساوية من أصل القرض + مجموع الفوائد المستحقة.

1-2- استهلاك القرض بدفعات متساوية من الأصل والفوائد معاً:

في ضوء هذه الطريقة يتم سداد القرض وفوائده على أقساط متساوية تدفع بشكل دوري في نهاية كل دورة زمنية خلال مدة القرض ، وأن كل قسط دوري مسدد في نهاية كل دورة يشتمل على جزئين هما:

الجزء الأول: الجزء المدفوع من القرض (قيمة الاستهلاك من أصل القرض).

الجزء الثاني: الفائدة المستحقة على الرصيد المتبقي من القرض عن فترة زمنية معينة.

3-1- معادلة حساب القسط المتساوي:

لنفرض أن لدينا قرضاً قيمته V ل.س يراد استهلاكه وفوائده على أقساط متساوية قيمة كل منها R تسدد في نهاية كل فترة زمنية لمدة (n) من الفترات الزمنية على أساس معدل فائدة مركبة i، إن الأقساط تمثل دفعات متساوية، وأن القرض في بداية المدة يمثل القيمة الحالية لهذه الدفعات V_P .

$$\text{القسط المتساوي} = \text{أصل القرض} \times \frac{1}{V_P}$$

مثـــال:

اقترض شخص مبلغ 500 ل.س من أحد المصارف بمعدل فائدة مركبة شهرية 1 % واتفق على سداد القرض على دفعات متساوية من الأصل والفوائد معاً على (6) دفعات شهرية متساوية.

والمطلوب: 1 ــ احسب قيمة القسط (الدفعة) الشهري.

2 ــ شكل جدول استهلاك القرض.

الحــل: لدينا: $V = V_P = 500 \ S.p$

وجدنا سابقاً أن قيمة الدفعة الشهرية R هي:

$$V_P = R \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \Rightarrow R = V_P \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

حيث: i معدل الفائدة الشهرية، n عدد الدفعات الشهرية:

$$R = 500 \frac{0.01}{1-(1.01)^{-6}} = 86.27 \ S.p$$

الدفعة الشهرية المتساوية تتكون كما ذكرنا من جزئين الأول وهو المستهلك من القرض ونرمز له بـــ C والجزء الثاني وهو الفائدة ونرمز له بالرمز I، أي أن:

$$R = C + I$$

إن الدفعة الشهرية الأولى تستحق بعد فترة واحدة (شهر واحد) بعــد الحــصول على القرض في هذا الوقت يحق للمصرف فائدة I_1 مقدارها:

$$I_1 = 500(0.05) = 5 \ S.p$$

مقدار الاستهلاك الأول من القرض C_1 يساوي إلى:

$$C_1 = R - I_1 = 86.27 - 5 = 81.27 \quad S.p$$

ويكون الرصيد المتبقي من القرض بعد خصم الاستهلاك الأول في بداية الشهر الثاني:

$$500 - 81.27 = 418.73 \quad \text{S.p}$$

فائدة الفترة الثانية (الشهر الثاني) I_2: $\mathrm{I_2} = 418.73(0.01) = 4.19 \ \text{S.p}$

مقدار الاستهلاك الثاني C_2: $\mathrm{C_2} = 86.27 - 4.19 = 82.08 \ \text{S.p}$

الرصيد المتبقي من القرض بعد خصم الاستهلاك الثاني في بداية الشهر الثالث:

$$418.73 - 82.08 = 336.65 \quad S.p$$

فائدة الفترة الثالثة (الشهر الثالث) I_3:

$$I_3 = 336.65(0.01) = 3.37 \quad S.p$$

مقدار الاستهلاك الثالث C_3:

$$C_3 = 86.27 - 3.37 = 82.90 \quad S.p$$

الرصيد المتبقي من القرض بعد خصم الاستهلاك الثالث في بداية الشهر الرابع:

$$336.65 - 82.90 = 353.75 \quad S.p$$

ويستمر هذا العمل حتى نهاية الشهر السادس، حيث تصل قيمة القرض غير المسدد إلى الصفر أي أن القرض سدد.

جدول الاستهلاك

الشهر	قيمة القرض في بداية الشهر	القسط الشهري المتساوي	الفائدة المستحقة على الرصيد المتبقي من القرض	الاستهلاك الشهري من القرض	قيمة القرض في نهاية الشهر
الأول	500	86.27	5	81.27	418.73
الثاني	418.73	86.27	4.19	82.08	336.65
الثالث	336.65	86.27	3.37	82.90	253.75
الرابع	253.73	86.27	2.54	83.73	170.02
الخامس	170.02	86.27	1.70	84.57	85.45
السادس	85.45	86.30	0.85	85.45	0
المجموع		517.65	17.65	500	

لاحظ أن القسط الشهري السادس ازداد بمقدار 0.03 عن مقدار القسط الشهري المتساوي ويعود سبب الزيادة إلى التدوير في الأرقام، وفي معظم الحالات يكون القسط الأخير اكبر بمقدار ضئيل لكي تصبح قيمة القرض في نهاية المدة مساوية للصفر، للدلالة على أن القرض قد سدد.

4-1- العلاقة بين الاستهلاكات:

إن الاستهلاك الأول والثاني يرتبطان ببعضهما من خلال العلاقة الآتية:

$$C_2 = C_1(1+i)$$

والاستهلاك الثالث C_3 يرتبط مع الاستهلاك الأول C_1 بالعلاقة:

$$C_3 = C_1(1+i)^2$$

وهكذا يمكن حساب قيمة استهلاك أي قرض بإحدى العلاقات الآتية:

$$C_k = C_{k-1}(1+i)$$

أو: $$C_k = C_1(1+i)^{k-1}$$

أو: $$C_k = C_r(1+i)^{k-r}$$

وبمعرفة استهلاكين متتالين يمكن معرفة معدل الفائدة.

يلاحظ أن مجموع الاستهلاكات يساوي قيمة القرض الأصلي أي أن:

قيمة القرض $$C_1 + C_2 + C_3 + ... + C_n = V$$

يمكن حساب قيمة الرصيد المتبقي من القرض في نهاية الفترة ولنرمز له بـــ K ويحسب بالعلاقة التالية:

قيمة الرصيد المتبقي من القرض في نهاية الفترة:

$$K = V - (C_1 + C_2 + ...C_k)$$

إن مجموع الفوائد المستحقة على القرض خلال مدة القرض يساوي إلى مجموع الأقساط المتساوية مطروحاً منه أصل القرض أي أن:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_n = nR - V$$

إن معدل الفائدة يعطى بالعلاقة التالية إذا تم معرفة استهلاكين متتالين:

$$C_2 = C_1(1+i) \;\Rightarrow\; 1+i = \frac{C_2}{C_1} \;\Rightarrow\; i = \frac{C_2}{C_1} - 1$$

تمارين ومسائل غير محلولة

1 ــ اقترض شخص مبلغ 5000 ل.س من أحد المصارف على أن يسدد القرض على خمسة أقساط متساوية من الأصل فقط، يسدد كل قسط مع فائدة الرصيد في أخر كل سنة، فإذا كان البنك يستخدم معدل فائدة مركبة 10 % سنوياً. **المطلوب:**

1 ــ إيجاد المبلغ الواجب سداده في نهاية كل سنة.

2 ــ تصوير جدول استهلاك القرض.

2ــ اقترض خالد من أحد المصارف مبلغ 1000 ل.س بمعدل فائدة مركبة 10 % سنوياً لمدة 5 سنوات. **والمطلوب:** تصوير جدول استهلاك القرض إذا تم استهلاك القرض:

1 ــ بأقساط سنوية متساوية من الأصل فقط.

2 ــ بأقساط سنوية متساوية من الأصل والفوائد معاً.

3ــ اقترض شخص من أحد المصارف مبلغ 1000 ل.س بمعدل فائدة مركبة فصلية 2.5 % على الرصيد غير المسدد، على أن يسدد القرض على (4) أقساط فصلية متساوية من الأصل والفوائد معاً. **والمطلوب:** تصوير جدول استهلاك القرض.

4 ــ اقترض مزارع من مصرف مبلغاً من المال لمدة (4) سنوات وتعهد بسداده بطريقة القسط المتساوي من الأصل والفوائد معاً. **والمطلوب:**

احسب قيمة القرض. واحسب قيمة القسط المتساوي R الذي يدفعه المدين في آخر كل سنة، إذا علمت أن الاستهلاك السنوي الثاني والأول هما على الترتيب 481.988 , 450.456 ل.س.

5 ــ اقترض شخص مبلغ ما من المصرف واتفق على أن يسدده على (5) أقساط سنوية متساوية من الأصل والفوائد معاً وبالرجوع إلى جدول الاستهلاك لهذا القرض وجد أن الاستهلاك الثاني 188.04 ل.س، والاستهلاك الرابع 211.282 ل.س . **والمطلوب:**

1ـ احسب قيمة القرض.

2 ـ احسب القسط السنوي.

6ـ اقترض شخص مبلغ من أحد المصارف على أن يسدده على خمسة أقساط سـنوية متساوية من الأصل والفوائد معاً بفائدة مركبة معدلها % 6 سـنوياً، وبـالرجوع إلى جدول الاستهلاك وجد أن الفرق بين الاستهلاكيين الثـاني والثالـث 22.56 ل.س. **والمطلوب:**

1 ـ احسب قيمة القرض.

2 ـ القسط السنوي.

3 ـ مجموع الفوائد التي تحملها المدين إلى أن تم سداد الدين.

الفصل الثامن
الاشتقاق والتفاضل والقيم القصوى

§ 1 – تمهيد وتعاريف

الاشتقاق والتفاضل مفهومان رياضيان متلازمان من مفاهيم التحليل الرياضي، فعند الحديث عن الاشتقاق لابد من استعراض مفهوم التفاضل، وكلاهما يستخدم في حل المسائل الاقتصادية، وسوف نتعرف على الاشتقاق من أجل التوابع المتعددة المتحولات، والذي يعرف باسم الاشتقاق الجزئي وكذلك سنتطرق لمفاهيم التفاضل الجزئي والكلي لتلك التوابع، ونبين من خلال ذلك العلاقة بين التفاضلات والمشتقات الجزئية والكلية.

1-1 تعريف مشتق تابع :

إن مشتق التابع $y = f(x)$ هو نهاية النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ عندما تؤول Δx إلى الصفر أي:

$$y' = f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

حيث Δy هو التغير الحقيقي للتابع $f(x)$ و Δx هو التغير الحقيقي للمتحول x. فإذا كان المشتق الأول للتابع $f(x)$ موجوداً فيمكن إجراء الاشتقاق مرة ثانية وبذلك نحصل على المشتق الثاني لذلك التابع. وبشكل عام يمكن الحصول على المشتق الثالث والرابع ... وكذلك على المشتق من المرتبة n طالما مشتق التابع $f(x)$ من المرتبة $(n-1)$ موجوداً. ونرمز للمشتقات من المراتب العليا للتابع $f(x)$ بالرموز التالية:

$$f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$$

أو بالرموز المكافئة: $\frac{df}{dx}, \frac{d^2 f}{dx^2}, \frac{d^3 f}{dx^3}, \ldots, \frac{d^n f}{dx^n}$

إن ما نحتاج إليه من هذه المشتقات لاحقاً هي المشتقات من المرتبة الثانية خاصة فيما يتعلق بالتوابع متعددة المتحولات.

2-1 تعريف تفاضل تابع :

يعرف تفاضل التابع $y = f(x)$ بأنه الفرق بين ترتيـــبي النقطتين $(x + \Delta x, x)$ على المماس المرسوم على منحنى التابع $f(x)$ في النقطة $(x, f(x))$ ويرمز للتفاضل بالرمز dy ، وبعبارة أخرى تفاضل التابع $y = f(x)$ هو حاصل ضرب المشتق y' في مقدار تغير المتحول المستقل Δx عندما تؤول Δx إلى الصفر أي:

$$dy = y' \cdot \Delta x = f'(x) \cdot \Delta x$$

وبما أن تغير المتحول المستقل Δx يساوي لتفاضله عندما $\Delta x \to 0$ فإن التفاضل يكتب بالشكل التالي:

$$dy = y' \cdot dx = f'(x) \cdot dx$$

وبشكل مشابه نوجد التفاضل من المرتبة الثانية والثالثة ...

$$d^2 y = f''(x) \cdot dx^2, \quad d^3 y = f'''(x) \cdot dx^3, \ldots$$

في الحقيقة، إن التفاضلات التي تستخدم في المسائل الاقتصادية هي التفاضلات من المرتبة الأولى والثانية للتوابع متعددة المتحولات والتي تأخذ اسم التفاضلات الجزئية. أما التفاضل من المرتبة الأولى للتوابع وحيدة المتحول فتستخدم في حساب التغيرات التقريبية لتلك التوابع خاصة عندما تكون عملية حساب التغيرات الحقيقية صعبة ومعقدة، وبذلك نقع في أخطاء تتمثل بالفرق بين التغيرات الحقيقة والتغيرات التقريبية لتلك التوابع، وعادة يتم حساب القيمة المطلقة لتلك الأخطاء لأن التغير الحقيقي يكون أكبر من التغير التقريـــبي من أجل بعض التوابع ويكون على العكس من أجل البعض الآخر.

نرمز للخطأ المطلق المرتكب في حساب التغير للتابع $f(x)$ بالرمز S ويعطى بالعلاقة التالية:

$$S = |\Delta y - dy|$$

في كثير من المسائل نحتاج إلى حساب الخطأ النسبي للتغير خاصة عندما نريد مقارنة تغير تابعين مختلفين نتيجة لتغير في المتحول المستقل ونرمز للخطأ النسبي للتابع $f(x)$ بالرمز T ويعطى بالعلاقة التالية:

$$T = \frac{|\Delta y - dy|}{\Delta y} = \frac{S}{\Delta y} \cdot 100$$

مثـــال: احسب الخطأ المطلق والنسبي المرتكب في حساب تغير التابع:

$$y = f(x) = 3x^2 + 7x - 5$$

عندما يتغير المتحول x من 5 إلى 5.01.

الحـــل:

لإيجاد الخطأ المطلق والنسبي للتابع $f(x)$ لابد من إيجاد التغير الحقيقي Δy وكذلك التغير التقريـــبي dy للتابع $f(x)$.

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x) - f(x) \\ &= [3(\mathrm{x}+\Delta \mathrm{x})^2 + 7(x+\Delta x) - 5] - [3x^2 + 7x - 5] \\ &= 6\mathrm{x} \cdot \Delta \mathrm{x} + 7\Delta \mathrm{x} + 3(\Delta \mathrm{x})^2\end{aligned}$$

وبتعويض قيم كل من x و Δx يكون:

$$\Delta y = 6(5)(0.01) + 7(0.01) + 3(0.01)^2 = 0.3703$$

وهو التغير الحقيقي الحاصل. ولإيجاد التغير التقريـــبي نجد:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x = (6x+7) \cdot \Delta x$$

وبتعويض قيم كل من x و Δx يكون: $dy = [6(5)+7](0.01) = 0.37$

إذاً الخطأ المطلق المرتكب في حساب التغير الحاصل هو:

$$S = |\Delta y - dy| = |0.3703 - 0.37| = 0.0003$$

أما الخطأ النسبي المرتكب في حساب التغير الحاصل فهو:

$$T = \frac{S}{\Delta y} \cdot 100 = \frac{0.0003}{0.3703} \cdot 100 = 0.081\%$$

3-1 تعريف المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى:

كما ذكرنا أن المشتقات الجزئية مفهوم مرتبط بالتوابع متعددة المتحولات. لنتذكر أيضاً أن المشتق الجزئي للتابع $F = f(x,y)$ بالنسبة للمتحول x هو نهاية النسبة $\frac{\Delta F_x}{\Delta x}$ عندما $\Delta x \to 0$ أي:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

كذلك المشتق الجزئي للتابع $f(x,y)$ بالنسبة للمتحول y هو نهاية النسبة $\frac{\Delta F_y}{\Delta y}$ عندما $\Delta y \to 0$ أي:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

انطلاقا من ذلك يمكن التعميم على التوابع متعددة المتحولات. ليكن التابع $F = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ المعرف والمستمر في كل نقطة $(x_1, x_2, ..., x_n)$ من ساحة تعريفه. عندما يتغير المتحول المستقل x_i بمقدار Δx_i فإن التابع F سيتغير بمقدار ΔF_{x_i} ومنه: نعرف المشتق الجزئي للتابع F بالنسبة للمتحول x_i بأنه نهاية النسبة $\frac{\Delta F_{xi}}{\Delta x_i}$

عندما $\Delta \mathrm{x_i} \to 0$ أي:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_i + \Delta x_i, ..., x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)}{\Delta x_i}$$

وبشكل مشابه تعرف المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للتابع $F = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ بالنسبة للمتحولات المستقلة الأخرى ويعبر عن تلك المشتقات بالرموز التالية: $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ ...\ , \frac{\partial f}{\partial x_n}$

وتجدر الإشـــارة هنا إلى أنه عند إجراء الاشتقاق الجزئي للتابع $F = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

بالنسبة للمتحول x_i حيث $(i = 1, 2, ..., n)$ نعتبر كل المتحولات الأخرى ثابتة ونجري الاشتقاق كما لو أن لدينا تابع بمتحول واحد x_i مستقل هو الذي نشتق إليه.

مثـــال: أوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للتابع:

$$f(x_1, x_2) = x_1 + 3x_1x_2^2 + x_2 \cdot \ln x_1$$

الحـــل:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 1 + 3x_2^2 + \frac{x_2}{x_1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 6x_1x_2 + \ln x_1$$

4-1 المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية لتابع متعدد المتحولات:

ليكن لدينا التابع $F = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ المعرف والمستمر في كل نقطة $(x_1, x_2, ..., x_n)$ من ساحة تعريفه ولتكن $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}$ المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى لهذا التابع. إن هذه المشتقات الجزئية هي توابع أيضاً لنفس المتحولات وبالتالي يمكن إجراء الاشتقاق الجزئي للمشتقات الجزئية الأولى بالنسبة للمتحولات x_i وبذلك نحصل على المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية للتابع F. وهذه المشتقات الجزئية هي:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial f}{\partial x_1}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial f}{\partial x_2}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial f}{\partial x_n}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial f}{\partial x_1}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial f}{\partial x_2}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial f}{\partial x_n}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}$$

$$...... \quad ...... \quad ...... \quad ......$$

$$\frac{\partial}{\partial x_n}(\frac{\partial f}{\partial x_1}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_n}(\frac{\partial f}{\partial x_2}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}(\frac{\partial f}{\partial x_n}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

مثـــال:

أوجد جميع المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية للتابع:

$$F = x_1^4 - 5x_1^2 x_2^2 + 6x_2^3 x_3 - 6$$

واحسب قيمها في النقطة $(1, 2, 3)$.

الحــل: لنوجد أولاً جميع المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 4x_1^3 - 10x_1 x_2^2 \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = -10x_1^2 x_2 + 18x_2^2 x_3 \quad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3} = 6x_2^3 \quad (3)$$

ولإيجاد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية للتابع F نشتق التوابع السابقة مرة ثانية بالنسبة لجميع المتحولات. باشتقاق المعادلة (1) نجد:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 12x_1^2 - 10x_2^2 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = -20x_1 x_2 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} = 0$$

باشتقاق المعادلة (2) نجد:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} = -20x_1 x_2 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = -10x_1^2 + 36x_2 x_3 \quad ; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} = 18x_2^2$$

باشتقاق المعادلة (3) نجد:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_2} = 18x_2^2 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} = 0$$

لنوجد قيم هذه المشتقات في النقطة (3 , 2 , 1) نجد:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = -28 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = -40 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} = -40 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = 206 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} = 72$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_2} = 72 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} = 0$$

5-1 التفاضل الكلي من المرتبة الأولى للتابع متعدد المتحولات:

لنتذكر أن التفاضل الكلي من المرتبة الأولى لتابع بمتحولين $Z = f(x, y)$ هو:

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial x} dx + \frac{\partial Z}{\partial y} dy$$

أي إن التفاضل الكلي من المرتبة الأولى لمتحولين يساوي إلى مجموع التغيرات في التابع Z الناتجة عن تغيرات لامتناهية في الصغر في كل من المتحولين x و y.

ويمكن تعميم ذلك بهدف الحصول على التفاضل الكلي من المرتبة الأولى لتابع بـــ n متحول.

ليكن لدينا $F = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ تابعاً لـــ n متحول مستقل وقابلاً للاشتقاق في كل نقطة من نقاط ساحة تعريفه. ونظراً لأن المتحولات مستقلة فإنه يمكن أن نثبتها باستثناء أحدها و ليكن x_i فيصبح التابع تابعاً لمتحول واحد x_i يمكن أخذ تفاضله بالنسبة لهذا المتحول فيكون:

$$dF_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

فإذا قمنا بنفس العملية من أجل كل i حيث $i=1,2,\ldots,n$ نحصل على التفاضلات:

$$dF_{x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1\ ,\ \mathrm{dF}_{x_2}=\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2\ ,\cdots,\mathrm{dF}_{x_n}=\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

نطلق على مجموع هذه التفاضلات اسم التفاضل الكلي من المرتبة الأولى للتابع F ونكتب:

$$dF=\sum_{i=1}^{n}dF_{x_i}=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}_n}dx_n$$

إذاً التفاضل الكلي من المرتبة الأولى للتابع F يساوي لمجموع جداءات المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للتابع F في تغيرات تلك المتحولات.

مثـــال: أوجد التفاضل الكلي من المرتبة الأولى للتابع:

$$Z=f(x,y)=2x^2y+3x^3y^5$$

الحـــل: نوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للتابع:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4xy+9x^2y^5$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2x^2+15x^3y^4$$

ومنه نعوض في معادلة التفاضل الكلي للتابع:

$$dZ=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=(4xy+9x^2y^5)dx+(2x^2+15x^3y^4)dy$$

وبإعطاء قيم لـــ x , y , dx , dy فإن العلاقة الأخيرة تمكننا من تقدير dZ.

6-1 التفاضل الكلي من المرتبة الثانية لتابع متعدد المتحولات :

لنتذكر أن التفاضل الكلي من المرتبة الثانية لتابع بمتحولين $F=f(x,y)$ هو التفاضل الكلي من المرتبة الأولى للتابع df، حيث df هو التفاضل من المرتبة الأولى للتابع $f(x,y)$ هو أيضاً تابع للمتحولات x, y أي:

$$d^2F=d(df)=d(\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy)$$

$$d^2F=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx\ dy+\frac{\partial^2 f}{dy^2}dy^2$$

بتعميم ذلك على تابع متعدد المتحولات نجد أنه من أجل التابع $F = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ المعرف والمستمر والقابل للاشتقاق مرتين على الأقل في كل نقطة من نقاط ساحة تعريفه، يمكن إيجاد التفاضل الكلي من المرتبة الثانية.

لنأخذ التفاضل الكلي من المرتبة الأولى للتابع $F = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ هو:

$$dF = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

إن التفاضل الكلي من المرتبة الثانية للتابع F هو التفاضل الكلي من المرتبة الأولى للتابع dF إذاً:

$$d^2F = d(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1)dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2)dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n)dx_1 +$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1)dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2)dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n)dx_2 +$$

....

$$\frac{\partial}{\partial x_n}(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1)dx_n + \frac{\partial}{\partial x_n}(\frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2)dx_n + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}(\frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n)dx_n$$

بشكل مختصر نكتب:

$$d^2F = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} dx_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 dx_2 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} dx_1 dx_n +$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} dx_2 dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} dx_2^2 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} dx_2 dx_n +$$

....

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} dx_n dx_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} dx_n dx_2 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} dx_n^2$$

وهي العبارة التي تعطينا التفاضل الكلي من المرتبة الثانية لتابع ذي n متحول.

مثـــال : ليكن لدينا التابع: $Z = 2x^2y + 2xy^2 + 3xy + 5$

والمطلوب: إيجاد التفاضل الكلي من المرتبة الثانية لهذا التابع.

الحـــل:

نوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 4xy + 2y^2 + 3y$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = 2x^2 + 4xy + 3x$$

نوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = 4y \quad , \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} = 4x + 4y + 3$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = 4x + 4y + 3 \quad , \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 4x$$

ومنه التفاضل الكلي من المرتبة الثانية يعطى بالعلاقة التالية:

$$d^2 Z = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} dy^2$$

بالتعويض نجد: $d^2 Z = (4y)dx^2 + 2(4x + 4y + 3)dx\, dy + (4x)dy^2$

وهو المطلوب.

7-1 المشتقات الجزئية للتوابع الضمنية:

يسمى التابع الذي يأخذ الشكل $y = f(x)$ بالتابع المحدد أو الصريح لأن المتغير التابع y معبر عنه بوضوح و صراحة بدلالة المتحول المستقل x . مثلاً التابع $y = 6x^2 + 9$ يعد تابعاً صريحاً.

أما في حال أعطينا علاقة تابع بالشكل $f(x, y) = 0$ فإن التابع يسمى تابعاً ضمنياً حيث لا يميز المتحول التابع عن المتحول المستقل، فعلى سبيل المثال الشكل الضمني للتابع السابق هو $f(x, y) = y - 6x^2 - 9 = 0$ وغالباً ما تكون التوابع الاقتصادية في شكلها الضمني، وبالتالي لإيجاد مشتقات تلك التوابع نوجد التفاضل الكلي من المرتبة الأولى لطرفي علاقة التابع الضمني (دون التمييز بين التابع وبين المتحولات) حيث نجد:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0$$

وبالتالي فإن:

$$y_x{}' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} \qquad \text{أو} \qquad x_y{}' = \frac{dx}{dy} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}} = -\frac{1}{y'_x}$$

ويمكن تعميم هذه القاعدة على التوابع متعددة المتحولات كما يلي:

ليكن لدينا التابع الضمني $f(x_1, x_2, \dots, \mathrm{x_n}, z) = 0$ ونريد الحصول على المشتقات الجزئية للتابع Z بالنسبة لمتحولاته ($x_1, x_2, \dots, \mathrm{x_n}$) وذلك دون أن نجعل ذلك التابع ظاهرياً (أي دون أن نجعله من الشكل $(Z = \varphi(x_1, x_2, \ \dots \ , \mathrm{x_n}, z)$)

فإننا نطبق القاعدة التالية: $\forall \ \mathrm{i} = 1,2,\dots,\mathrm{n}$ $\qquad \dfrac{\partial \mathrm{Z}}{\partial \mathrm{x_i}} = -\dfrac{\mathrm{f'_{x_i}}}{\mathrm{f'_Z}}$

وهكذا نجد أن للتابع الضمني $f(x_1, x_2, \dots, \mathrm{x_n}, z) = 0$ مشتقات جزئية وهي على التوالي:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1} = -\frac{f'_{x_1}}{f'_Z}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x_2} = -\frac{f'_{x_2}}{f'_Z}$$

....

$$\frac{\partial Z}{\partial x_n} = -\frac{f'_{x_n}}{f'_Z}$$

مع ملاحظة أن $f'_Z \neq 0$.

مثـــال: أوجد المشتقات الجزئية $\dfrac{\partial Z}{dx_1}, \dfrac{\partial Z}{dx_2}, \dfrac{\partial Z}{dx_3}$ للتابع الضمني.

$$f(x_1, x_2, x_3, z) = x_1^3 + 3x_1x_2^2x_3 - 2x_2^2x_3^3 + 3x_1^2x_2z + x_1^2z^2 = 0$$

$$\frac{\partial Z}{dx_1} = -\frac{f'_{x_1}}{f'_Z} = -\frac{3x_1^2 + 3x_2^2x_3 + 6x_1x_2z + 2x_1z^2}{3x_1^2x_2 + 2x_1^2z}$$

$$\frac{\partial Z}{dx_2} = -\frac{f'_{x_2}}{f'_Z} = -\frac{6x_1x_2x_3 - 4x_2x_3^3 + 3x_1^2z}{3x_1^2x_2 + 2x_1^2z}$$

$$\frac{\partial Z}{dx_3} = -\frac{f'_{x_3}}{f'_Z} = -\frac{3x_1x_2^2 - 6x_2^2x_3^2}{3x_1^2x_2 + 2x_1^2z}$$

§-2- القيم القصوى للتوابع المتعددة المتحولات:

تعريف النقطة الحرجة: نقول عن النقطة $(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)$ أنها نقطة حرجة للتابع $f(x_1,x_2,\ldots,\mathrm{x_n})$ إذا انعدمت جميع المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للتابع $f(x_1,x_2,\ldots,\mathrm{x_n})$ في هذه النقطة أي:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_2}=\cdots=\frac{\partial f}{\partial x_n}=0$$

تعريف النقطة العظمى الموضعية: ليكن لدينا التابع $f(x_1,x_2,\ldots,\mathrm{x_n})$ المعرف والمستمر والقابل للاشتقاق مرتين على الأقل في كل نقطة من نقاط ساحة تعريفه. نقول عن النقطة $(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)$ إنها نقطة عظمى موضعية للتابع $\mathrm{f}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2,\ldots,\mathrm{x}_n)$ إذا كانت قيمة التابع عند هذه النقطة أكبر من قيمته عند أية نقطة أخرى مجاورة لتلك النقطة.

وبعبارة أخرى نقول عن النقطة $(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)$ إنها نقطة عظمى موضعية للتابع $f(x_1,x_2,\ldots,\mathrm{x_n})$ إذا تحققت من أجل كل نقطة $(x_1,x_2,\ldots,\mathrm{x_n})$ مجاورة للنقطة $(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)$ المتراجحة التالية:

$$f(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{\mathrm{x}}_\mathrm{n})\geq f(x_1,x_2,\ldots,\mathrm{x_n})$$

تعريف النقطة الصغرى الموضعية: ليكن لدينا التابع $f(x_1,x_2,\ldots,\mathrm{x_n})$ المعرف والمستمر والقابل للاشتقاق مرتين على الأقل في كل نقطة من نقاط ساحة تعريفه. نقول عن النقطة $(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)$ إنها نقطة صغرى موضعية للتابع $f(x_1,x_2,\ldots,\mathrm{x_n})$ إذا كانت قيمة التابع عند هذه النقطة أصغر من قيمته عند أية نقطة أخرى مجاورة لتلك النقطة.

وبعبارة أخرى نقول عن النقطة $(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)$ إنها نقطة صغرى موضعية للتابع $f(x_1,x_2,\ldots,\mathrm{x_n})$ إذا تحققت من أجل كل نقطة $(x_1,x_2,\ldots,\mathrm{x_n})$ مجاورة للنقطة $(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)$ المتراجحة التالية:

$$f(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{\mathrm{x}}_\mathrm{n})\leq f(x_1,x_2,\ldots,\mathrm{x_n})$$

تعريف النقطة القصوى: كل نقطة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ عظمى موضعية كانت أم صغرى موضعية تسمى نقطة قصوى موضعية. وقد يوجد أكثر من نقطة عظمى موضعية وأكثر من نقطة صغرى موضعية للتابع وقد لا توجد أية نقطة قصوى للتابع.

وننوه إلى أنه إذا كانت النقطة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ حرجة فليس من الضروري أن تكون قصوى، أما إذا كانت تلك النقطة قصوى فهي حتماً حرجة.

سنستعرض فيما يلي نوعين من القيم القصوى للتابع .

1. **القيم القصوى الحرة:** حيث لا يوجد هناك أية شروط تقيد تغيرات المتحولات ضمن ساحة تعريف التابع.
2. **القيم القصوى المقيدة:** أي المشروطة بتحقيق قيود معينة ، كإيجاد القــيم العظمــى لتابع إنتاج منشأة ما شرط تحقيق تكلفة ثابتة معطاة.

1-2 القيم القصوى الحرة لتابع ذو n متحول:

ليكن التابع $f(x_1, x_2, \dots, \mathrm{x_n})$ المعرف والمستمر والقابل للاشتقاق مرتين على الأقل في ساحة تعريفه أي في مجال تغير النقطة $(x_1, x_2, \dots, \mathrm{x_n})$ في الفراغ ذي الــ n بعد.

كي تكون النقطة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ قصوى أي عظمى أو صغرى للتابع $f(x_1, x_2, \dots, \mathrm{x_n})$ فإنه يلزم أن تكون تلك النقطة حرجة ، أي يجب أن تكون جميع المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للتابع $f(x_1, x_2, \dots, \mathrm{x_n})$ مساوية الصفر، هذا يعني تحقق المعادلة التالية:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

وكما نعلم أنه إذا كانت النقطة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ حرجه فهذا لا يعني أنها قصوى. ومن أجل ذلك يجب إيجاد $d^2 f$ أي المشتق من المرتبة الثانية للتابع $f(x_1, x_2, \dots, \mathrm{x_n})$. ولمعرفة نوع النقطة القصوى نلجأ عادةً إلى تشكيل ما يسمى **بمعين هيسيان** الذي نرمز له بالرمز H، وهو معين تتكون عناصره من المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية للتابع $f(x_1, x_2, \dots, \mathrm{x_n})$ حيث فيه:

السطر الأول يمثل المشتقات الجزئية من الشكل $(i=1,2,\ldots,n)\ ;\ \frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial f}{\partial x_i})$، والسطر الثاني المشتقات الجزئية من الشكل $(i=1,2,\ldots,n)\ ;\ \frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial f}{\partial x_i})$ وهكذا نتابع بنفس الأسلوب حتى السطر الأخير n الذي يمثل المشتقات الجزئية من الشكل $(i=1,2,\ldots,n)\ ;\ \frac{\partial}{\partial x_n}(\frac{\partial f}{\partial x_i})$. أي له الشكل التالي:

$$H=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

ونجد أن هذا المعين هو من المرتبة n المساوية لعدد المتحولات في التابع.

نقوم الآن بتشكيل المعينات الجزئية المشكلة حول القطر الرئيسي لهذا المعين بالترتيب التالي:

$$H_1=\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right|$$

$$H_2=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

$$H_3=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{vmatrix}$$

وهكذا حتى نصل إلى المعين H_n الذي له شكل المعين H.

ونلاحظ أن عدد المعينات الجزئية هو n معين ويساوي إلى عدد المتحولات في التابع وتعطى شروط النقاط العظمى والصغرى الموضعية بالتالي:

1- حتى يكون للتابع f قيمة عظمى موضعية في النقطة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ يكفي أن تتناوب إشارات قيم معينات هيسيان الجزئية من سالب إلى موجب إلى سالب وذلك اعتباراً من H_1 أي يكون:

$$H_1 < 0 \text{ , } H_2 > 0 \text{ , } H_3 < 0 \text{ , } \dots \text{ , } (-1)^n H_n > 0$$

2- حتى يكون للتابع f قيمة صغرى موضعية في النقطة الحرجة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ يكفي أن تكون المعينات الجزئية موجبة أي:

$$H_1 > 0, H_2 > 0 \text{ , } H_3 > 0 \text{ , } \cdots \text{ , } H_n = H > 0$$

3- أما في الحالات المخالفة للحالتين السابقتين بما فيها $H_i = 0$ من أجل أي قيمة لـ i فإن النقطة الحرجة **تكون نقطة شاذة.**

مثال:

أوجد القيم القصوى للتابع:

$$F = -x_1^3 + 3x_1x_3 + 2x_2 - x_2^2 - 3x_3^2$$

الحل:

لنوجد جميع المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى ونضعها مساويةً للصفر.

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = -3x_1^2 + 3x_3 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 2 - 2x_2 = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3} = 3x_1 - 6x_3 = 0 \qquad (3)$$

من المعادلة الثانية نحصل على $x_2 = 1$ ومن المعادلة الثالثة نحصل على $x_1 = 2x_3$ نعوض في المعادلة الأولى فنحصل على:

$$-12x_3^2 + 3x_3 = 0 \;\Rightarrow\; 3x_3(-4x_3 + 1) = 0$$

ومنه: إما $x_3 = 0 \Leftarrow x_1 = 0$ أو $x_3 = \frac{1}{4} \Leftarrow x_1 = \frac{1}{2}$.

وبالتالي يكون لدينا نقطتان حرجتان هما:

النقطة الأولى $\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\right) = (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4})$ والنقطة الثانية $\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\right) = (0,1,0)$.

نوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = -6x_1 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} = 3$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = -2 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_1} = 3 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} = -6$$

نشكل معين هيسيان من قيم المشتقات التي حصلنا عليها:

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6x_1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

لدى دراسة النقطة الحرجة الأولى $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4})$ نعوضها في H نجد:

$$H = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

نشكل معينات هيسيان الجزئية فيكون:

$$H_1 = |-3| = -3 < 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 6 > 0$$

$$H = H_3 = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -18 < 0$$

ونلاحظ أن إشارات معينات هيسيان الجزئية تتناوب من سالب إلى موجب إلى سالب ومنه حسب التعريف تكون النقطة الحرجة $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4})$ نقطة عظمى موضعية.

ويأخذ فيها التابع قيمه عظمى نحصل عليها بتعويض النقطة في التابع نجد:

$$F=-(\frac{1}{2})^3+3\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+2(1)-(1)^2-3(\frac{1}{4})^2=\frac{17}{16}$$

أما لدراسة النقطة الحرجة الثانية $(0,1,0)$ نعوضها في معين هيسيان H نجد:

$$H=\begin{vmatrix}0 & 0 & 3\\ 0 & -2 & 0\\ 3 & 0 & -6\end{vmatrix}$$

وبما أن $H_1=0$ نجد أن النقطة $(0,1,0)$ ليست بنقطة قصوى.

مثـــال: أوجد القيم القصوى للتابع:

$$F=\frac{1}{3}x_1^3+x_2^2+x_3^2+x_1x_2.$$

الحـــل:

لنوجد جميع المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى ونضعها مساويةً للصفر.

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=x_1^2+x_2=0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}=2x_2+x_1=0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3}=2x_3=0 \qquad (3)$$

من المعادلة الثالثة نجد أن $x_3=0$ ومن المعادلة الثانية نحصل على $x_2=-\frac{1}{2}x_1$ نعوض في المعادلة الأولى فنحصل على:

$$x_1^2-\frac{1}{2}x_1=0 \Rightarrow x_1(x_1-\frac{1}{2})=0$$

ومنه: إما $x_1=0 \Leftarrow x_2=0$ أو $x_1=\frac{1}{2} \Leftarrow x_2=-\frac{1}{4}$.

وبالتالي النقاط الحرجة هي:

النقطة الأولى $(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)=(\frac{1}{2},-\frac{1}{4},0)$ والنقطة الثانية $(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3)=(0,0,0)$.

نوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 2x_1 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = 1 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} = 1 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} = 2$$

نشكل معين هيسيان من قيم المشتقات التي حصلنا عليها:

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x_1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

لدى دراسة النقطة الحرجة الأولى $(\frac{1}{2} , -\frac{1}{4} , 0)$ نعوضها في H نجد:

$$H = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

نشكل معينات هيسيان الجزئية فيكون:

$$H_1 = |1| = 1 > 0$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

$$H = H_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

ونلاحظ أن إشارات معينات هيسيان الجزئية موجبة ومنه حسب التعريف تكون النقطة الحرجة $(\frac{1}{2} , -\frac{1}{4} , 0)$ نقطة صغرى موضعية. ويأخذ فيها التابع قيمه صغرى نحصل عليها بتعويض تلك النقطة في التابع نجد:

$$F = (\frac{1}{3})(\frac{1}{2})^3 + (-\frac{1}{4})^2 + (0)^2 + (\frac{1}{2})(-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{48}$$

أما لدراسة النقطة الحرجة الثانية $(0,0,0)$ نعوضها في معين هيسيان H نجد:

$$H=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}$$

وبما أن $H_1=0$ نجد أن النقطة $(0,0,0)$ ليست بنقطة قصوى.

2-2 القيم القصوى المقيدة بشرط:

ليكن لدينا التابع $F=f(x_1,x_2\ldots,x_n)$ المعرف والمستمر والقابل للاشتقاق مرتين على الأقل في كل نقطة $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ من نقاط ساحة تعريفه. ولإيجاد القيم العظمى والصغرى لهذا التابع في حال وجود شرط يقيد من تغيرات متحولاته وليكن هذا الشرط من الشكل $g(x_1,x_2,\ldots,x_n)=c$.

ولإيجاد القيم القصوى المقيدة نتبع إحدى الطريقتين التاليتين:

1. الطريقة المباشرة:

تعتمد هذه الطريقة على أخذ أحد المتحولات من معادلة الشرط بدلالة المتحولات الأخرى وليكن x_n حيث نكتب:

$$x_n=\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})$$

نعوض x_n في التابع F فنجد:

$$F=\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})\right)$$

بذلك نحصل على تابع لــ $n-1$ متحول نبحث عن القيم القصوى الحرة وهي محققة للشرط كما تم العمل في الفقرة السابقة:

مثـــال:

أوجد القيم القصوى للتابع: $F=f(x,y)=x\cdot y$

والمقيد بالشرط: $x+y=12$

الحـــل:

من معادلة الشرط نحسب أحد المتحولين x أو y بدلالة الآخر فنجد:

$$y=12-x$$

نعوض هذه القيمة في معادلة التابع F فنحصل على صيغة جديدة للتابع F بالشكل:

$$F = x\left(12 - x\right) = 12x - x^2$$

إن التابع الجديد الحاصل هو تابع ذو متحول واحد. لذلك نوجد مشتق التابع F بالنسبة للمتحول x ونعدمه فنجد:

$$\frac{dF}{dx} = 12 - 2x = 0 \Rightarrow x = 6$$

وهي نقطة حرجة . نوجد المشتق الثاني للتابع F:

$$\frac{d^2F}{dx^2} = -2 < 0$$

إن المشتق الثاني سالب دائماً فالتابع F يأخذ قيمة عظمى في النقطة $x = 6$ وقيمته العظمى تساوي:

$$F = f(6) = 12(6) - (6)^2 = 36$$

إما قيمة المتحول y الموافقة لهذه القيمة العظمى تساوي $y = 12 - 6 = 6$.

2. طريقة مضاريب لاغرانج :

تعتمد هذه الطريقة في أساسها على تشكيل ما يسمى بتابع لاغرانج.

في هذه الطريقة نأخذ الشرط $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c$ ونضعه على الشكل التالي:

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) - c = 0$$

نضرب طرفي الشرط بالوسيط (لمبدا) بـــ λ الذي نطلق عليه أسم مضروب لاغرانج (أو متحول لاغرانج) فيكون:

$$\lambda\left[\, g(x_1, x_2, \ldots, x_n) - c \,\right] = 0$$

نضيف هذا الناتج إلى التابع f الذي يسمى بتابع الهدف فيتشكل لدينا تابع جديد نرمز له بالرمز L يسمى تابع لاغرانج ويعطى بالشكل التالي:

$$L = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda\left[g(x_1, x_2, \ldots, x_n) - c\right]$$

إننا بذلك حصلنا على تابع جديد ذو $n+1$ متحول بدون أي شرط كما هي الحال بالنسبة للقيم القصوى الحرة. إذاً لنبحث عن النقاط الحرجة للتابع L وهي من الشكل $\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots \bar{x}_n, \bar{\lambda}\right)$ نأخذ المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى لهذا التابع بالنسبة لكافة

متحولاته x_i , λ ونطابق هذه المشتقات مع الصفر فنحصل على $n+1$ معادلة هي كالتالي:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x_1, x_2, \ldots, x_n) - c = 0$$

نلاحظ أن المعادلة الأخيرة تمثل معادلة الشرط نفسها.

بحل جملة المعادلات السابقة حلاً مشتركاً نحصل على نقاط حرجة من الشكل $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots \bar{x}_n, \bar{\lambda})$ للتابع L. ولمعرفة ما إذا كان التابع F يأخذ قيم قصوى في النقطة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots \bar{x}_n)$ الموافقة لإحدى النقاط الحرجة يتوجب علينا دراسة إشارة التفاضل الكلي للتابع F أي d^2F وللسهولة نقوم بتشكيل ما يسمى **بمعين هيسيان الموسع** المؤلف من المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية للتابع L بالنسبة لكافة المتحولات بما فيها λ ونرمز له بالرمز J وذلك كالتالي:

$$J = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \frac{\partial g}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2} & & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

حيث يشمل السطر الأول على المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى لمعادلة الشرط وذلك بعد وضع الصفر في الزاوية العلوية اليسارية من J موافقاً لوجود شرط واحد. كما نلاحظ أن العمود الأول ما هو إلا منقول السطر الأول، أما بالنسبة لباقي

المعين فيشكل من المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية للتابع L لنأخذ المعينات الجزئية من J بحيث:

- J_2 يضم المشتقات الجزئية للمتحولين x_2, x_1 وهو من المرتبة الثالثة:

$$J_2 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

- J_3 يضم المشتقات الجزئية للمتحولات الثلاثة الأولى فقط وهو معين من المرتبة الرابعة:

$$J_3 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_3} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} \end{vmatrix}$$

وهكذا نتابع إيجاد J_4 ، J_5 حتى $J_n = J$.

- لمعرفة طبيعة كل نقطة حرجة $\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots \bar{x}_n, \bar{\lambda}\right)$ عظمى للتابع L نعوضها في معين هيسيان الموسع J فتأخذ كافة المعينات قيماً عددية معينة.

1- تكون النقطة الحرجة $\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots \bar{x}_n, \bar{\lambda}\right)$ **عظمى موضعية للتابع** L إذا تناوبت إشارات المعينات الجزئية السابقة من موجب إلى سالب إلى موجب وذلك اعتباراً من J_2 أي:

$$J_2 > 0 \ , \ J_3 < 0 \ , \ J_4 > 0 \ , \ \ldots \ , (-1)^n J_n > 0$$

وهنا تكون النقطة $\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots \bar{x}_n\right)$ الموافقة للنقطة $\left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots \bar{x}_n, \bar{\lambda}\right)$ عظمى موضعية بالنسبة للتابع f ومحققة للشرط بنفس الوقت.

2- تكون النقطة الحرجة $\left(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots\bar{x}_n,\bar{\lambda}\right)$ صغرى موضعية للتابع L إذا كانت جميع إشارات المعينات الجزئية السابقة سالبة أي:

$$J_2 < 0\ ,\ J_3 < 0\ ,\ J_4 < 0\ ,\ \ldots\ ,\ J_n < 0$$

وهنا تكون النقطة $\left(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots\bar{x}_n\right)$ الموافقة للنقطة $\left(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots\bar{x}_n,\bar{\lambda}\right)$ صغرى موضعية بالنسبة للتابع f ومحققة للشرط بنفس الوقت.

3- أما إذا لم تتحقق إحدى المتراجحات السابقة فإن النقطة $\left(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots\bar{x}_n\right)$ تكون نقطة حرجة فقط (شاذة).

مثـــال :

أوجد القيم القصوى للتابع:

$$F = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2$$

والمحققة للشرط:

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 100$$

الحـــل:

نكتب الشرط بالشكل التالي: $2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 100 = 0$

نضرب الطرفين بمتحول لاغرانج:

$$\lambda\left(2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 100\right) = 0$$

نشكل التابع L بإضافة الطرف الأيسر من العلاقة الأخيرة إلى التابع F:

$$L = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + \lambda\left[2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 100\right]$$

نأخذ المشتقات الجزئية بالنسبة لكافة المتحولات بما فيها λ و نجعلها مساوية الصفر فنحصل على المعادلات التالية:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 4x_1 + 2\lambda = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 6x_2 + 3\lambda = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = 10x_3 + 5\lambda = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 100 = 0 \qquad (4)$$

من المعادلات (1) و (2) و (3) نجد:

$$2x_1 = -\lambda \quad , \quad 2x_2 = -\lambda \quad , \quad 2x_3 = -\lambda$$

ومنه : $x_1 = x_2 = x_3$

نعوض في المعادلة (4) فنجد:

$$2x_1 + 3x_1 + 5x_1 = 100 \quad \Rightarrow \quad 10x_1 = 100 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 10$$
$$\Rightarrow \quad x_2 = 10 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 10 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -20$$

إذا النقطة الحرجة هي $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{\lambda}) = (10, 10, 10, -20)$، لمعرفة طبيعة هذه النقطة، نوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية ونعوض في معين هيسيان الموسع J فنجد:

$$J = J_3 = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_3} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = -1200 < 0$$

$$J_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -60 < 0$$

بما أن إشارة المعينات الجزئية سالبة أي $J_3 < 0$, $J_2 < 0$ فالنقطة (10,10,10) الحرجة الموافقة للنقطة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{\lambda}) = (10, 10, 10, -20)$ نقطة صغرى موضعية ومحققة للشرط المعطى ويأخذ التابع قيمته الصغرى عندها وهي:

$$F = 2(10)^2 + 3(10)^2 + 5(10)^2 = 200 + 300 + 500 = 1000$$

3-2 القيم القصوى المقيدة بأكثر من شرط:

ليكن لدينا التابع $F = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ المعرف والمستمر والقابل للاشتقاق الجزئي مرتين على الأقل في ساحة تعريفه، ونرغب بإيجاد القيم العظمى والصغرى لتابع الهدف f وذلك على أن تتحقق الشروط التالية وعددها m شرط:

$$g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_1$$
$$g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_2$$
$$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$$
$$g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C_m$$

يشترط في حل مسألة من هذا النوع أن لا يزيد عدد الشروط في المسالة عن عدد المتحولات أي $(m \leq n)$. لحل هذه المسألة نحول الثوابت C_j إلى اليسار ونضرب المعادلات الناتجة بمضاريب لاغرنج λ_j $(\forall j ; j=1,2, \ldots , m)$ فنحصل على جملة المعادلات التالية:

$$\lambda_j \left[g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) - C_j \right] = 0 \quad \forall \quad j=1,2, \ldots , m$$

نأخذ هذه المعادلات ونضيفها إلى التابع f فيتشكل لدينا تابع L يسمى تابع لاغرنج كما يلي:

$$L = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda_1 \left[g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) - C_1 \right] +$$
$$\lambda_2 \left[g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) - C_2 \right] + \cdots + \lambda_m \left[g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) - C_m \right]$$

ويمكن كتابة المعادلة السابقة بالشكل المختصر التالي:

$$L = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left[g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) - C_j \right]$$

ومن أجل الحصول على النقاط الحرجة للتابع L نأخذ المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للتابع L وذلك بالنسبة لجميع المتحولات $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ونجعلها تساوي الصفر فنحصل على $(n+m)$ معادلة التالية:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_i} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_i} = 0 \quad \forall \ i=1,2,\ldots,n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = g_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) - C_j = 0 \qquad \forall \ j=1,2,\ldots,m$$

نلاحظ جملة الـ m معادلة الأخيرة تمثل جملة الشروط المعطاة . بحل جملة المعادلات $(n+m)$ نحصل على نقطة حرجة من الشكل $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m)$ أو أكثر للتابع L الموافقة للنقاط الحرجة

$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ لتابع الهدف F. لمعرفة طبيعة تلك النقاط الحرجة للتابع L نشكل معين هيسيان الموسع كما يلي:

1- نخصص الـ m سطر الأولى من المعين للمشتقات الجزئية الأولى للشروط الـ m. نضع في السطر الأول و من اليسار m صفرا ونكمله بالمشتقات الجزئية الأولى للشرط الأول، ثم نضع في السطر الثاني m صفراً ونكمله بالمشتقات الجزئية الأولى للشرط الثاني وهكذا نتابع حتى ينتهي الـ m سطر.

2- نضع الـ m سطراً الأولى في الـ m عموداً الأولى بالترتيب.

3- أما الباقي من المعين فنخصصه للمشتقات الجزئية من المرتبة الثانية للتابع L.

ويظهر المعين أخيراً على الشكل المبين أدناه . لقد قسمنا معين هيسيان الموسع إلى أربع مناطق لجعلها واضحة، فالمنطقة العليا اليسرى تتكون من أصفار فقط كما أن المنطقة السفلى اليمنى ما هي إلا معين هيسيان، أما المنطقتين الأخيرتين فتشملان على المشتقات الجزئية للشروط ، وهي تمثل الصورة العكسية للعلاقة بينهما بالنسبة للقطر الرئيسي أما بقية العناصر فهي متناظرة.

$$J = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \vdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \vdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} & \vdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

أما لإيجاد المعينات الجزئية التالية : $J_2, J_3, \ldots, J_n = J$. نجد أن كل معين J_i حيث $i = 2,3, \ldots, n$ يتشكل من العناصر الواقعة في الزاوية اليسرى وهو من المرتبة $(m+i)$. فمثلا لدينا المعين J_2 هو معين من المرتبة $(m+2)$ ويأخذ الشكل التالي:

$$J_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

إن مرتبة المعين J_i هي $(m+i)$ حيث $i = 2,3, \ldots, n$ إذاً مرتبة المعين J_n هي $(m+n)$.

لمعرفة طبيعة كل نقطة من النقاط الحرجة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m)$ للتابع L نوجد قيمة المعينات الجزئية J_i بعد تعويض النقاط الحرجة التي حصلنا عليها في هذه المعينات، وتتم المناقشة كما يلي:

1- إذا كانت m عدد فردي، تكون النقطة الحرجة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m)$ الموافقة للنقطة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ عظمى موضعية، إذا تناوبت إشارات المعينات الجزئية من موجب إلى سالب إلى موجب وهكذا ... اعتباراً من J_2 أي:

$$J_2 > 0 \quad , \quad J_3 < 0 \quad , \quad J_4 > 0, \ldots$$

2- إذا كانت m عدد زوجي تكون النقطة الحرجة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_m)$ الموافقة للنقطة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ عظمى موضعية، إذا تناوبت إشارات المعينات الجزئية من سالب إلى موجب إلى سالب وهكذا ... اعتباراً من J_2 أي:

$$J_2 < 0 \quad , \quad J_3 > 0 \quad , \quad J_4 < 0, \ldots$$

3- إذا كانت m عدد فردي، تكون النقطة الحرجة $(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n,\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2,\ldots,\bar{\lambda}_m)$ الموافقة للنقطة $(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)$ صغرى موضعية إذا كانت جميع إشارات المعينات الجزئية سالبة أي:

$$J_2<0 \quad , \quad J_3<0 \quad , \quad J_4<0,\ldots$$

4- إذا كانت m عدد زوجي تكون النقطة الحرجة $(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n,\bar{\lambda}_1,\bar{\lambda}_2,\ldots,\bar{\lambda}_m)$ الموافقة للنقطة $(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)$صغرى موضعية إذا كانت جميع إشارات المعينات الجزئية موجبة أي:

$$J_2>0 \quad , \quad J_3>0 \quad , \quad J_4>0,\ldots$$

5- أما إذا لم تتحقق أياً من النقاط الأربع السابقة فالنقطة الحرجة $(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_n)$ ليست قصوى.

مثـــال:

أوجد القيم القصوى للتابع: $F=x_1^2+x_2^2-\frac{3}{4}x_3^2$

المقيد بالشرطين التاليين:

$$x_1+x_2=\frac{5}{2}$$

$$x_1=x_3$$

الحـــل:

نقوم بتحويل توابع الشرط إلى معادلات صفرية كما يلي:

$$g_1(x_1,x_2,x_3)-C_1=\frac{5}{2}-x_1+x_2=0$$

$$g_2(x_1,x_2,x_3)-C_2=x_1-x_3=0$$

وبتشكيل تابع لاغرنج فنحصل على:

$$F=x_1^2+x_2^2-\frac{3}{4}x_3^2+\lambda_1\left[\frac{5}{2}-x_1-x_2\right]+\lambda_2\left[x_1-x_3\right]$$

نوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى ونعدمها فنحصل على خمس معادلات هي:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda_1 \qquad = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2x_2 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = -\frac{3}{2}x_3 - \lambda_2 \quad = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = -\frac{3}{2}x_3 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \frac{5}{2} - x_1 - x_2 \quad = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{5}{2} - x_1 \qquad (4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = x_1 - x_3 \qquad = 0 \quad \Rightarrow \quad x_3 = x_1 \qquad (5)$$

نعوض (2) و (3) في المعادلة (1) فنجد:

$$2x_1 - 2x_2 - \frac{3}{2}x_3 = 0 \qquad (6)$$

نعوض (4) و (5) في (6) فنجد:

$$2x_1 - 2(\frac{5}{2} - x_1) - \frac{3}{2}x_1 = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 2 \quad \Rightarrow x_3 = 2$$

نعوض في (4) فنجد:

$$x_2 = \frac{5}{2} - 2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = -3$$

أي أن النقطة $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2) = (2, \frac{1}{2}, 2, 1, -3)$ هي نقطة حرجة.

لنوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} = 2 \quad , \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} = 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_1} = 0 \quad , \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} = -\frac{3}{2}$$

ونوجد المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للشرطين:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1}=-1 \quad , \quad \frac{\partial g_1}{\partial x_2}=-1 \quad , \quad \frac{\partial g_1}{\partial x_3}=0$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x_1}=1 \quad , \quad \frac{\partial g_2}{\partial x_2}=0 \quad , \quad \frac{\partial g_2}{\partial x_2}=-1$$

نوجد قيمة معينات هيسيان الجزئية فنجد:

$$J=J_3=\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{vmatrix}=\frac{5}{2}>0$$

وبما أنه لم تظهر متحولات وجميع القيم ثوابت عددية فنعتبر كأننا عوضنا النقطة الحرجة:

$$\mathrm{J}_2=\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=1>0$$

وبما أن عدد الشروط هو $m=2$ زوجي ، وإشارات معينات هيسيان الجزئية $\mathrm{J}_2>0$ و $\mathrm{J}_3>0$ موجبة ، عندئذ نقول أن النقطة الحرجة:

$$(\overline{\mathrm{x}}_1,\overline{\mathrm{x}}_2,\overline{\mathrm{x}}_3,\overline{\lambda}_1,\overline{\lambda}_2)=(2,\frac{1}{2},2,1,-3)$$

صغرى موضعية للتابع L أي أن النقطة $(\overline{\mathrm{x}}_1,\overline{\mathrm{x}}_2,\overline{\mathrm{x}}_3)=(2,\frac{1}{2},2)$ هي نقطة صغرى موضعية للتابع F المقيد بالشرطين المعطيين وقيمة التابع الصغرى في تلك النقطة هي:

$$F=f(2,\frac{1}{2},2)=(2)^2+(\frac{1}{2})^2-\frac{3}{4}(2)^2=\frac{5}{4}$$

الجدول المساعد

لقواعد المشتقات الأساسية

1. $y = k$ $\qquad y' = 0 \qquad (k \in R)$

2. $y = x$ $\qquad y' = 1$

3. $y = x^n$ $\qquad y' = n\,x^{n-1}$

4. $y = u(x) \mp v(x)$ $\qquad y' = u'(x) \mp v'(x)$

5. $y = u(x) \cdot v(x)$ $\qquad y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

6. $y = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ $\qquad y' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

7. $y = \log_a x$ $\qquad y' = \dfrac{1}{x}\log_a e$

8. $y = \ln x$ $\qquad y' = \dfrac{1}{x}$

9. $y = \log u(x)$ $\qquad y' = \dfrac{1}{u}\log_a e\dfrac{du}{dx}$

10. $y = \ln u(x)$ $\qquad y' = \dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx}$

11. $y = a^x$ $\qquad y' = a^x \log_e a$

12. $y = e^x$ $\qquad y' = e^x$

13. $y = [u(x)]^{v(x)}$ $\qquad y' = v(x)u(x)^{v(x)-1}u'(x) + u(x)^{v(x)}\,v(x)\ln u(x)$

14. $y = a^{u(x)}$ $\qquad y' = u'(x)a^{u(x)}\log_e a$

15. $y = e^{u(x)}$ $\qquad y' = u'(x)e^{u(x)}$

تمارين ومسائل غير محلولة

1- احسب الخطأ المطلق والنسبي المرتكب في حساب تغير التابع:

$$y = f(x) = 6x^2 + 5x - 4$$

عندما يتغير المتحول x من 5 إلى 5.01.

2- لتكن لدينا العلاقة التالية: $y = 5(2)^x$

المطلوب: احسب التغيرين الحقيقي والتقريبي لـ y عندما يتغير المتحول x من 5 إلى 5.01 ثم احسب الخطأين المطلق والنسبي المرتكب في حساب تغير هذه العلاقة.

3- احسب التفاضلات الجزئية من المرتبة الأولى والثانية لكل من التوابع التالية:

(1) $F = \ln x_1 + e^{x_2}$

(2) $F = a x_1^{\alpha} \cdot x_2^{\beta}$

(3) $F = 1 - x_1^2 \cdot x_2$

(4) $F = a(bx_1^{-c} + (1-b)x_2^{-c})^{-\frac{1}{c}}$

4- بين فيما إذا كانت للتوابع التالية نقاط حرجة، ثم حدد نوعها، وأوجد قيمة التابع عند كل منها.

(1) $F = x_1^2 + 2x_1 \cdot x_2 - x_2 - x_3$

(2) $F = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1$

(3) $F = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$

المقيد بالشرط: $x_1 = 7x_3$

(4) $F = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$

المقيد بالشرط: $x_1 + x_2 + x_3 = 3$

(5) $F = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$

المقيد بالشرطين: $x_1 = x_3 \qquad x_1^2 + x_2^2 = 6$